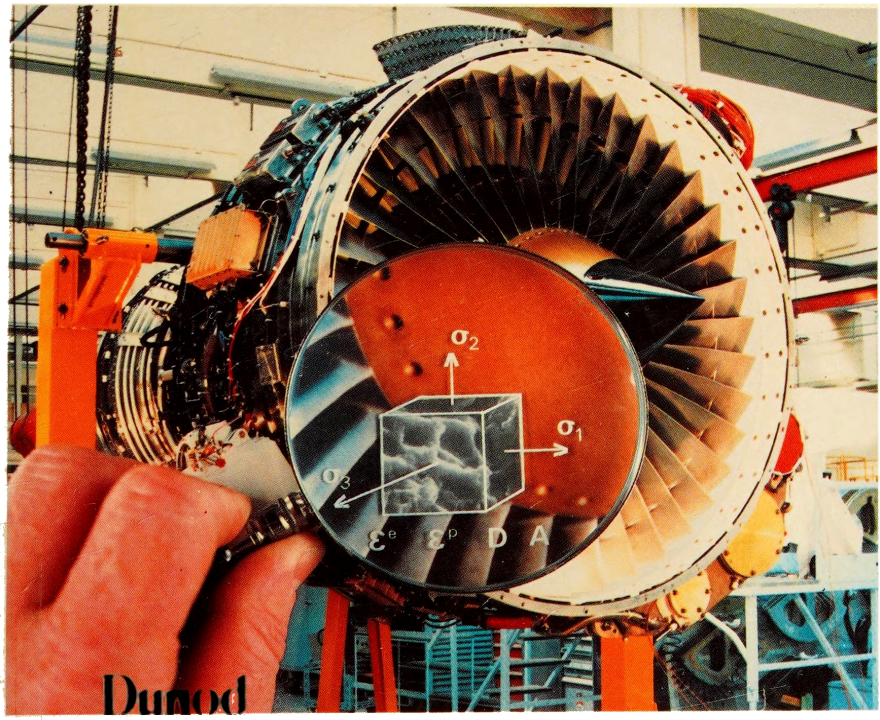
J. Lemaitre J.-L. Chaboche

Mécanique des matériaux solides



Dunod

Photo de couverture :
Turboréacteur CFM 56 réalisé par
CFM international, filiale de SNECMA
et GENERAL ELECTRIC. Publiée avec
l'aimable autorisation de CFM international
(Montage J.-C. Recourcé)

© BORDAS, Paris, 1988
ISBN : 2-10-001397-1

" Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration "

PRÉFACE

Mes jeunes collègues Jean Lemaitre et Jean-Louis Chaboche m'ont invité à écrire quelques lignes de présentation pour l'ouvrage *Mécanique des Matériaux Solides* qu'ils publient aujourd'hui. J'ai accepté très volontiers ce témoignage de confiance et d'amitié, bien que d'une part le titre, la table des matières si complète et l'introduction explicitent fort clairement l'objet de l'ouvrage et que, d'autre part, la légitime réputation des auteurs soit tout à fait suffisante pour attirer et retenir l'attention des lecteurs.

L'originalité de ce livre, je dirais presque son identité, n'apparaissent vraiment que si on le situe dans l'évolution des disciplines scientifiques des dernières décennies. Il s'insère en effet dans un triple courant dont il accueille et intègre les enseignements récents. En premier lieu, à la mécanique et à la thermodynamique des milieux continus sont empruntés le cadre conceptuel et les méthodes permettant de construire, à partir de quelques notions simples, la grande variété de modèles phénoménologiques nécessaire pour décrire la multitude des comportements de nos matériaux solides. En second lieu sont recueillis, rassemblés, éclairés et surtout mis à profit les observations, les schématisations, les lois empiriques que des générations d'ingénieurs ont dégagé avec imagination et perspicacité pour guider leurs projets et leurs réalisations. Enfin, sont inventoriés les phénomènes physiques, et notamment ceux que l'on observe à l'échelle microscopique, moléculaire ou atomique, échelle où se produisent les événements qui déterminent et expliquent les comportements macroscopiques. Même si cette détermination et cette explication ne peuvent être explicitées et traduites en formules opératoires, aussi souvent qu'il est possible, il est fait appel à ces phénomènes pour éclairer les résultats et les procédures.

Ce triple héritage, à mon avis, ne saurait trop être souligné. Car le développement si remarquable de la thermodynamique des milieux continus ne constituerait qu'une belle construction théorique s'il n'introduisait pas une intelligence effective et opérationnelle de la multitude des lois empiriques patiemment induites de l'expérience. Les connaissances provenant de ces dernières, même accumulées, ne sont contributions au progrès de l'esprit que parce qu'elles viennent expliciter, justifier et souvent inspirer la construction théorique qui reçoit par elles, et seulement par elles, sa consécration plénière. De même la physique des solides, capable de pénétrer sans cesse plus loin dans l'échelle microscopique des phénomènes élémentaires, ne peut acquérir toute sa portée pratique que si elle est relayée ou suppléée par les disciplines macroscopiques

qui soutiennent et perfectionnent une technique sans cesse plus audacieuse, sans cesse plus efficiente. Ces disciplines (les recherches d'aujourd'hui en donnent la preuve) préciseront et affineront leurs méthodes dans la mesure où leur dialogue avec les disciplines voisines, physique ou chimie, pourra être perfectionné. Se situer au point de rencontre de ces trois courants de pensée et manifester leurs relations mutuelles qui en définitive renforcent l'intérêt de chacun d'eux, tel m'apparaît être la caractéristique marquante de l'ouvrage.

Pour réussir un bon livre, il ne suffit pas d'avoir une conception juste, un objectif clair et digne d'intérêt. Point n'est besoin de détailler les écueils et les dangers de l'entreprise que pouvaient rencontrer nos auteurs puisque, j'estime, ils ont su les éviter. Ce livre n'est pas une « somme » où le lecteur trouverait l'exposé des trois grands courants de recherche que je viens d'évoquer. Mais c'est essentiellement l'exposé, assez complet tout en évitant l'accumulation de détails qui obscurcissent les idées, des lois de comportement de tous les matériaux qualifiés solides, métaux à température ambiante ou à température élevée, polymères si variés depuis l'état vitreux jusqu'à l'état caoutchoutique, bois, bétons et dans tous les états de leur existence, si j'ose dire : endommagés, fissurés, vieillis. C'est cette préoccupation première qui fait l'essence de l'ouvrage.

Les formulations théoriques de la mécanique des milieux continus sont rappelées, sans développement superflu, avec juste ce qu'il faut pour que le lecteur puisse faire le lien, si nécessaire, avec d'autres études ; il en est de même pour les méthodes de calcul par éléments finis sans lesquelles l'entreprise perdrait le plus grand de son intérêt. Des constatations analogues valent pour les autres courants disciplinaires mentionnés plus haut : juste ce qu'il faut pour éclairer l'objet de l'ouvrage en exposant les méthodes permettant de tester les lois réalistes proposées, et en les explicitant avec les données numériques utiles pour l'application. C'est pourquoi je recommande sans hésitation le livre à de larges catégories de lecteurs qui, grâce aux fils conducteurs qui sont donnés, y trouveront aisément des informations qui leur seront profitables dans leur travail : chercheurs théoriciens qui verront avec satisfaction que leurs efforts passés n'ont pas été inutiles et y puiseront inspiration pour l'avenir, ingénieurs de construction mécanique ou de génie civil qui trouveront non seulement de précieuses données mais aussi des cadres de pensée éclairants et stimulants, métallurgistes, chimistes, physiciens qui y découvriront l'accès à la connaissance des disciplines macroscopiques en aval de leurs recherches. De dimension raisonnable, écrit dans un style clair et dépouillé de tout langage trop spécialisé, se situant au niveau maîtrise-diplôme d'études approfondies qui reste accessible à un public scientifique nombreux, l'ouvrage est promis à une diffusion large et bien méritée.

Je ne peux m'empêcher enfin de noter que ce livre apporte un nouveau témoignage de la vitalité de la mécanique des solides française, de l'unité et la complémentarité de ses vues et de ses efforts, et de l'intérêt des résultats qui lui sont dus.

De fait, les équipes françaises ont apporté de belles contributions aux développements théoriques sur lesquels Jean Lemaitre et Jean-Louis Chaboche

appuient leurs analyses : méthode des puissances virtuelles, analyse fonctionnelle et méthodes de calculs par éléments finis, formulations des lois de comportement par la méthode de l'état local en plasticité et viscoplasticité notamment, et application de cette même méthode à l'endommagement et à la mécanique des milieux fissurés. Le mérite de nos auteurs est d'avoir su les assimiler et s'en inspirer pour aller plus loin et défricher des domaines nouveaux en intégrant toutes les exigences nées de l'expérimentation physique et de l'application technique, et d'apporter ainsi à l'orientation des recherches des équipes françaises la preuve de la validité et de la qualité des résultats dus à leurs efforts cohérents. Ces auteurs ont su déjà l'un et l'autre vivre et développer cet état d'esprit que ce soit dans leurs recherches personnelles, à l'O.N.E.R.A. et au L.M.T. de Cachan, que ce soit dans leurs enseignements, que ce soit surtout au sein du G.R.E.C.O. « Grandes déformations et Endommagement ». Le présent ouvrage doit encore étendre le champ de leur rayonnement, et par suite celui de la mécanique française, ceci pour le plus grand bien et pour une plus grande vitalité de notre technique.

En exprimant publiquement à Jean Lemaitre et à Jean-Louis Chaboche ma reconnaissance et mes félicitations, je forme le vœu que ce livre soit largement diffusé, et qu'il fasse connaître, au-delà de nos frontières, l'esprit et la qualité de la recherche en mécanique des solides développée par nos équipes durant ces dernières années.

Paul Germain
Professeur à l'Ecole Polytechnique
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences
Paris, Décembre 1984

TABLE DES MATIÈRES

Préface V
Introduction XXI
Notations 1

CHAPITRE 1. ÉLÉMENTS SUR LES MÉCANISMES PHYSIQUES DE DÉFORMATION ET DE RUPTURE. 5

1. Métaux et alliages 6
1.1. Structure 6
1.1.1. Eléments de cristallographie 6
1.1.1.1. Atomes 6
1.1.1.2. Monocristaux 6
1.1.1.3. Polycristaux 8
1.1.2. Défauts cristallins 8
1.1.2.1. Défauts ponctuels et surfaciques 8
1.1.2.2. Dislocations 10
1.2. Mécanismes physiques de déformation 13
1.2.1. Déformation élastique 13
1.2.2. Déformations permanentes 13
1.2.2.1. Déformation par glissements et mâclage 13
1.2.2.2. Déformation par mouvements de dislocations. 14
1.2.2.3. Sources de dislocations 15
1.2.3. Limite d'élasticité 16
1.2.4. Déformation des polycristaux 18
1.2.5. Instabilités microstructurales 20
1.3. Mécanismes physiques de rupture 21
1.3.1. Rupture fragile 21
1.3.2. Rupture ductile 23
1.3.3. Rupture par fatigue d'un polycristal 24
1.3.4. Effets de l'environnement 26

2. Autres matériaux 26
2.1. Polymères 26
2.1.1. Structures 26
2.1.1.1. Molécules 26
2.1.1.2. Arrangements amorphe et semi-cristallin 27
2.1.1.3. Différents polymères 28
2.1.1.4. Composites fibres-résines 28

2.1.2. Mécanismes physiques de déformation 30
2.1.2.1. Déformations viscoélastiques 30
2.1.2.2. Limite d'élasticité 30
2.1.2.3. Déformations permanentes 30
2.1.3. Mécanismes physiques de rupture 31
2.2. Matériaux granulaires : béton 31
2.2.1. Constitution du béton hydraulique 31
2.2.1.1. Granulats 31
2.2.1.2. Ciment 32
2.2.1.3. Hydratation de la poudre de ciment 32
2.2.2. Mécanismes physiques de déformation et de rupture .. 33
2.3. Bois 34
2.3.1. Structure anatomique des bois 34
2.3.1.1. Hétérogénéité et anisotropie 34
2.3.1.2. Fibres et cellules 35
2.3.1.3. Humidité 35
2.3.2. Mécanismes physiques de déformation et de rupture .. 37

3. Bibliographie du chapitre 1 37

CHAPITRE 2. ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE ET DE THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS 39

1. Enoncé du principe des puissances virtuelles 40
1.1. Mouvements et puissances virtuels 40
1.2. Systèmes de référence et dérivée particulaire 41
1.3. Principe des puissances virtuelles 42

2. Méthode des puissances virtuelles 42
2.1. Taux de déformation et contrainte 42
2.1.1. Choix du mouvement virtuel, théorie du premier gradient 43
2.1.2. Puissance virtuelle des efforts intérieurs 43
2.1.3. Puissance virtuelle des efforts extérieurs 45
2.1.4. Puissance virtuelle des quantités d'accélération 46
2.2. Equations d'équilibre 46
2.3. Déformations et déplacements 47
2.3.1. Hypothèse des petites déformations et petits déplacements 47
2.3.2. Transformation finie en grandes déformations et grands déplacements 49
2.4. Invariants, représentations tensorielles 52

3. Enoncés fondamentaux de la thermodynamique 54
3.1. Lois de conservation, premier principe 54
3.2. Entropie, deuxième principe 56

4. Méthode de l'état local 58
4.1. Variables d'état 58
4.1.1. Variables observables 59
4.1.2. Variables internes 59
4.2. Potentiel thermodynamique. Lois d'état 60
4.3. Dissipation. Lois complémentaires 62
4.3.1. Dissipation intrinsèque. Dissipation thermique 62
4.3.2. Potentiel de dissipation 63
4.3.3. Relations de symétrie d'Onsager 65
4.3.4. Découplage des dissipations intrinsèque et thermique .. 65
4.3.5. Cas des phénomènes dissipatifs instantanés 66
5. Eléments de thermique 67
5.1. Loi de Fourier 67
5.2. Equation de la chaleur 67
5.2.1. Propagation de la chaleur 68
5.2.2. Echauffement adiabatique 69
6. Bibliographie du chapitre 2 70

CHAPITRE 3. IDENTIFICATION ET CLASSIFICATION RHÉOLOGIQUE DES SOLIDES RÉELS 71

1. La méthode phénoménologique globale 72
2. Eléments sur les techniques d'expérimentation et d'identification ... 73
2.1. Essais caractéristiques 73
2.1.1. Essai d'écrouissage en traction ou compression simples .. 75
2.1.2. Essai de fluage en traction ou compression simples 75
2.1.3. Essai de relaxation en traction ou compression simples .. 76
2.1.4. Essai d'écrouissage-relaxation multiple 76
2.1.5. Essais cycliques 76
2.1.6. Essais de rupture 78
2.1.7. Essais multidimensionnels 78
2.1.8. Problème des matériaux anisotropes 79
2.2. Techniques expérimentales 79
2.2.1. Machines d'essais 79
2.2.1.1. Essais unidimensionnels monotones et cycliques 79
2.2.1.2. Essais multidimensionnels 81
2.2.2. Techniques de mesure des variables caractéristiques ... 83
2.2.2.1. Forces et contraintes 83
2.2.2.2. Déplacements et déformations 83
2.2.2.3. Déformation plastique. Longueur utile des éprouvettes 84
2.2.2.4. Température 86
2.2.2.5. Endommagement 87
2.2.2.6. Longueur ou surface de fissure 87
2.2.3. Eprouvettes 88

2.3. Méthodes d'identification 92
2.3.1. Formulation analytique des modèles 92
2.3.1.1. Le rapport qualité-prix 92
2.3.1.2. Modélisation des non-linéarités 92
2.3.1.3. Règle de cumulation linéaire 93
2.3.1.4. Dispersion, coefficients aléatoires 94
2.3.2. Méthodes numériques d'identification 95
2.3.2.1. Généralités 95
2.3.2.2. Méthode des moindres carrés linéaire 98
2.3.2.3. Méthode de Gauss-Newton 99
2.3.2.4. Variation des paramètres caractéristiques en fonction de la température 100

3. Schématisation des comportements réels 101
3.1. Modèles analogiques 101
3.2. Solide rigide et fluide parfait 102
3.3. Fluide visqueux 102
3.4. Solides élastiques 103
3.4.1. Solide élastique parfait 103
3.4.2. Solide visco-élastique 104
3.5. Solides plastiques 105
3.5.1. Solide rigide parfaitement plastique 105
3.5.2. Solide élastique parfaitement plastique 105
3.5.3. Solide élastoplastique écrouissable 106
3.6. Solides viscoplastiques 108
3.6.1. Solide parfaitement viscoplastique 108
3.6.2. Solide élastique parfaitement viscoplastique 108
3.6.3. Solide élastoviscoplastique écrouissable 109
3.7. Caractérisation de l'écrouissage 110
3.7.1. Ecrouissage isotrope 110
3.7.2. Ecrouissage cinématique 111
3.7.3. Effet Bauschinger 111
3.7.4. Effets des chargements cycliques 112
3.8. Vieillissement 115

4. Schématisation de la rupture 116
4.1. Rupture par endommagement de l'élément de volume 117
4.1.1. Endommagement macrofragile 117
4.1.2. Endommagement plastique ductile 117
4.1.3. Endommagement viscoplastique fragile 117
4.1.4. Endommagement de fatigue 118
4.2. Rupture d'une structure par fissuration 118
4.2.1. Fissuration par rupture fragile 119
4.2.2. Fissuration par rupture ductile 119
4.2.3. Fissuration par fluage 119
4.2.4. Fissuration par fatigue 119

5. Schématisation des frottements 120
5.1. Modèle de Coulomb 120
5.2. Modèle de couche limite 121

6. Bibliographie du chapitre 3 121

CHAPITRE 4. ÉLASTICITÉ, THERMOÉLASTICITÉ, VISCO-ÉLASTICITÉ LINÉAIRES 123

1. Elasticité 124
1.1. Domaine de validité et d'emploi 124

1.2. Formulation 124
1.2.1. Potentiel thermodynamique 124
1.2.2. Elasticité linéaire isotrope 125
1.2.3. Elasticité orthotrope 128
1.2.4. Elasticité à isotropie transverse 129

1.3. Identification 130
1.3.1. Méthodes statiques 131
1.3.2. Méthodes dynamiques 133

1.4. Tableau de caractéristiques d'élasticité de matériaux usuels ... 134

1.5. Notions sur la méthode des éléments finis 135
1.5.1. Généralités 135
1.5.2. Formulation des caractéristiques d'un élément 135
1.5.3. Assemblage 138

2. Thermoélasticité 139
2.1. Formulation 139

2.2. Identification 141
2.2.1. Méthode des raideurs comparées 141
2.2.2. Méthode de la contrainte d'origine thermique 143

2.3. Caractéristiques de thermoélasticité de matériaux usuels 145

3. Viscoélasticité 146
3.1. Domaine de validité et d'emploi 146

3.2. Formulation thermodynamique 146
3.2.1. Solide de Kelvin-Voigt 146
3.2.2. Corps de Maxwell 148

3.3. Formulation fonctionnelle 151
3.3.1. Fonction de fluage 151
3.3.2. Fonction de relaxation 153
3.3.3. Loi de comportement tridimensionnelle 154
3.3.4. Identification 155

3.4. Caractéristiques de viscoélasticité de matériaux usuels 156

3.5. Eléments sur le calcul des structures viscoélastiques 158
3.5.1. Transformée de Laplace-Carson 158
3.5.2. Equations des problèmes de viscoélasticité 160
3.5.3. Méthode de résolution 160

4. Bibliographie du chapitre 4 161

CHAPITRE 5. PLASTICITÉ 163

1. Domaine de validité et d'emploi 163

2. Aspects phénoménologiques 164

2.1. Comportement unidimensionnel 165
2.1.1. Limite d'élasticité 166
2.1.2. Ecoulement plastique, écrouissage et seuil 166
2.1.3. Relations de comportement 170
2.1.3.1. Cas des solides parfaitement plastiques 170
2.1.3.2. Cas des solides plastiques écrouissables 171
2.1.3.3. Cas des chargements cycliques 171
2.1.3.4. Tableau de caractéristiques de plasticité de matériaux usuels 177

2.2. Critères tridimensionnels de plasticité 177
2.2.1. Critères isotropes 179
2.2.1.1. Critère de Von Mises 180
2.2.1.2. Critère de Tresca 182
2.2.1.3. Validité expérimentale 183
2.2.2. Critères anisotropes 184
2.2.2.1. Critère de Hill 185
2.2.2.2. Critère de Tsaï 186

3. Formulation générale des lois de comportement 188

3.1. Hypothèse de partition 188

3.2. Choix des variables thermodynamiques 188

3.3. Surface de charge et potentiel de dissipation 190
3.3.1. Surface de charge, critère de charge-décharge 190
3.3.2. Plasticité non associée 193
3.3.3. Condition de consistance, expression du multiplicateur plastique 194
3.3.4. Plasticité associée. Matériau standard généralisé 196

4. Lois d'écoulement particulières 196

4.1. Les différents types de critères et de lois d'écoulement 196

4.2. Lois à écrouissage isotrope 198
4.2.1. Loi de Prandtl-Reuss 199
4.2.1.1. Formulation 199
4.2.1.2. Identification 202
4.2.1.3. Cas de la plasticité parfaite 203

4.2.2. Autres lois à écrouissage isotrope 203
4.2.2.1. Loi de plasticité isotrope utilisant le critère de Tresca 204
4.2.2.2. Loi d'écoulement isotrope utilisant des critères anisotropes 205

4.3. Lois à écrouissage cinématique linéaire 205
4.3.1. Ecrouissage cinématique de Prager 205
4.3.1.1. Forme générale 205
4.3.1.2. Cas du critère de Von Mises 208
4.3.1.3. Identification 209
4.3.2. Loi de Prager-Ziegler et formulations plus générales .. 212

4.4. Lois d'écoulement en chargements cyclique ou quelconque 213
4.4.1. Modélisations avec réactualisation des coefficients caractéristiques 214
4.4.2. Modèles multicouches et formulation de Mroz 216
4.4.3. Lois à écrouissage cinématique non linéaire 219
4.4.3.1. Formulation 220
4.4.3.2. Cas de la traction-compression 221
4.4.3.3. Propriétés 223
4.4.3.4. Identification 227
4.4.3.5. Tableau de caractéristiques de plasticité cyclique 227
4.4.4. Lois d'écrouissage combinées 229
4.4.4.1. Superposition de l'écrouissage isotrope 229
4.4.4.2. Superposition de plusieurs modèles cinématiques 233
4.4.4.3. Introduction d'une mémoire de l'écrouissage. 234

4.5. Classement des différents modèles 238

5. Cas du chargement proportionnel 239

5.1. Definition 239

5.2. Loi intégrée d'Hencky-Mises. Contrainte et déformation équivalentes 240

5.3. Théorème d'existence du chargement proportionnel 241

6. Eléments sur les méthodes de calcul en plasticité 243

6.1. Calculs de structures 243
6.1.1. Calcul des concentrations de contraintes par la méthode de Neuber 243
6.1.2. Méthode des éléments finis en élastoplasticité 245

6.2. Analyse limite 248
6.2.1. Champs licites 248
6.2.2. Théorèmes limites 249

6.3. Méthode globale approchée de l'énergie uniforme 250

7. Bibliographie du chapitre 5 251

CHAPITRE 6. VISCOPLASTICITÉ 253

1. Domaine de validité et d'emploi 254

2. Aspects phénoménologiques 254
2.1. Résultats tirés des essais d'écrouissage 254
2.2. Résultats tirés des essais de fluage 257
2.3. Résultats tirés des essais de relaxation 262
2.4. Loi d'écrouissage-viscosité 263
2.5. Influence de la température 267
2.6. Résultats tirés des essais cycliques 269
2.7. Résultats tirés des essais multiaxiaux 272

3. Formulation générale des lois de comportement 275
3.1. Partition des déformations 275
3.2. Choix des variables thermodynamiques 275
3.3. Potentiel de dissipation 277
3.3.1. Lois de normalité 277
3.3.2. Particularisation du potentiel 278

4. Lois de comportement particulières 279
4.1. Lois de viscoplasticité parfaite 279
4.1.1. Formulation tridimensionnelle 279
4.1.1.1. Forme générale 279
4.1.1.2. Loi d'Odqvist 280
4.1.1.3. Loi avec domaine élastique 281
4.1.1.4. Loi avec terme exponentiel 281
4.1.2. Identification d'après des essais de traction 281
4.1.3. Domaine de validité 283
4.2. Lois de viscoplasticité à écrouissage isotrope 286
4.2.1. Formulation tridimensionnelle 286
4.2.1.1. Forme générale 286
4.2.1.2. Loi d'écrouissage-viscosité additive 287
4.2.1.3. Loi d'écrouissage-viscosité multiplicative 288
4.2.1.4. Etude de la dissipation 289
4.2.2. Identification d'après des essais de traction 290
4.2.2.1. Loi d'écrouissage-viscosité additive 290
4.2.2.2. Loi d'écrouissage-viscosité multiplicative 293
4.2.3. Cas des chargements cycliques 297
4.2.4. Méthode d'extrapolation « relaxation-fluage » 299
4.2.5. Domaine de validité 303
4.3. Loi de viscoplasticité à écrouissage cinématique 306
4.3.1. Formulation générale 307
4.3.1.1. Ecrouissage cinématique pur 307
4.3.1.2. Superposition de l'écrouissage isotrope 310
4.3.1.3. Etude de la dissipation 312

4.3.2. Identification d'après des essais de traction-compression 313
4.3.2.1. Propriétés de la loi à écrouissage cinématique non linéaire en traction-compression 313
4.3.2.2. Bilan des puissances dissipées 315
4.3.2.3. Identification des coefficients 317
4.3.3. Caractéristiques de matériaux, domaine de validité... 319
4.4. Modélisation d'effets particuliers 325
4.4.1. Effets d'histoire de la température 325
4.4.2. Effets de recouvrance et de restauration 329
4.4.3. Effets de vieillissement 333
4.4.4. Couplage plasticité-viscoplasticité 334

5. Eléments sur les méthodes de calcul des structures en viscoplasticité .. 337
5.1. Schéma général du calcul de viscoplasticité 338
5.2. Méthodes de linéarisation pas à pas 339

6. Bibliographie du chapitre 6 341

CHAPITRE 7. ENDOMMAGEMENT 343

1. Domaine de validité et d'emploi 344
2. Aspects phénoménologiques 345
2.1. Variable d'endommagement 345
2.1.1. Définition 345
2.1.2. Hypothèse d'isotropie 347
2.2. Contrainte effective 347
2.2.1. Définition 347
2.2.2. Principe d'équivalence en déformation 348
2.2.3. Endommagement critique à rupture 348
2.3. Mesures d'endommagement 349
2.3.1. Variation du module d'élasticité 349
2.3.1.1. Méthode statique 349
2.3.1.2. Méthode dynamique par ultrasons 351
2.3.2. Variation des caractéristiques de plasticité 352
2.3.2.1. Caractéristiques d'écrouissage monotone 352
2.3.2.2. Caractéristiques d'écrouissage cyclique 353
2.3.3. Variation des caractéristiques de viscoplasticité 355
2.3.4. Variation de résistance électrique 357
2.4. Lois élémentaires d'endommagement 359
2.4.1. Loi d'endommagement plastique ductile linéaire en déformation 359
2.4.2. Loi d'endommagement de fluage de Kachanov 360
2.4.3. Loi d'endommagement de fatigue 360
2.4.3.1. Cumul linéaire et non linéaire 362
2.4.3.2. Loi de Woehler-Miner 364
2.4.3.3. Loi de Manson-Coffin 367

2.4.3.4. Critère énergétique 370
2.4.3.5. Méthode de partition de l'amplitude de déformation 371
2.5. Critères d'endommagement 376
2.5.1. Critère du taux de restitution de densité d'énergie élastique 377
2.5.2. Critère à trois invariants 378
2.5.3. Critère non symétrique en déformation 381
2.5.4. Critères de limite de fatigue 382

3. Formulation thermodynamique 390

3.1. Représentation tridimensionnelle de l'endommagement 390
3.1.1. Définition de la contrainte effective par l'équivalence en déformation 391
3.1.2. Les deux problèmes de la multiaxialité de l'endommagement 393
3.2. Théorie de l'endommagement isotrope 394
3.2.1. Potentiel thermodynamique 394
3.2.2. Potentiel de dissipation 395
3.2.3. Critère de rupture de l'élément de volume 397
3.3. Une théorie d'endommagement anisotrope 398
3.3.1. Potentiel thermodynamique 398
3.3.2. Potentiel de dissipation 399
3.3.3. Définition de la loi d'anisotropie 400

4. Modèles particuliers 403

4.1. Endommagement plastique ductile 404
4.1.1. Modèle unidimensionnel en contrainte 404
4.1.2. Modèle tridimensionnel en déformation 406
4.2. Endommagement de fluage 408
4.2.1. Modèle de cumulation non linéaire 408
4.2.2. Modèle tridimensionnel isotrope 410
4.2.3. Modèle d'endommagement anisotrope 411
4.3. Endommagement de fatigue 413
4.3.1. Définition du dommage par cycle 413
4.3.2. Modèle unidimensionnel 414
4.3.3. Extension au cas tridimensionnel 417
4.3.4. Cas de la température variable au cours du cycle 420
4.4. Effets d'interaction des endommagements de fatigue et de fluage. 422
4.4.1. Le cumul de dommages de natures différentes 422
4.4.2. Règle de cumulation et d'interaction linéaires 423
4.4.3. Modèle de cumulation et d'interaction non linéaires .. 424

5. Couplage déformation-endommagement 429

5.1. Elasticité couplée à l'endommagement 430
5.2. Plasticité couplée à l'endommagement 432
5.2.1. Formulation générale 432
5.2.2. Couplage entre endommagement plastique ductile isotrope et écrouissage isotrope 433
5.3. Viscoplasticité couplée à l'endommagement 435

6. Prévision de l'amorçage des fissures dans les structures 437
6.1. Endommagement initial 437
6.2. Calcul de l'endommagement aux points critiques 437
6.2.1. Méthode classique sans couplage 437
6.2.2. Prise en compte du couplage déformation-endommagement 441
7. Bibliographie du chapitre 7 444

CHAPITRE 8. FISSURATION 445

1. Domaine de validité et d'emploi 446
2. Eléments sur l'analyse des milieux fissurés 447
2.1. Fissures initiales 447
2.2. Analyses élastiques 448
2.2.1. Modes de sollicitations 448
2.2.2. Solution asymptotique de Westergaard 448
2.2.3. Solution exacte de Muskhelishvili 452
2.2.4. Facteurs d'intensité des contraintes 454
2.2.5. Intégrales de contour 455
2.2.6. Taux de restitution d'énergie 457
2.2.7. Problèmes tridimensionnels 460
2.3. Analyses élastoplastiques 461
2.3.1. Estimation de la zone plastique en pointe de fissure ... 462
2.3.2. Intégrales de contour en plasticité et viscoplasticité ... 465
3. Aspects phénoménologiques 467
3.1. Variables gouvernant le comportement des fissures 467
3.1.1. Taux de restitution d'énergie. Intégrales de contour et facteur d'intensité des contraintes 467
3.1.2. Valeurs usuelles de facteurs d'intensité des contraintes .. 468
3.2. Résultats expérimentaux élémentaires 471
3.2.1. Rupture fragile, ténacité de matériaux usuels 471
3.2.2. Rupture ductile, courbes de résistance ou courbes « R ». 473
3.2.3. Rupture par fatigue 475
3.2.3.1. Loi de Paris 475
3.2.3.2. Loi de Forman 478
3.2.3.3. Effets d'histoire du chargement 478
4. Formulation thermodynamique 480
4.1. Choix des variables, potentiel thermodynamique 481
4.2. Taux de restitution d'énergie élastique 484
4.2.1. Définition et signification mécanique 484
4.2.2. Méthodes de détermination de G 487
4.2.2.1. Formules d'encadrement 487
4.2.2.2. Méthode expérimentale de la raideur 488
4.2.2.3. Méthode de l'ouverture de fissure 489
4.2.3. Cas du chargement simple, taux de restitution d'énergie réduit 490

4.3. Variable seuil de fissuration 492
4.4. Etude de la dissipation 495
4.5. Critères de bifurcation des fissures dans les milieux plans 497
4.5.1. Critère de la contrainte normale maximale 497
4.5.2. Critère du taux de restitution d'énergie maximal 500
4.5.3. Critère de la vitesse de fissuration maximale 501
4.6. Cas des structures fissurées tridimensionnelles 501

5. Modèles de propagation de fissures particuliers 504
5.1. Fissuration par rupture fragile 504
5.2. Fissuration par rupture ductile 505
5.3. Fissuration par fluage 508
5.4. Fissuration par fatigue 509
5.4.1. Généralisation de la loi de Paris 509
5.4.2. Modèle à seuil évolutif 510

6. Eléments sur les calculs de fissuration des structures par l'approche globale 513
6.1. Calculs par éléments finis en élasticité 513
6.1.1. Analyses locales et maillages associés 513
6.1.2. Méthodes énergétiques 515
6.1.2.1. Méthode d'encadrement 516
6.1.2.2. Méthodes de perturbation 517
6.1.2.3. Méthode de la flexibilité inverse 517
6.1.2.4. Méthode de l'intégrale J 519
6.2. Cas des structures fissurées tridimensionnelles 520
6.3. Intégration des modèles 524

7. Calculs de fissuration par l'approche locale 526
7.1. Limites et insuffisances de la mécanique de la rupture globale 526
7.2. Principes des approches locales 529
7.2.1. Différents types d'approches locales 529
7.2.2. Méthodologie pratique 531
7.3. Exemples 532
7.3.1. Propagation d'une fissure dans un milieu plan élastique parfaitement fragile 532
7.3.2. Propagation des fissures dans le béton 533
7.3.3. Bifurcation des fissures 534
7.3.4. Propagation des fissures de fatigue 535
7.3.5. Croissance des fissures de rupture ductile 535
7.3.6. Propagation des fissures de fluage 537

8. Bibliographie du chapitre 8 539

Index 541

INTRODUCTION

Bravo cher lecteur, vous avez eu le courage d'ouvrir cet ouvrage ! et vous avez bien fait car vous avez gagné quelques explications :

— Sur le titre d'abord. Il s'agit de MÉCANIQUE c'est-à-dire de l'étude des équilibres et des mouvements à l'aide de relations entre des forces (ou contraintes), des déplacements (ou déformations), le temps, et éventuellement la température. Cette mécanique est appliquée aux MATÉRIAUX de construction du génie mécanique et du génie civil : métaux et alliages, matières organiques naturelles (bois) ou de synthèse (matières plastiques), bétons. Mécanique des solides donc, pour étudier les propriétés de RÉSISTANCE à la DÉFORMATION et à la RUPTURE, propriétés intrinsèques aux matériaux et définies, pour la plupart, sur l'élément de volume, indépendamment de la géométrie des corps concernés.

— Sur l'esprit. La rédaction de l'ouvrage est organisée en vue d'un TRANSFERT des connaissances dans l'esprit des Sciences pour l'Ingénieur. Transfert des connaissances fondamentales vers les applications. Transfert des propriétés microscopiques vers une écriture macroscopique des lois de comportement. Transfert ou plutôt synthèse entre les aspects théoriques et expérimentaux. Les progrès récents en mécanique des solides étant dus à la conjonction de développements décisifs dans tous ces domaines :

- Sur le plan fondamental c'est l'écriture synthétique de la mécanique des milieux continus et la méthode de l'état local en thermodynamique.
- Sur le plan des applications c'est la prise de conscience de la nécessité d'assurer une plus grande sécurité et une plus grande économie dans la construction des ensembles mécaniques plus sophistiqués. C'est aussi la possibilité d'utiliser des ordinateurs plus rapides pour résoudre numériquement les problèmes non linéaires.
- Sur le plan des propriétés microscopiques c'est la théorie des dislocations et l'invention des microscopes électroniques.
- Sur le plan macroscopique phénoménologique c'est la technique d'identification des modèles mathématiques d'après des résultats expérimentaux.
- Sur le plan théorique ce sont les développements de l'analyse fonctionnelle et des formulations variationnelles.
- Sur le plan expérimental, enfin, c'est bien sûr l'apport de l'électronique et de la micro-informatique dans les machines d'essais et les chaînes de mesures.

— Sur le contenu : pour bien marquer cette idée de transfert et dans un esprit pédagogique pour l'enseignement des jeunes et la formation continue des « moins jeunes » l'ouvrage comprend deux chapitres (1 et 2) qui rappellent les connaissances de base nécessaires à la compréhension de l'ensemble, un chapitre (3) de synthèse des différents comportements des matériaux, et cinq chapitres (4 à 8) qui constituent l'apport original sur chacune des grandes classes de comportement.

• Le premier chapitre est consacré aux MÉCANISMES PHYSIQUES de déformation et de rupture des métaux et alliages, des polymères, des bétons et des bois. La description sommaire des principaux mécanismes est orientée vers la justification physique des hypothèses utilisées dans la modélisation macroscopique.

• Le deuxième chapitre présente des rappels de MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS et de THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRREVERSIBLES qui constituent les outils théoriques utilisés dans les autres chapitres.

• Le troisième chapitre présente une CLASSIFICATION des comportements schématiques des solides fondée sur l'expérimentation et l'identification dont les principales méthodes sont décrites.

• Avec le quatrième chapitre débute la modélisation des différents comportements. Tous les chapitres qui suivent sont construits sur le même plan : Domaine de validité pour bien délimiter les conditions d'utilisation des modèles, Aspects phénoménologiques de l'acquis expérimental, Formulation générale fondée sur la thermodynamique, Détermination et identification de modèles particuliers avec des exemples de matériaux courants, Eléments succincts sur les calculs de structures associés. Dans cet esprit, le quatrième chapitre présente l'ÉLASTICITÉ, la THERMOÉLASTICITÉ et la VISCOÉLASTICITÉ LINÉAIRES.

• Le cinquième chapitre est consacré à la PLASTICITÉ. La plasticité isotrope classique est formulée à partir du potentiel de dissipation associé au critère d'écoulement. On insiste surtout sur la plasticité à écrouissage anisotrope qui permet de rendre compte des comportements cycliques si importants pour la prévision de la rupture par fatigue.

• Le sixième chapitre traite des mêmes questions mais cette fois appliquées aux métaux et alliages sollicités aux températures moyennes et élevées qui engendrent des phénomènes de viscosité : la VISCOPLASTICITÉ.

• Le septième chapitre aborde la rupture de l'élément de volume par la THÉORIE MÉCANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT CONTINU. Différents modèles sont établis pour rendre compte et prévoir la rupture ductile, la rupture par fluage et la rupture par fatigue.

• Le huitième chapitre (rassurez-vous c'est le dernier !) traite des solides fissurés. La MÉCANIQUE DE LA RUPTURE PAR FISSURATION est abordée par la méthode énergétique qui introduit logiquement la notion de taux de restitution d'énergie. Cette variable, associée aux facteurs d'intensité

des contraintes, est utilisée pour établir des modèles de rupture par instabilité, de rupture ductile et des modèles de croissance de fissures par fatigue.

L'ensemble constitue donc un ouvrage complet de mécanique des matériaux, mais forcément concis. Pour des études plus approfondies, on pourra se reporter à la bibliographie des principaux ouvrages récents donnée à la fin de chaque chapitre. Ce livre s'adresse donc à vous cher lecteur qui possédez de bonnes connaissances de base en mécanique des milieux continus ou en résistance des matériaux et qui souhaitez vous former pour introduire plus de physique dans la conception, assistée ou non par ordinateur, dans la mise en forme des produits ou dans les calculs de sécurité des constructions.

Là encore il s'agit d'une position charnière entre l'enseignement au niveau des années de spécialisation des écoles d'ingénieurs, des maîtrises et des troisièmes cycles des universités, et l'enseignement dans l'exercice de la profession d'ingénieur de recherche, d'ingénieur d'études ou d'ingénieur d'essais. Pour faciliter l'utilisation du livre en tant que manuel, chaque chapitre est rédigé en vue d'une lecture autonome ; de ce fait certaines redites sur l'ensemble n'ont pu être évitées. De même, les calculs étant effectués en notations intrinsèques pour la plupart, les résultats principaux sont aussi exprimés en notations indicielles.

Le lecteur avisé a d'ores et déjà compris que le domaine couvert par ce livre est très vaste et que, pour ce faire, les auteurs ont largement puisé dans leur environnement humain particulièrement favorable à la Division Résistance-Fatigue de la Direction des Structures de l'O.N.E.R.A., créée à l'initiative du Pr. R. Mazet, et au Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan (E.N.S.E.T./Université Paris 6/C.N.R.S.). Nombre de mises au point résultent également de préparations d'enseignements à l'Université Paris 6 (3e Cycle de Mécanique Appliquée à la Construction), à l'E.N.S.E.T., à l'Ecole Polytechnique Féminine, à l'Ecole Centrale, et à divers stages de formation continue, écoles d'été et Universités étrangères. Que tous ceux qui ont participé à de nombreuses et fructueuses discussions soient ici publiquement remerciés.

La caution du groupement (G.R.E.C.O.) C.N.R.S. « Grandes Déformations et Endommagement » a été obtenue à la suite de la relecture critique de chaque chapitre par des spécialistes : A. Pineau, F. Sidoroff, A. Zaoui, M. Predeleanu, G. Duvaut, D. Marquis, G. Touzot, C. Oytana, K. Dang Van, D. François, H. D. Bui, R. Labourdette et d'une relecture d'ensemble par P. Muller.

Les auteurs souhaitent souligner l'intérêt d'une telle méthode. Merci à tous pour vos conseils. Merci également à G. Combourieux pour la préparation des figures et à toi Marie-Christine Senechal pour ta patience dans l'exercice périlleux de la lecture des manuscrits en vue d'une frappe propre et claire.

J. Lemaitre — J. L. Chaboche
Printemps 1979 — Automne 1984

NOTATIONS

OPÉRATEURS

Opérateur	Signification	Opérateur	Signification
X	Scalaire	X_{II}	Deuxième invariant de $\mathbf{X}$: $X_{II} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{X}^2)$
$\vec{x}$	Vecteur de composantes X_i		
$\mathbf{X}$	Tenseur du second ordre, de composantes X_{ij}	X_{III}	Troisième invariant de $\mathbf{X}$: $X_{III} = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mathbf{X}^3)$
$\hat{X}$	Quantité virtuelle		
$[X]$	Matrice	$\mathbf{X}'$	Déviateur de $\mathbf{X}$: $\mathbf{X}' = \mathbf{X} - \frac{1}{3} X_I \mathbf{1}$
$\{X\}$	Colonne		
$\dot{X}$	Dérivée temporelle de $X\left(=\frac{dX}{dt}\right)$	J_1	$J_1(\mathbf{X}) = X_I$
$\mathbf{X}^T$	Transposée de $\mathbf{X}$	J_2	$J_2(\mathbf{X}) = (3\,X'_{II})^{1/2}$
X^+	Transformée de Laplace-Carson	J_3	$J_3(\mathbf{X}) = \left(\frac{27}{2} X'_{III}\right)^{1/3}$
$X \otimes Y$	Produit de convolution de X par Y	$H(x)$	$H(x) = 1$ si $x \geqslant 0$, $H(x) = 0$ si $x < 0$
Re X	Partie réelle de X	δ	Symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$
Im X	Partie imaginaire de X		
f, g	Fonctions non identifiées	X_M	Valeur maximale de X
$\mathscr{F}$	Fonctionnelle non identifiée	X_m	Valeur minimale de X
Sgn (x)	Signe + ou − du scalaire x	$\overline{X}$	Valeur moyenne de X
$\langle x \rangle$	$\langle x \rangle = x$ si $x > 0$, $\langle x \rangle = 0$ si $x < 0$	ΔX	Amplitude crête-crête de X
$\mathbf{X} : \mathbf{Y}$	Double produit contracté de $\mathbf{X}$ par $\mathbf{Y}$		
X_I	Premier invariant de $\mathbf{X}$: $X_I = \mathrm{Tr}(\mathbf{X})$		

LISTE DES SYMBOLES EMPLOYÉS COMME COEFFICIENTS DÉFINIS A CHAQUE UTILISATION

a	c	e	k	M	Q	S	α	η	ν
A	C	F	K	n	r	v	β	θ	τ
b	d	G	L	N	R	V	γ	λ	
B	D	H	m	P	s	w	δ	μ	

La modélisation est la gangrène des notations : les auteurs n'ont malheureusement pas pu éviter d'utiliser plusieurs fois chacune de ces lettres pour désigner des quantités différentes.

SYMBOLES

Symbole	Signification
a	Longueur de fissure
$\mathbf{a}$	Tenseur des raideurs élastiques
A_{II}	Amplitude de cisaillement octaédral
A_k	Variable thermodynamique associée
$\mathbf{A}$	Tenseur des souplesses élastiques
$\vec{b}$	Vecteur de Burgers
c	Chaleur spécifique
C^*	Intégrale de contour
D	Endommagement
D_c	Endommagement critique
D_u	Ductilité
e	Energie interne spécifique
E	Energie interne
E	Module d'élasticité d'Young
$\mathbf{E}$	Tenseur transformation élastique
f	Fonction critère de plasticité
$\vec{f}$	Densité de force
f	Coefficient de frottement de Coulomb
$\vec{F}$	Vecteur force
g	Fonction d'écrouissage
$\vec{g}$	Vecteur $\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}\ T$
G	Module de cisaillement élastique
G	Taux de restitution d'énergie
G_s	Taux de restitution d'énergie seuil
G_r	Taux de restitution d'énergie réduit
G_c	Taux de restitution d'énergie critique
h	Module d'écrouissage
ΔH	Energie d'activation
I	Intégrale de Bui
J	Fonction fluage visco-élastique
J	Intégrale de Rice
K	Energie cinétique
K	Module de compression élastique
K, K_I	Facteurs d'intensité de contraintes
K_{IC}	Ténacité
L	Longueur de référence
L_p	Longueur utile d'une éprouvette

Symbole	Signification
$\bar{m}$	Coefficient de frottement de couche limite
M	Point matériel
$\vec{n}$	Vecteur normal
N_R	Nombre de cycles à rupture
N_F	Nombre de cycles à rupture en fatigue pure
p	Déformation plastique cumulée
p_R	Déformation plastique cumulée à rupture
P	Puissance
$\mathbf{P}$	Tenseur transformation anélastique
$\{q\}$	Colonne des degrés de liberté
$\vec{q}$	Vecteur courant de chaleur
Q	Taux de chaleur reçue
$\{Q\}$	Colonne des forces nodales
$\mathbf{Q}$	Tenseur d'endommagement réduit
q, Q	Variables de mémoire de l'écrouissage
r	Densité volumique de production de chaleur
r_Y	Dimension de zone plastique
R	Raideur
R	Fonction relaxation de visco-élasticité
R	Résistance à la déchirure ductile
R	Variable d'écrouissage isotrope
s	Entropie spécifique
$\vec{s}$	Vecteur unitaire
S	Entropie
S	Section d'éprouvette
$\mathbf{S}$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 1
$\mathbf{S}^*$	Tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff 2
t	Temps
t_R	Temps à rupture
$\vec{t}$	Vecteur unitaire
T	Température absolue
T_M	Température de fusion
$\vec{T}$	Vecteur de contrainte
u	Déplacement unidimensionnel
u_e	Déplacement élastique

Symbole	Signification
u_p	Déplacement plastique
$\vec{u}$	Vecteur déplacement
$\vec{v}$	Vecteur vitesse
V	Volume
V_k	Variable interne
$\mathcal{V}$	Energie potentielle
w	Densité d'énergie de déformation
w_e	Densité d'énergie élastique
w_p	Densité d'énergie plastique
W	Energie de déformation
W^*	Energie complémentaire
$\mathbf{X}$	Tenseur variable d'écrouissage cinématique
Y	Taux de restitution d'énergie élastique
z	Variable complexe
Z	Fonction d'Airy
α	Phase d'un métal
α	Coefficient de dilatation
$\boldsymbol{\alpha}$	Variable d'écrouissage cinématique
γ	Phase d'un métal
γ	Densité d'énergie de décohésion
$\vec{\gamma}$	Vecteur accélération
Γ	Front de fissure
$\boldsymbol{\Gamma}$	Tenseur des contraintes couples
δ	Déplacement d'ouverture de fissure COD
$\boldsymbol{\Delta}$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange
ε	Déformation uniaxiale
ε_c	Déformation vraie
ε_e	Déformation élastique
ε_p	Déformation plastique
ε_R	Déformation à rupture
ε_D	Déformation seuil d'endommagement
ε_H	Déformation hydrostatique
ε_{eq}	Déformation équivalentes de V. Mises
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur des déformations
$\boldsymbol{\varepsilon}'$	Tenseur déviateur des déformations
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tenseur des déformations élastiques
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tenseur des déformations plastiques

Symbole	Signification
η	Exposant de la loi de fissuration de Paris
θ	Température
λ	Coefficient d'élasticité de Lame
λ	Multiplicateur
μ	Coefficient de cisaillement élastique de Lame
ν^*	Coefficient de contraction
ν	Coefficient de contraction de Poisson
ξ	Variable mémoire d'écrouissage
ρ	Masse volumique
ρ_D	Densité de dislocations
ρ	Longueur de zone plastique
ρ	Résistivité électrique
σ	Contrainte uniaxiale
σ_v	Contrainte vraie
σ_s	Contrainte seuil de plasticité
σ_Y	Contrainte limite d'élasticité
σ_u	Contrainte ultime de rupture
σ_H	Contrainte hydrostatique
σ_{eq}	Contrainte équivalente de V. Mises
$\tilde{\sigma}$	Contrainte effective
σ^*	Contrainte équivalente d'endommagement
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes
$\boldsymbol{\sigma}'$	Tenseur déviateur des contraintes
σ_{ij}	Composantes de $\boldsymbol{\sigma}$
σ_i	Composantes principales de $\boldsymbol{\sigma}$
τ	Temps
τ	Contrainte de cisaillement
τ_Y	Contrainte limite d'élasticité en cisaillement
τ_R	Contrainte limite de rupture en cisaillement
φ	Potentiel de dissipation
φ^*	Potentiel dual
Φ	Puissance spécifique de dissipation
χ	Contrainte équivalente de fluage
Ψ	Energie libre spécifique
Ω	Potentiel de dissipation visco-plastique
$\boldsymbol{\Omega}$	Tenseur des taux de rotation
$\boldsymbol{\Omega}$	Tenseur de réduction d'aire par endommagement

Chapitre 1

ÉLÉMENTS SUR LES MÉCANISMES PHYSIQUES DE DÉFORMATION ET DE RUPTURE

« Lorsqu'un théoricien trouve un résultat nouveau personne n'y croit, sauf lui ! lorsqu'un expérimentateur trouve un résultat nouveau tout le monde y croit, sauf lui ! »

Ce premier chapitre est destiné à donner aux non-spécialistes de physique et de métallurgie une idée schématique de la structure et des mécanismes de déformations et de rupture des principaux matériaux utilisés en constructions courantes. Il s'agit donc d'un résumé succinct de connaissances classiques que l'on trouve dans les ouvrages spécialisés dont les principaux sont indiqués en références bibliographiques. La connaissance de ces mécanismes physiques élémentaires est nécessaire pour la formulation des hypothèses sur lesquelles reposent les théories phénoménologiques macroscopiques de déformation et de rupture. Ces théories, exposées dans les chapitres 4 à 8 doivent en effet intégrer au niveau de modèles homogénéisés continus des phénomènes qui se situent à l'échelle du discontinu : atomes, cristaux, molécules, cellules etc... Pour les métaux c'est l'introduction du concept de dislocation par Taylor et quelques autres en 1934 qui constitue le pas décisif pour l'explication des phénomènes de déformation plastique. D'une manière plus générale, c'est l'invention de la microscopie électronique à transmission et à balayage qui a permis dans les années 1960-70 de comprendre les principaux mécanismes de déformation et de rupture.

Notons toutefois que dans le domaine de la rupture, où pourtant les phénomènes se situent à l'échelle plus grande des assemblages de cristaux ou de molécules, nombre de points restent encore dans l'ombre et que la schématisation qui est donnée dans ce chapitre reste très grossière.

Malgré la grande différence de nature et de structure des matériaux tels que les métaux et alliages, les polymères et composites, les bétons, les bois, paradoxalement, on observe une grande unité dans leurs comportements

macroscopiques. Avec des ordres de grandeurs différents les termes d'élasticité, de viscosité, de déformation plastique ou permanente, de consolidation ou écrouissage, de rupture fragile, de rupture ductile s'appliquent à tous ces matériaux. Eh bien ! C'est ce qui justifie « a priori » l'approche globale de la mécanique des matériaux qui, à l'aide des concepts de mécanique des milieux continus et de thermodynamique du chapitre 2 et de rhéologie du chapitre 3, permet de construire des modèles indépendants dans leurs fondements (mais pas dans leurs formulations analytiques) de la nature des matériaux.

1. MÉTAUX ET ALLIAGES

1.1. Structure

1.1.1. *Eléments de cristallographie*

1.1.1.1. *Atomes*

Les métaux et alliages sont constitués d'assemblages d'atomes liés entre eux par des forces électromagnétiques naissant entre les électrons d'atomes voisins. L'ordre de grandeur du « rayon » d'un atome est de 10^{-7} à 10^{-6} mm (1 à 10 Å).

Les arrangements stables sont déterminés par une condition de minimum de l'énergie de l'assemblage, fonction de l'activation thermique. Les liaisons des arrangements métalliques correspondent à une mise en commun d'électrons des couches externes des atomes.

Les métaux et alliages se présentent normalement à l'état d'assemblages de cristaux. L'état amorphe n'est obtenu qu'au prix de procédures complexes qui nécessitent des refroidissements ultra-rapides.

1.1.1.2. *Monocristaux*

L'état cristallin est caractérisé par la régularité de l'arrangement : un motif élémentaire parallélépipédique ou maille, se répète périodiquement dans les trois directions.

La plupart des mailles métalliques correspondent à l'un des trois systèmes suivants :

— cristal cubique centré (C.C.) (Fig. 1)

Exemples : Feα, Cr, Mo

— cristal cubique à faces centrées (C.F.C.) (Fig. 2)

Exemples : Cu, Ag, Al, Ni

— cristal hexagonal compact (H.C.) (Fig. 3)

Exemples : Mg, Zn, Tiα, Coα

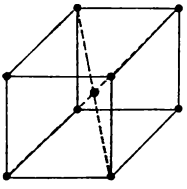


Fig. 1. Cristal C.C.

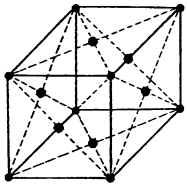


Fig. 2. Cristal C.F.C.

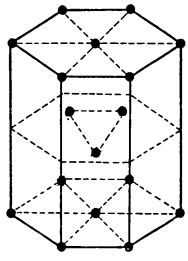


Fig. 3. Cristal H.C.

Ces mailles possèdent des axes et des plans de symétrie qui sont en général des plans de densité maximale d'atomes, offrant une moindre résistance au cisaillement. On les repère conventionnellement par les indices de Miller : le plan à caractériser est repéré par les coordonnées de ses intersections avec les axes d'un repère orthonormé, on prend l'inverse de ces nombres et on réduit le résultat aux trois plus petits entiers ayant le même rapport (fig. 4).

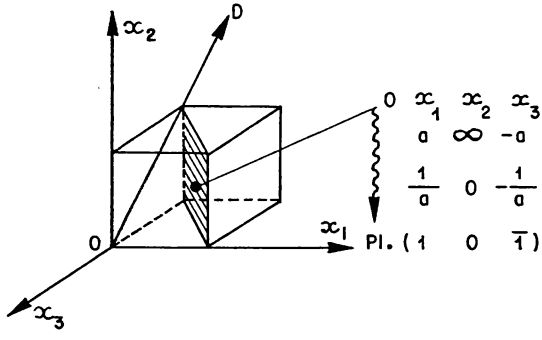


Fig. 4. Indices de Miller.

Une direction cristallographique est caractérisée par une droite issue de l'origine du repère et passant par la position d'un atome. Elle est désignée par les coordonnées de cet atome exprimées en nombre de distances interatomiques. Par exemple, la direction *OD* de la figure 4 est désignée par $\langle 01\bar{1} \rangle$.

La structure des alliages peut être celle de l'un des éléments constitutifs ou bien une structure cristalline différente.

— Dans le cas des solutions solides, il peut y avoir substitution d'un atome de la maille (exemple Al dans Fe) ou insertion d'atomes de faible « volume » dans le réseau du solvant (exemple *C* dans Fe pour l'austénite (fig. 5)).

— Les métaux peuvent se présenter sous différentes formes ou phases, suivant le niveau de température. Les phases les plus courantes dans les aciers sont les phases γ et α (respectivement C.F.C. pour l'austénite et C.C. pour la

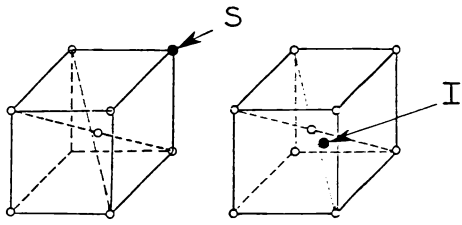


Fig. 5. Solution solide de substitution (*S*) ou d'insertion (*I*).

ferrite du système fer-carbone). Des phases secondaires stables ou instables peuvent exister, phases β, δ, ε, σ et l'on distingue aussi, pour une même phase, les cas où les atomes de substitution se présentent de façon désordonnée (exemple phase γ) ou de façon ordonnée (exemple phase γ').

1.1.1.3. *Polycristaux*

Les métaux et alliages sont généralement obtenus à l'état liquide, la structure se forme par solidification lors du refroidissement. La température du liquide diminuant, les distances interatomiques décroissent ; la distance critique, pour laquelle des liaisons s'établissent, est atteinte en quelques points répartis au hasard qui constituent les premiers germes de croissance des cristaux. Des mailles se forment dans un même système cristallin mais avec des directions réparties au hasard. Chaque germe donne lieu à un cristal dont la croissance est limitée par les cristaux voisins. L'ensemble des monocristaux orientés au hasard est un polycristal. La taille des monocristaux dans les polycristaux varie de quelques microns (10^{-3} mm) à quelques millimètres suivant la nature des éléments constitutifs du métal et les traitements thermiques et mécaniques qu'ils ont subis (fig. 6). On comprend ainsi qu'un polycristal formé de nombreux monocristaux, anisotropes par essence, puisse souvent être considéré comme macroscopiquement isotrope c'est-à-dire sans directions privilégiées pour les propriétés considérées.

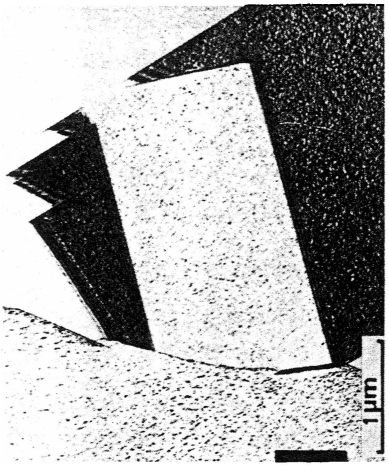
1.1.2. *Défauts cristallins*

Le schéma du cristal parfait tel qu'il vient d'être décrit ne peut rendre compte que des déformations élastiques et de la rupture dite fragile dans laquelle la décohésion intervient sans déformation macroscopique appréciable. Les déformations plastiques et la rupture ductile ne s'expliquent que par la présence de défauts qui viennent perturber le réseau cristallin.

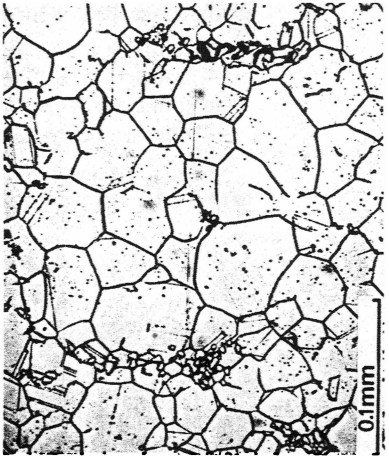
1.1.2.1. *Défauts ponctuels et surfaciques*

Les défauts ponctuels atomiques sont constitués par les atomes de substitution ou d'insertion des solutions solides et par les lacunes (nœuds de la maille où il manque des atomes). Ils provoquent une distorsion locale du réseau.

a)



c)



b)

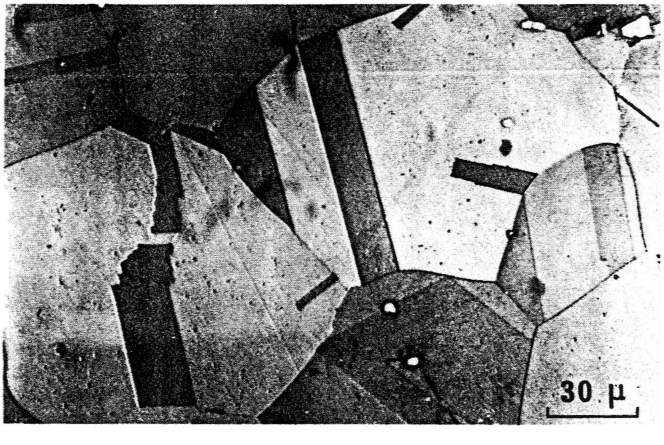


Fig. 6. Exemples de cristaux (d'après A. Pineau).

(*a*) Alliage base Nickel Inconel 718. Microscopie électronique par transmission.

(*b*) Alliage Nickel Waspaloy. Microscopie optique.

(*c*) Alliage base Nickel Inconel 718. Microscopie optique.

Les défauts surfaciques sont les surfaces de séparation entre cristaux ou parties de cristaux différents par les orientations ou la nature des phases. Leur épaisseur est de l'ordre de 4 à 5 « diamètres » atomiques :

— joints de grains (ou de cristaux) dans les polycristaux,
— boucles et cellules de dislocations,
— joints de mâcles,
— interfaces entre deux phases.

Les défauts de cohésion constitués par des surfaces de séparation de la matière qui engendrent la rupture sont les micro-fissures et les cavités.

1.1.2.2. *Dislocations (défauts linéiques)*

Ce sont les défauts principalement responsables de la plasticité des métaux. Une ligne de dislocation est un défaut d'empilement d'atomes se répétant périodiquement, qui représente l'état d'équilibre d'atomes possédant des champs électro-magnétiques légèrement différents. On peut en donner une représentation schématique dans le cas du cristal cubique simple.

— *Dislocation coin* ou défaut fictivement créé par la translation de la partie supérieure du cristal (fig. 7).

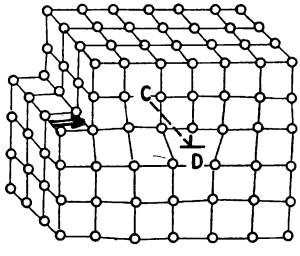


Fig. 7. Dislocation coin de ligne *DC*.

— *Dislocation vis* ou défaut fictivement créé par une rotation locale de la partie supérieure du cristal (fig. 8).

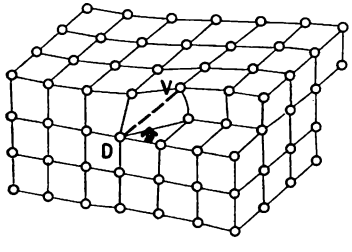


Fig. 8. Dislocation vis de ligne *DV*.

— *Boucle de dislocation* ou ligne qui, par exemple, rejoint une dislocation coin pure à une dislocation vis pure (fig. 9).

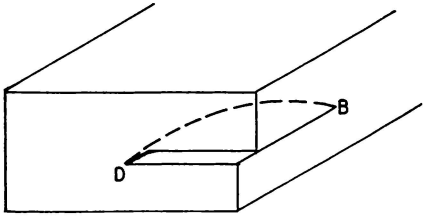


Fig. 9. Boucle de dislocation de ligne *BD*.

Les dislocations se créent dès la formation des cristaux ; leur densité, très élevée dans la plupart des métaux et alliages varie de 10 km/cm^3 pour les cristaux bien recuits à 10^7 km/cm^3 pour les échantillons très écrouis. La figure 10 donne une image d'une configuration de dislocation obtenue par microscopie électronique à balayage.

Des traitements thermiques prolongés favorisent l'organisation des dislocations en cellules tridimensionnelles quasi régulières formées de facettes et de nœuds : les réseaux de Frank.

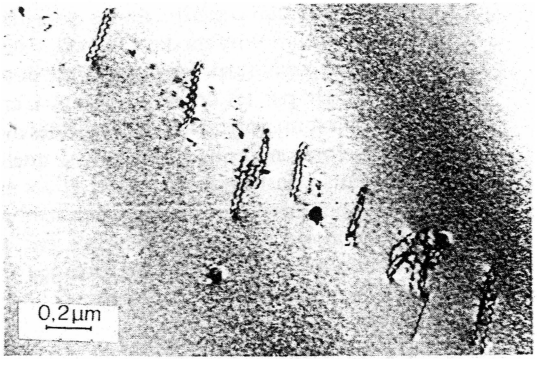


Fig. 10. Dislocations dans un acier inoxydable. Fe 20 Cr-Ni-Al durci par précipitation de la phase ordonnée Ni-Al (d'après A. Pineau).

- *Vecteur de Burgers*

On peut caractériser une dislocation par le vecteur « défaut de fermeture » d'un contour entourant la ligne de dislocation.

Considérons un cristal cubique simple parfait et le même cristal avec une dislocation coin de trace *L* (fig. 11). Dans ce dernier, considérons un contour fermé *ABCD* entourant le point *L* dans le sens direct par rapport à un repère orthonormé. Dans le cristal parfait reproduisons ce circuit en comptant le même nombre de distances interatomiques : *A'B'C'D'E'*. Pour fermer ce contour il faut ajouter le vecteur $\overrightarrow{E'A'}$ qui par définition est le vecteur de Burgers $\vec{b}$.

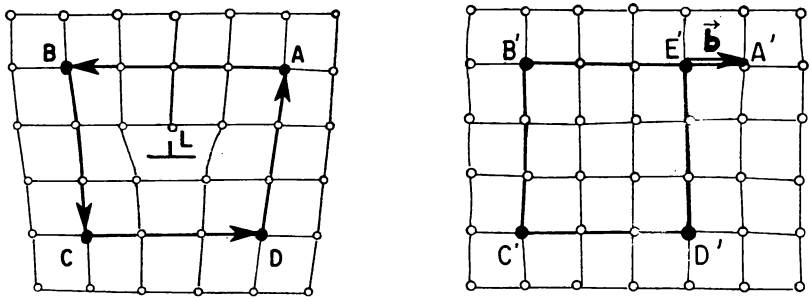


Fig. 11. Vecteur de Burgers.

Les propriétés du vecteur de Burgers sont les suivantes :

— il est indépendant du contour ;

— son module définit la translation fictive nécessaire pour créer la dislocation ;

— il est identique sur toute la ligne de dislocation ;

— $\vec{t}$ étant le vecteur unitaire de la ligne de dislocation :

. si $\vec{t}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires, la dislocation est une dislocation coin ;

. si $\vec{t}$ et $\vec{b}$ sont parallèles la dislocation est une dislocation vis ;

. si $\vec{t}$ et $\vec{b}$ font un angle quelconque, la dislocation est mixte.

— Le vecteur de fermeture d'un contour entourant plusieurs dislocations est la somme des vecteurs de Burgers de ces dislocations.

• *Energie associée aux dislocations*

En considérant que les dislocations engendrent des distorsions purement élastiques du réseau et en assimilant le voisinage d'une dislocation à un milieu continu élastique linéaire, on peut calculer l'énergie élastique w_e stockée dans la matière sous forme de contraintes et déformations internes. Pour une dislocation coin ou vis (fig. 12) dont le module du vecteur de Burgers est b et de longueur unité, dans un milieu de module de cisaillement μ, on trouve que cette énergie est de l'ordre de :

$$w_e = \mu b^2 \text{ J/m} .$$

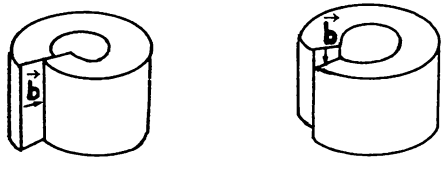


Fig. 12. Energie associée aux dislocations.

De même, on peut calculer la force fictive $\vec{F}_D$ exercée sur une dislocation de vecteur unitaire $\vec{t}$ et de vecteur de Burgers $\vec{b}$ par un champ de contrainte uniforme de tenseur σ : c'est la relation de Peach et Koehler :

$$\vec{F}_D = (\sigma.\vec{b}) \wedge \vec{t}.$$

1.2. Mécanismes physiques de déformation

1.2.1. *Déformation élastique*

Les déformations élastiques se situent au niveau atomique, l'effet macroscopique constaté, est le résultat des variations des espaces interatomiques nécessaires pour équilibrer les sollicitations extérieures: ainsi que de mouvements réversibles de dislocations. Ces modifications géométriques sont essentiellement réversibles. Dans une déformation élastique pure, la configuration initiale des atomes est retrouvée après cessation de la sollicitation.

1.2.2. *Déformations permanentes*

Les déformations permanentes plastiques ou viscoplastiques se situent au niveau cristallin et se superposent aux déformations élastiques, elles correspondent à des déplacements relatifs d'atomes, stables après cessation de la sollicitation. Suivant les cas ces déformations sont purement intragranulaires (intérieurs aux grains) ou font intervenir des déplacements intergranulaires. Le rapport, déformation aux joints/déformation des grains, reste faible mais il augmente généralement avec la température et lorsque la vitesse diminue.

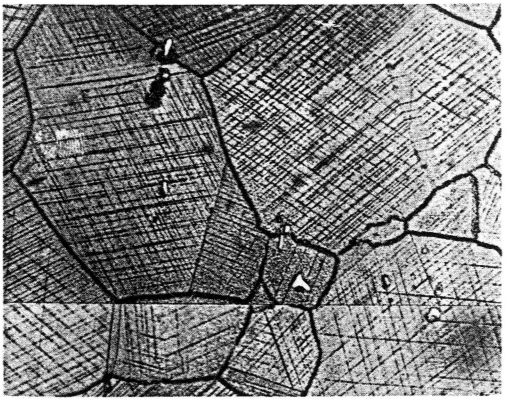
1.2.2.1. *Déformation par glissements et mâclage*

Les plans de symétrie des mailles, qui sont aussi les plans réticulaires les plus denses en atomes, correspondent aux distances les plus grandes entre plans parallèles. Ce sont donc dans ces plans que des glissements par cisaillement peuvent se produire dans la direction de la contrainte tangentielle maximale.

Exemples : plans (1.1.1) dans les cristaux C.F.C., plans (1.1.0) et (1.1.2) dans les cristaux C.C.C. Ils prennent la forme de « bandes de glissements » parallèles, provoquant des marches sur la surface extérieure des échantillons (fig. 13*a*), ou bien de « mâcles » qui sont des glissements symétriques par rapport à un plan (fig. 13*b*).

Le mâclage est plutôt caractéristique des déformations aux températures ambiantes et moyennes. On l'observe dans les cristaux C.C. et H.C. concurremment avec des glissements, mais aussi dans des cristaux C.F.C. à faible énergie de faute d'empilement. Ces défauts, glissements et mâclage, constituent des déformations hétérogènes à l'échelle du cristal mais que l'on peut considérer comme homogènes à l'échelle macroscopique.

a)



b)

Fig. 13. (*a*) Bandes de glissement dans l'alliage base Nickel Waspaloy (d'après A. Pineau). (*b*) Mâcles de déformation dans le Zinc (d'après A. Pineau).

1.2.2.2. *Déformation par mouvements de dislocations*

La présence de dislocations réduit considérablement la stabilité du réseau cristallin. Leur mobilité est la cause essentielle des déformations permanentes, homogènes à l'échelle macroscopique.

Déplacement par glissement : lorsque, sous l'action d'une sollicitation extérieure, une dislocation coin ou vis se déplace et traverse un cristal, elle engendre un déplacement irréversible de vecteur égal au vecteur de Burgers. La figure 14 en donne le schéma pour une dislocation coin dans un cristal cubique soumis à une contrainte tangentielle σ_{12}. On appelle plan de glissement le plan défini par le vecteur unitaire $\vec{t}$ de la dislocation et le vecteur de Burgers $\vec{b}$.

Ce mécanisme de déplacement n'exige la rupture de liaisons qu'au voisinage de la ligne de dislocation et successivement d'un atome à l'autre. Dans le cas plus complexe d'une boucle de dislocation qui se développe, le plan de la boucle peut dévier dans un autre plan (perpendiculaire par exemple) à partir

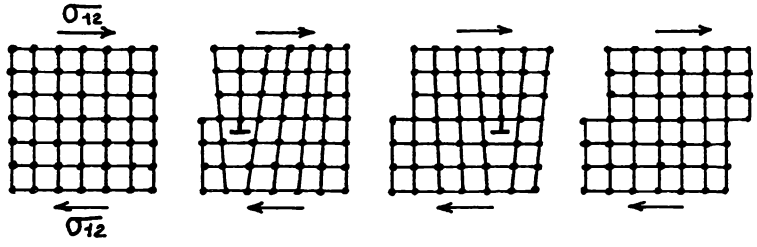


Fig. 14. Déplacement par glissement d'une dislocation.

de son point « vis pure » pour éviter un obstacle (une impureté par exemple) ; c'est le glissement dévié.

Déplacement par montée : une dislocation coin peut se déplacer perpendiculairement à son plan de glissement avec transport de matière. Une lacune étant proche d'une ligne de dislocation, une distorsion du réseau engendrée par une sollicitation extérieure peut provoquer le saut d'un atome du demi-plan supplémentaire sur le site cristallin inoccupé et la permutation de toute la rangée d'atomes. Selon ce mécanisme, la dislocation a « monté » d'un espace interatomique (fig. 15) :

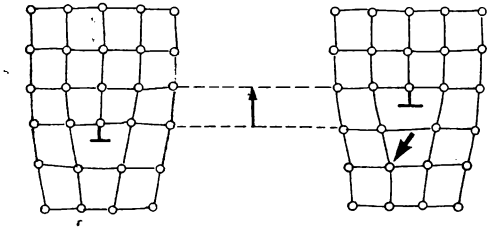


Fig. 15. Déplacement par montée d'une dislocation.

Ce mécanisme de déplacement lié à la diffusion des lacunes ou d'atomes étrangers est favorisé par l'activation thermique ; il intervient donc plutôt aux températures élevées ($T > \frac{1}{3} T_M$, T_M étant la température de fusion).

La vitesse de déplacement des dislocations par glissement ou par montée peut être très faible ou très élevée selon la contrainte appliquée mais elle ne dépasse jamais la vitesse du son dans le milieu considéré.

1.2.2.3. *Sources de dislocations*

Les mouvements des dislocations créent les déformations permanentes ; inversement, les grandes déformations plastiques accroissent la densité des dislocations qui, à son tour, augmente les blocages et contribue au durcissement par écrouissage. Le mécanisme de création des dislocations le plus important est le mécanisme de Frank et Read. Considérons un segment de

dislocation ancré en A et B, points d'intersection avec d'autres dislocations ou impuretés (fig. 16), de vecteurs de Burgers $\vec{b}$ normal à AB et sollicité par une contrainte tangentielle σ_{12} de même sens et direction que $\vec{b}$.

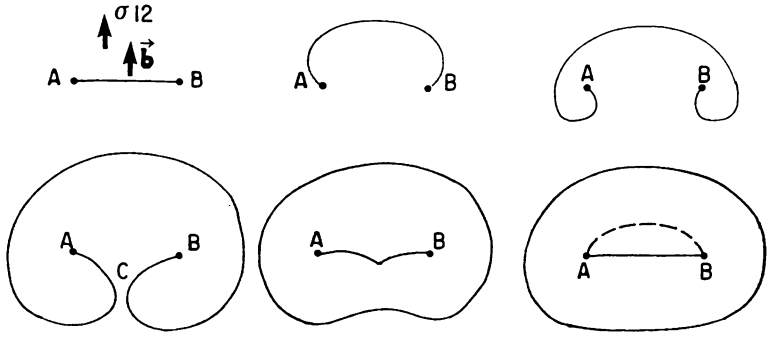


Fig. 16. Source de dislocation par le mécanisme de Franck et Read.

La sollicitation oblige la dislocation à se déplacer jusqu'à entourer les points A et B. Lorsque les deux branches se rejoignent en C, en ce point elles ont même vecteur de Burgers mais des vecteurs unitaires opposés. Elles s'attirent et se recombinent pour donner naissance à une grande boucle et un nouveau segment AB qui peut à son tour générer une autre boucle et ainsi de suite...

1.2.3. *Limite d'élasticité*

On peut calculer aisément la limite d'élasticité d'un empilement parfait d'atomes en supposant que la contrainte de cisaillement nécessaire pour faire glisser dans un plan un ensemble d'atomes sur un autre est une fonction sinusoïdale de période la distance interatomique (hypothèse de Frenkel). En écrivant qu'au voisinage de la position d'équilibre cette contrainte tangentielle est reliée linéairement à la déformation correspondante par l'intermédiaire du module de cisaillement μ, on trouve que le maximum τ_Y de cette contrainte qui correspond à la limite de réversibilité du mouvement est :

$$\tau_Y = \frac{\mu}{2\pi}.$$

Cette valeur est de l'ordre de 100 fois supérieure aux limites d'élasticité en cisaillement des métaux usuels mais elle est très proche des valeurs observées sur les « wiskers » ou minces filaments constitués par des empilements parfaits d'atomes.

Exemples :

$$\text{Limite d'élasticité théorique} \left\{ \begin{matrix} \text{fer pur} \\ \text{whiskers} \\ \text{de fer} \end{matrix} \right\} \tau_Y = \frac{84\,700}{2\,\pi} = 13\,550 \text{ MPa}$$

$$\text{Limite d'élasticité mesurée} \begin{cases} \text{fer pur} & \tau_Y = 28 \text{ MPa} \\ \text{whiskers} & \tau_Y = 11\,000 \text{ MPa} \\ \text{de fer} \end{cases}$$

La limite d'élasticité d'un monocristal réel est très difficile à évaluer car différents mécanismes peuvent intervenir :

— les boucles de dislocations, générées par le mécanisme de Frank-Read, qui émergent à la surface libre des cristaux créent une déformation irréversible. La contrainte tangentielle nécessaire pour activer ce mécanisme est de l'ordre de :

$$\tau_Y = 2\,\mu\,\frac{b}{L} \qquad (L \text{ étant la longueur de la source})$$

valeur bien inférieure aux limites d'élasticité constatées ;

— en fait, à cause des liaisons interatomiques rompues au cœur des dislocations, des forces, appelées forces de Peierls-Nabaro, s'opposent aux glissements et engendrent une limite d'élasticité plus élevée ;

— des décompositions de dislocations conduisent à des blocages qui eux aussi limitent les glissements ;

— les réseaux de Frank présentent une résistance au cisaillement dont l'ordre de grandeur est :

$$\tau_Y = \frac{\mu b}{2\,\pi L} \qquad (L \text{ étant la taille des cellules de Frank}) ;$$

— dans les alliages, les solutions solides ou les précipités contribuent à augmenter la résistance au mouvement des dislocations.

Plusieurs de ces mécanismes peuvent intervenir simultanément pour donner les valeurs de limites d'élasticité mesurées macroscopiquement. Dans le cas des polycristaux, la désorientation entre les cristaux, et les joints de grains, gênent la progression de la déformation irréversible. Aux mécanismes décrits ci-dessus vient donc se superposer un mécanisme de franchissement de joint de grain. En écrivant l'équilibre des efforts dus aux dislocations bloquées aux joints de grains avec les efforts appliqués et en considérant que la limite d'élasticité en cisaillement τ_Y est la contrainte de l'empilement d'un cristal qui peut activer une source à une distance r dans le cristal adjacent de taille moyenne d, on aboutit à l'équation de Petch :

$$\tau_Y = \tau_0 + \tau^* \left[\frac{r}{d}\right]^{1/2}.$$

Elle montre que la limite d'élasticité est proportionnelle à la racine carrée de la distance r et inversement proportionnelle à la racine carrée de la dimension moyenne des cristaux d; τ_0 et τ^* sont deux coefficients caractéristiques de chaque métal ou alliage.

1.2.4. *Déformation des polycristaux*

Pour bien cerner les hypothèses de base sur lesquelles repose la modélisation, examinons schématiquement la succession des mécanismes mis en jeu dans la déformation d'un polycristal sollicité par une contrainte extérieure unidimensionnelle croissante (fig. 17) puis décroissante :

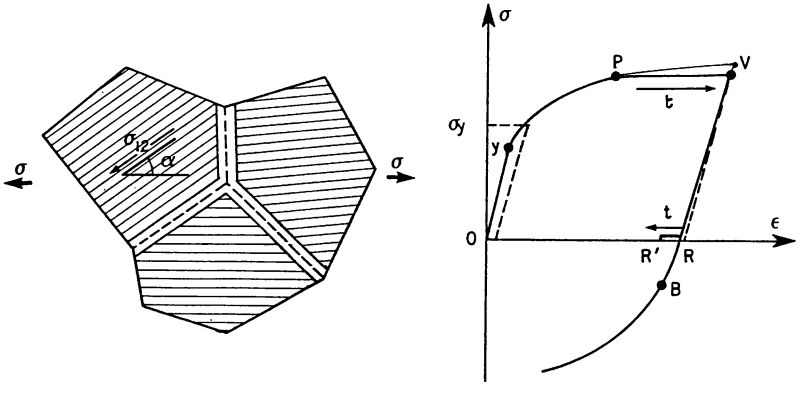


Fig. 17. Déformation d'un polycristal.

Déformation élastique (*OY* sur la figure 17)

Les déformations élastiques sont le résultat des mouvements relatifs réversibles des atomes. Elles sont quasi indépendantes des déformations permanentes sauf en ce qui concerne les microcontraintes résiduelles créées par les glissements cristallins irréversibles et qui font que la déformation élastique macroscopique n'est pas exactement la somme des microdéformations élastiques.

Limite d'élasticité (Point *Y* sur la figure 17)

Elle est caractérisée par l'état de contrainte ou de déformation qui engendre les premiers mouvements irréversibles de dislocations. Comme ils sont difficiles à détecter, on définit une limite d'élasticité conventionnelle σ_Y qui correspond

à une valeur fixée de la déformation permanente : $\varepsilon^p = 0{,}02\,\%$, ou $0{,}05\,\%$ ou $0{,}2\,\%$ selon la précision souhaitée (voir chap. 5).

Déformation plastique (*YP* sur la figure 17)

Les premiers glissements apparaissent dans les cristaux qui possèdent des plans de glissement cristallographiques orientés à $\alpha = \pi/4$ de la direction de la sollicitation σ, là où la contrainte tangentielle σ_{12} est maximale. Les réorientations des cristaux, nécessaires pour assurer la compatibilité des déformations mettent en action d'autres systèmes de glissements et la déformation devient macroscopiquement homogène. Elle est stable, chaque état est un état d'équilibre élastoplastique.

Ecrouissage ou consolidation (*YP* sur la figure 17)

Lorsque la contrainte croît, la densité des dislocations augmente mais le nombre de points de blocage augmente encore plus, si bien que la déformation ne peut progresser que si la sollicitation augmente. La résistance à la déformation croît c'est le phénomène d'écrouissage qui peut aussi être produit par l'existence des microcontraintes intercristallines induites par les incompatibilités de déformations de grains à grains.

Déformation viscoplastique (*PV* sur la figure 17)

Si la contrainte continue à croître, les glissements peuvent traverser et suivre les joints de grains. Ce phénomène de glissement intergranulaire est favorisé par l'activation thermique et est surtout sensible aux températures dépassant le tiers de la température absolue de fusion. Une grande partie de la déformation reste cependant intragranulaire, avec glissement et montée des dislocations. La déformation peut se poursuivre à contrainte constante, la possibilité d'équilibre n'existe plus, il y a écoulement de fluage à une vitesse qui dépend de la contrainte exercée, c'est le domaine de la viscoplasticité.

Restauration ou recouvrance (*RR'* sur la figure 17)

Les modifications dans l'agrégat polycristallin, produites par les déformations, constituent un écart par rapport à l'équilibre thermodynamique qui tend à se réduire lors de sollicitations nulles ou inversées : la concentration des lacunes ou des atomes interstitiels diminue, des dislocations de signe opposé se neutralisent, une recristallisation peut se produire. La restauration s'effectue en fonction du temps et est favorisée par l'activation thermique. Sur le plan macroscopique elle se manifeste soit par une recouvrance partielle de la déformation, soit par une diminution de l'écrouissage. Cette description vaut pour les matériaux microstructuralement stables ce qui est généralement le cas. Toutefois un phénomène de vieillissement mettant en jeu des instabilités de structures ou de composition chimique peut intervenir sur des temps courts ou très longs (vieillissement de certains alliages après traitements thermiques).

Incompressibilité plastique ou viscoplastique

Les glissements ne modifiant pas la structure cristalline, le volume global de l'agrégat reste inchangé. Seules les déformations élastiques engendrent une

variation de volume notable, la variation due à l'augmentation de la densité des dislocations restant toujours très faible. De même, une contrainte normale au plan de glissement, ou un état de contrainte hydrostatique ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) sont sans effets sur les déformations permanentes. Ceci a été bien vérifié expérimentalement jusqu'à des pressions de 30 000 atmosphères (3 000 MPa).

Anisotropie créée par les déformations permanentes

Les déformations permanentes étant hétérogènes d'un cristal à l'autre, la compatibilité des déformations aux joints de grains ne peut être assurée que par des microdéformations élastiques qui subsistent partiellement après cessation de la sollicitation en créant des microcontraintes résiduelles autoéquilibrées. Ces microcontraintes sollicitent les cristaux à l'état neutre et peuvent augmenter ou diminuer la sollicitation extérieure nécessaire pour produire de nouveaux glissements et ce d'une manière différente selon les directions considérées : c'est l'anisotropie engendrée par les déformations permanentes. L'effet Bauschinger qui est l'abaissement de la valeur absolue de la limite d'élasticité en compression consécutive à une traction préalable en est la manifestation la plus simple (point B sur la fig. 17).

1.2.5. *Instabilités microstructurales*

Elles correspondent à une instabilité de l'état métallurgique de la microstructure et se manifestent au cours du temps par des variations de résistance. Elles sont le plus souvent induites par des variations de température (changements de phase, précipitation).

— Les changements de phase et les changements de structure ont lieu généralement lors d'une variation de température : la structure des aciers fait par exemple apparaître des phases δ (cubique centré) à très haute température, des phases γ (cubique face centrée) à haute température et des phases α (cubique centré) à température faible.

— La précipitation (précipités γ' par exemple, dans une phase γ) se produit lors d'une décroissance de température, après dissolution partielle de la phase γ' à la température la plus élevée. La nouvelle génération est extrêmement fine et provoque un durcissement important (meilleure résistance à la déformation) mais elle est instable.

— La croissance des précipités se produit, à température constante, lorsque la microstructure est initialement dans un état instable. C'est un phénomène thermiquement activé. Il se manifeste par une augmentation de résistance dans le domaine où les dislocations ne peuvent franchir les précipités que par cisaillement puis, pour les tailles plus importantes, par une diminution de résistance, lorsque les particules peuvent être contournées par les dislocations.

— Le vieillissement correspond à une instabilité de microstructure se produisant à température constante avec ou sans charge et provoquant le plus souvent une augmentation de résistance (précipitation de carbures, par exemple la précipitation de $M_{23}C_6$ aux joints de grains dans les aciers inoxy-

dables austénitiques). Ce phénomène peut se mettre en évidence (comme le précèdent d'ailleurs) par une mise en température un certain temps avant la réalisation d'un essai d'écrouissage ou de fluage.

1.3. Mécanismes physiques de rupture

Les déformations élastiques et permanentes qui se situent respectivement au niveau des atomes et des plans cristallins respectent la cohésion de la matière. La rupture, par essence, détruit cette cohésion par création de discontinuités surfaciques ou volumiques au sein de la matière. Elle se situe donc à l'échelle plus grande des cristaux : on parlera de microfissures ou de cavités dont la dimension se chiffre en microns ou en centièmes de millimètre, de macrofissures de l'ordre du millimètre et de fissures à l'échelle des structures mécaniques qui se mesurent en centimètres ou décimètres.

Les deux principaux mécanismes élémentaires de rupture locale sont la rupture fragile par clivage, et la rupture ductile mettant en jeu de grandes déformations plastiques locales.

1.3.1. *Rupture fragile*

La rupture dite fragile ne met en jeu que des ruptures de liaisons interatomiques sans déformations plastiques globales appréciables. Ces ruptures interviennent lorsque l'énergie de déformation locale due aux sollicitations extérieures devient égale à l'énergie nécessaire à la décohésion atomique. Les défauts du réseau ou les accidents géométriques qui engendrent toujours des concentrations de contraintes locales jouent un rôle essentiel dans l'amorçage du processus.

La rupture fragile par clivage est une séparation directe dans les plans cristallographiques particuliers (exemple plan (100) pour le fer). Dans un cristal, plusieurs surfaces de clivage parallèles peuvent se développer et se rejoindre perpendiculairement sous forme de « marches » disposées en « rivières ». Aux joints de grains les surfaces de clivage changent de direction pour suivre celle des plans cristallographiques de clivage (fig. 18).

Les cristaux cubiques à faces centrées (C.F.C.) sont peu sujets au clivage, ce sont surtout les cristaux cubiques centrés (C.C.) tels que les aciers à faible teneur en carbone et les cristaux hexagonaux compacts (H.C.) tels que le zinc et le magnésium qui se rompent par clivage.

La rupture intergranulaire est un clivage qui suit les joints de grains. Elle se manifeste sous deux formes :

— la rupture fragile proprement dite qui se produit à basse température quand des éléments d'impuretés ségrégés aux joints de grains diminuent l'énergie de cohésion de ces joints ;

— la rupture intergranulaire par fluage qui s'observe surtout aux températures moyennes et élevées (supérieures au tiers de la température absolue

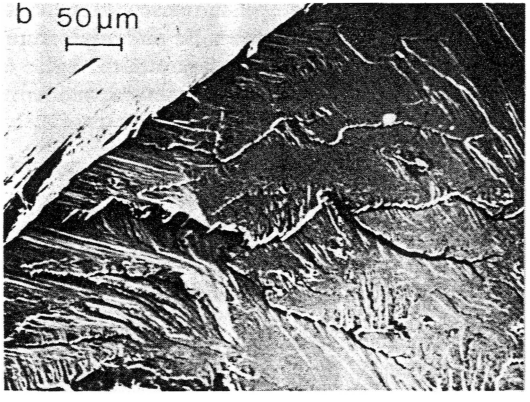
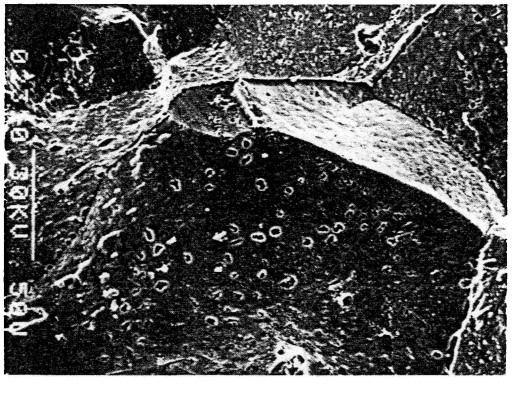
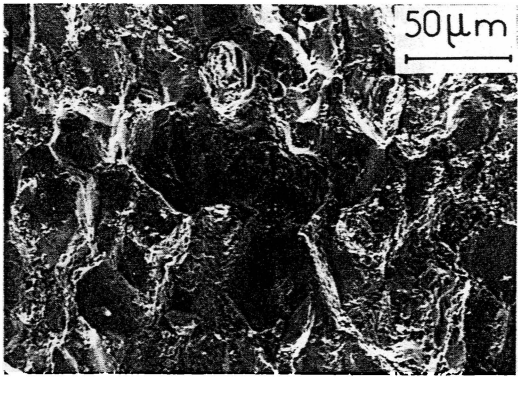


Fig. 18. Rupture fragile par clivage dans un acier faiblement allié, microscopie à balayage (d'après A. Pineau).

a)





b)

Fig. 19. (*a*) Rupture intergranulaire fragile par fluage dans un acier au Cr-Mo (d'après A. Pineau). Les petites cavités sur les joints sont des cavités de fluage.
(*b*) Rupture intergranulaire ductile dans un alliage base nickel inconel 718 (d'après A. Pineau).

de fusion). Elle peut exister avec ou sans déformation viscoplastique globale importante, ce qui justifie le terme « fragile » (fig. 19). Les défauts qui conduisent à ce mode de rupture sont initialement des cavités, qui apparaissent aux joints par accumulation de dislocations, puis croissent en volume et se multiplient, ou des décohésions appelées points triples, créées aux intersections de trois cristaux par suite des glissements intercristallins. Ces décohésions intergranulaires se manifestent au cours du temps, par exemple en fluage à haute température. Lorsque la décohésion s'étend sur plusieurs joints de grains adjacents on peut dire qu'une fissure intercristalline est amorcée.

1.3.2. *Rupture ductile*

La rupture ductile est le résultat de l'instabilité des très grandes déformations locales engendrées au voisinage des défauts cristallins. Selon la densité de ces défauts la déformation macroscopique globale peut être importante ou non, si bien qu'un matériau montrant des faciès de rupture ductile peut présenter un comportement global ductile ou fragile. Les défauts responsables de l'amorçage de la rupture ductile sont :

— les particules d'éléments d'addition dans les alliages,
— les inclusions,
— les précipités de mise en solution par traitements thermiques,
— les empilements de dislocations,
— les joints de grains et principalement les points triples.

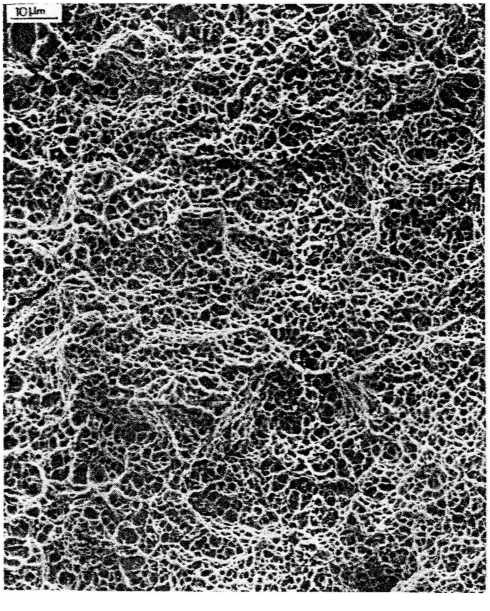


Fig. 20. Rupture ductile transgranulaire dans un Acier 0.30 C-1 Cr-0.25 Mo (d'après A. Pineau).

Au voisinage de ces défauts les sollicitations extérieures créent des concentrations de contraintes qui engendrent de grandes déformations plastiques. La particule ou défaut étranger étant en général moins ductile que la matrice, par effet d'instabilité il y a décohésion à l'interface ou rupture par clivage de la particule créant ainsi l'amorçage d'une microfissure ou cavité.

La croissance de ces cavités s'opère par glissements plastiques avec des déformations locales pouvant largement dépasser 100 % jusqu'au moment où les pédoncules de métal qui séparent les trous se trouvent dans les conditions de l'instabilité par striction. Leur rupture fragile provoque la coalescence des cavités qui conduit à la rupture finale. Souvent la surface de rupture se présente comme une juxtaposition de cupules au fond desquelles se situe un précipité ou une inclusion (fig. 20).

1.3.3. *Rupture par fatigue d'un polycristal*

La rupture d'un élément dans des conditions de service met le plus souvent en jeu différents mécanismes qui interagissent les uns sur les autres. La rupture par fatigue sous sollicitations cycliques en est un exemple qu'il est intéressant de décrire sommairement pour bien distinguer, à des fins de modélisation, les différentes phases. Considérons donc un polycristal soumis à une sollicitation périodique.

Phase d'accommodation (ou nucléation)

Même si le maximum de la sollicitation extérieure est inférieur à la limite d'élasticité usuelle, localement, au voisinage des défauts, les concentrations de contraintes créent des microdéformations plastiques cycliques qui bloquent certains glissements par multiplication des nœuds de dislocations. Ce mécanisme dissipatif crée des élévations locales de température qui à leur tour favorisent la relaxation des microcontraintes. Selon l'importance relative de ces deux processus d'écrouissage et de relaxation il y a durcissement ou adoucissement du matériau. Au cours de cette phase il peut y avoir formation de bandes de glissement provoquant des marches sur la surface de l'échantillon.

Phase d'amorçage des microfissures (stade I)

L'amorçage des microfissures de fatigue est difficile à mettre en évidence et à étudier. Suivant le matériau et le niveau de sollicitation divers mécanismes peuvent intervenir :

— montée des dislocations s'accompagnant de formations de lacunes,

— formation de bandes de glissement persistantes et décohésion souvent à la surface de l'échantillon,

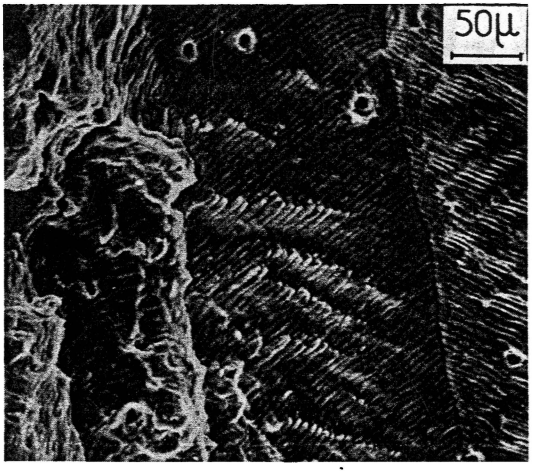
— mécanismes d'intrusion-extrusion.

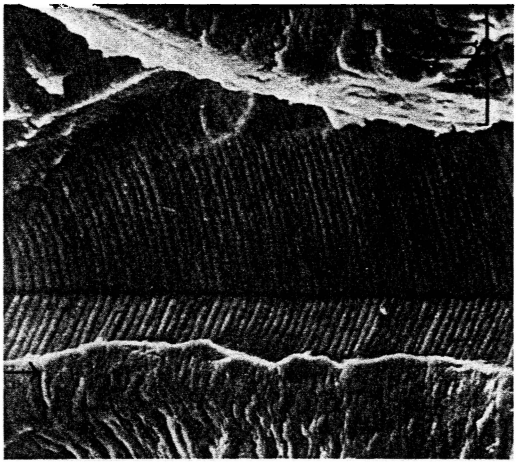
Au cours de cette phase d'amorçage les défauts suivent le plus souvent des plans orientés à 45° de la direction de la contrainte principale maximale. Leur apparition peut être accélérée par un environnement agressif (oxydation ou corrosion).

Phase de croissance des microfissures (stade II)

Le stade d'amorçage correspond au passage stade I-stade II. Schématiquement les microfissures ont tendance à s'orienter perpendiculairement à la direction de la contrainte principale maximale ce qui correspond souvent au franchissement du premier grain. Ensuite elles progressent à travers les grains successifs ou plus rarement en suivant les joints de grains. Lorsque la taille d'une fissure devient importante, et qu'elle a pris une direction bien définie, elle va se développer de façon préférentielle, décharger partiellement les autres microfissures et engendrer une forte concentration de contraintes sur son front, on dit alors qu'il y a amorçage macroscopique : le matériau ne peut plus être considéré comme un milieu macroscopiquement homogène.

a)





b)

Fig. 21. Stries de fatigue (d'après A. Pineau).
(*a*) Acier inoxydable austénitique.
(*b*) Alliage inconnel 718.

Phase de progression d'une macrofissure

L'ouverture et la fermeture cycliques de la fissure provoquent de forts glissements plastiques alternés sur le front, dans des plans cristallographiques différents qui forment une strie de clivage à chaque progression de la fissure. La surface rompue présente une succession de stries qui permet souvent (mais pas toujours !) de mesurer la progression du front à chaque cycle (deux bons exemples sont donnés sur la figure 21).

La fissure progresse ainsi jusqu'au moment où elle atteint une taille critique qui correspond à l'instabilité de la pièce fissurée. La pièce se rompt alors en deux parties ou plus, après une propagation rapide de la fissure.

1.3.4. *Effets de l'environnement*

Les mécanismes de rupture décrits ci-dessus sont influencés par les réactions chimiques engendrées par un environnement agressif. La corrosion et particulièrement la corrosion sous tension affectent les joints de grains et accélèrent la rupture intergranulaire.

La présence d'hydrogène dans les aciers, même à très faible teneur, favorise la fissuration par diffusion et concentration dans les régions très sollicitées.

Le phénomène d'endommagement le plus influencé est la fatigue, en raison même de la localisation préférentielle des défauts en surface, dans une région plus facilement accessible aux agents agressifs. On observe généralement que la durée de vie en fatigue sous vide (ou dans un gaz inerte) est plus importante que dans l'air, elle-même plus élevée que dans un milieu corrosif (eau salée, milieux à haute teneur en soufre...). Les mécanismes mis en jeu sont de nature électrochimique avec formation de couches passives protectrices qui peuvent se rompre sous l'action de sollicitations mécaniques (corrosion sous contrainte).

Pour la progression des fissures de fatigue l'effet de l'environnement peut ralentir ou accélérer la vitesse de progression selon qu'il y a émoussement de la pointe de fissure ou bien augmentation de la concentration de contrainte par effet de coin d'une pénétration partielle. Ces phénomènes sont encore mal connus et donc difficilement modélisables.

2. AUTRES MATÉRIAUX

2.1. Polymères

2.1.1. *Structures*

2.1.1.1. *Molécules*

Les hauts polymères solides sont constitués par des molécules en chaînes. Le squelette de la chaîne est formé d'atomes de carbone principalement, reliés par la liaison covalente carbone-carbone dont l'énergie à rupture est de l'ordre

de 300 kJ/mole. D'autres atomes d'hydrogène, d'oxygène, d'azote... sont reliés aux atomes de la chaîne et éventuellement à des atomes de molécules voisines par des liaisons polaires ou de type Van der Waals dont l'énergie à rupture n'est que de l'ordre de 10 kJ/mole (fig. 22).

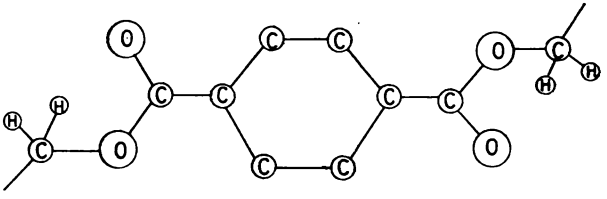


Fig. 22. Molécule de polyéthylène téréphthalate (d'après réf. Ward).

2.1.1.2. *Arrangements amorphe et semi-cristallin*

La flexibilité des molécules permet différents modes d'organisation qui toutefois présentent un caractère beaucoup moins régulier que les cristaux métalliques.

— Dans l'arrangement amorphe les chaînes sont enchevêtrées au hasard à l'échelle d'un ensemble de molécules mais avec un certain ordre à une échelle plus petite (fig. 23). A l'échelle macroscopique, les matériaux amorphes sont isotropes et souvent transparents.

Exemples : plexiglas, polystyrène.

— Lors de la polymérisation et sous des effets thermomécaniques, les molécules à longues chaînes de certains polymères ont tendance à s'ordonner par paquets pour former des cristallites séparées par des régions amorphes. Ces lamelles cristallines forment une superstructure dont la taille moyenne de maille est de l'ordre de 1 μm (fig. 23). Elles représentent des zones plus résistantes que les zones amorphes et contiennent des défauts d'organisation. Les polymères partiellement cristallisés sont translucides ou opaques.

Exemples : nylon, polythène.

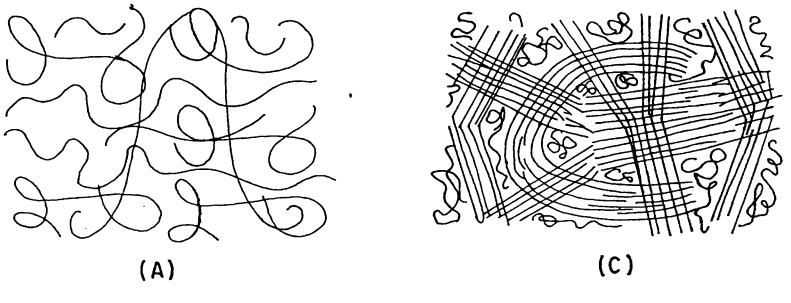


Fig. 23. Schémas d'arrangements amorphes (A), et semicristallins (C).

2.1.1.3. *Différents polymères*

En fonction de la température, un polymère peut se présenter dans 4 états différents qui correspondent à un accroissement des volumes libres intermoléculaires avec la température et une diminution des forces de liaisons. On peut repérer ces états en suivant le graphe de la masse volumique ρ ou du module d'élasticité E par exemple en fonction de la température (fig. 24). La température ambiante pouvant se trouver dans l'une des 4 zones selon le polymère considéré.

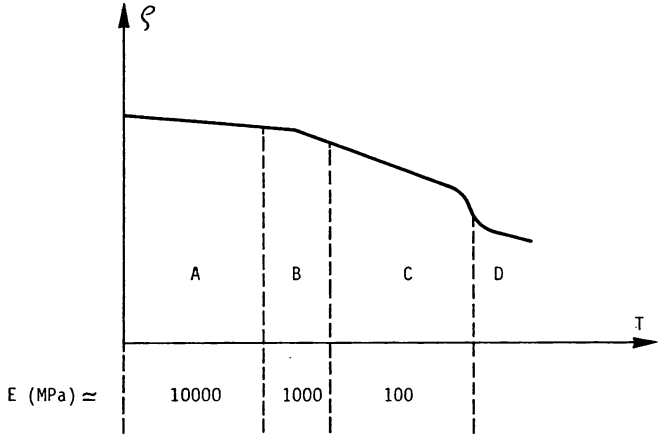


Fig. 24. Etats des polymères.

L'état vitreux (A)

Les verres organiques n'admettent que de très faibles déformations.

L'état de transition (B)

On rencontre les polymères linéaires thermoplastiques (cellulosiques, polyamides, polyesters, polyvynils) et les polymères réticulés dont la décomposition chimique se produit avant la fusion (phénoplastes, aminoplastes).

L'état caoutchoutique (C)

Les élastomères sont formés de très longues molécules reliées entre elles par des points de jonction relativement rares.

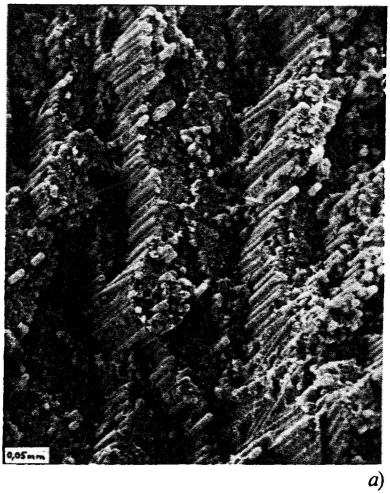
L'état fluide (D)

2.1.1.4. *Composites fibres-résines*

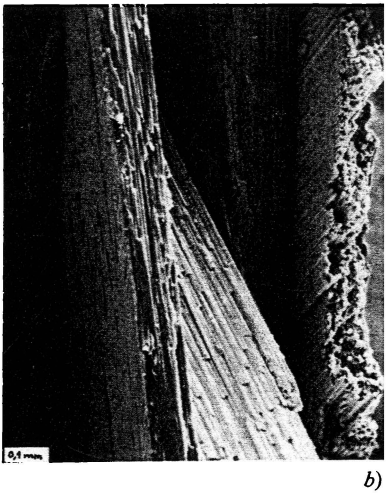
L'association de fibres noyées dans une résine produit des matériaux composites dont la résistance spécifique peut être supérieure à celle de certains métaux.

Les fibres les plus couramment employées sont les fibres de verre, de kevlar, de bore et de carbone. Leur diamètre varie de quelques centièmes de millimètre à quelques dixièmes. Les résines les plus utilisées sont les résines époxy. Ce sont les interfaces fibre-matrice qui constituent les zones de faiblesse vis-à-vis de la déformation et de la rupture. La proportion volumique de fibres varie de 50 à 70 % selon l'arrangement réalisé qui peut être :

— unidirectionnel : le composite est constitué de fibres parallèles entre elles sous forme de barreaux ou de plaques (fig. 25*a*) ;



a)



b)

c)

Fig. 25. Structures de composites (d'après M. Vançon.)

— bidirectionnel : par superposition de nappes unidirectionnelles croisées, ou bien par imprégnation de tissus, on réalise des plaques ou coques dont la raideur et la résistance varient avec la direction de la sollicitation (fig. 25*b*) ;

— tridirectionnel : il est aussi possible de fabriquer des composites avec des fibres dans trois directions, par exemple le composite à matrice de carbone et fibres de carbone dans trois directions perpendiculaires (fig. 25*c*).

Par construction même, tous ces composites sont fortement anisotropes puisque la rigidité et la résistance des fibres sont de l'ordre de 50 à 100 fois supérieures à celles des résines.

2.1.2. *Mécanismes physiques de déformation*

2.1.2.1. *Déformations viscoélastiques*

Pour la plupart des polymères, tant que la sollicitation reste inférieure à une certaine valeur, les déformations sont élastiques mais elles mettent en jeu des phénomènes dissipatifs que l'on traduit globalement par une viscosité. Elles sont les résultats de mouvements relatifs de segments de chaînes dans lesquels les liaisons ne sont pratiquement pas détruites mais les réarrangements qui interviennent sont des phénomènes thermiquement activés. Le nombre d'atomes par seconde pouvant effectuer un saut est fonction de la contrainte et de la température ce qui entraîne une relation entre la vitesse de déformation et la contrainte, c'est le phénomène de viscosité. La déformation bien que réversible ne se stabilise ou ne disparaît qu'au bout d'un certain temps. La limite de réversibilité est de l'ordre de quelques pour cent mais si la densité des liaisons est faible (cas des élastomères) elle peut atteindre 50 à 100 %.

2.1.2.2. *Limite d'élasticité*

A partir d'une valeur caractéristique de la sollicitation, des réorientations irréversibles de segments de chaînes et de crystallites lamellaires se produisent, entraînant des déformations qui se superposent aux déformations élastiques et qui subsistent, même très longtemps après cessation de la sollicitation.

2.1.2.3. *Déformations permanentes*

Elles prennent naissance à la fois dans les crystallites où des dislocations sont générées et dans les régions amorphes, par rotations importantes des liaisons. Une sollicitation plus importante provoque la destruction de la sous-structure par rupture des liaisons de plus faible énergie alors que de nouvelles liaisons peuvent se créer par simple rapprochement d'éléments actifs.

— Les réorientations favorisent la formation de nouvelles crystallites qui jouent le rôle de renfort. Il y a consolidation ou écrouissage avec, à contrainte constante, équilibre plastique asymptotique en fonction du temps (fluage à caractère logarithmique).

— Lorsque la densité des cristallites se stabilise, il peut y avoir écoulement de fluage à contrainte constante.

— Enfin, comme pour les métaux, la déformation plastique s'accompagne d'anisotropie par consolidation directionnelle.

Tous ces mécanismes n'interviennent que dans le domaine des très grandes déformations (plusieurs dizaines à plusieurs centaines de pour cent).

2.1.3. *Mécanismes physiques de rupture*

D'une manière très schématique, on peut dire que l'amorçage de la rupture dans les polymères est la disparition de liaisons moléculaires sous l'effet combiné des sollicitations extérieures et de l'activation thermique. Comme pour les déformations ce phénomène est sensible à la vitesse.

Les zones d'amorçage sont essentiellement les zones de défauts, impuretés ou défauts cristallins dans les cristallites. Le développement de la rupture peut s'opérer par un mécanisme de rupture fragile dans les polymères à l'état vitreux ou par un mécanisme de rupture ductile dans les polymères à l'état de transition ou caoutchoutique.

2.2. Matériaux granulaires : béton

2.2.1. *Constitution du béton hydraulique*

Le béton de construction est constitué de granulats, de ciment et d'eau. Pour le bricoleur du dimanche, un bon béton se réalise avec une mesure (en volume) de ciment, deux mesures de sable sec, quatre mesures de gravier et une « bonne » mesure d'eau.

2.2.1.1. *Granulats*

Les granulats naturels proviennent de dépôts de matériaux alluvionnaires roulés ou de roches concassées de natures très différentes (silico-calcaires, granit...). On caractérise un granulat par sa courbe granulaire qui donne en fonction de la dimension moyenne de grain, le pourcentage des grains de dimension inférieure à une valeur donnée.

Pour la constitution des mortiers on se limite à des sables dont le diamètre des grains reste inférieur à 5 mm. Pour les bétons on utilise aussi des gravillons dont les diamètres atteignent 25 mm et, dans des cas très particuliers tels que la construction des barrages, des cailloux (jusqu'à 100 mm) et des moellons (160 mm et plus).

La dimension maximale des granulats à utiliser d dépend de la dimension caractéristique des ouvrages auxquels est destiné le béton ; si h est la plus petite dimension de l'ouvrage et e l'espace compris entre deux armatures de ferraillage éventuel :

$$d \leqslant \frac{h}{4} \quad \text{ou} \quad d \leqslant \frac{3}{4} e$$

2.2.1.2. *Ciment*

Le ciment Portland est essentiellement formé de silicate tricalcique ($\simeq$ 60 %), de silicate bicalcique ($\simeq$ 20 %), de gypse ($\simeq$ 3 %), d'aluminate tricalcique ($\simeq$ 10 %) et d'aluminoferrite tétracalcique ($\simeq$ 7 %) broyés en poudre dont les grains ont des dimensions de l'ordre de 10 à 50 μm.

Ces constituants ont la propriété de se transformer par hydratation en une véritable pierre artificielle.

2.2.1.3. *Hydratation de la poudre de ciment*

Un mélange de 66 % en poids de ciment et de 33 % d'eau forme une pâte qui durcit en fonction du temps. Au début de la prise, les constituants anhydres se dissolvent jusqu'à saturation et réagissent en solution pour former des hydrates qui précipitent en enveloppant les grains anhydres. Les cristaux formés sont des hydrates de silicate de calcium, de l'hydroxyde de chaux et différents aluminates. La pâte reste fluide pendant quelques heures puis durcit par croissance des cristaux de tobermorite et de portlandite issus des silicates. L'hydratation engendre les phénomènes suivants :

— augmentation de la surface spécifique des grains d'un facteur qui peut atteindre 100,

— contraction ou retrait de l'ordre de 0,3 mm/m,

— dégagement de chaleur (de l'ordre de 100 calories/g de ciment),

— durcissement en fonction du temps : la résistance à la rupture en compression normée à 1 au 7^{e} jour est de 0,35 au 2^{e} jour, de 1,5 au 28^{e} jour de 1,8 au bout d'un an et de 2,2 au bout de 10 ans.

Finalement la structure d'un béton durci est la suivante (fig. 26) :

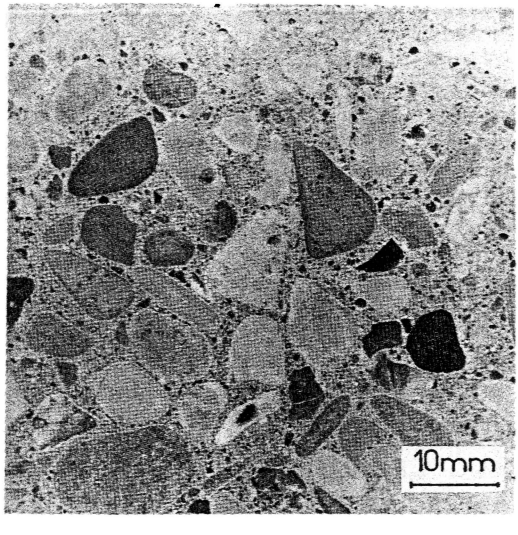


Fig. 26. Structure d'un béton (d'après J. Mazars, Lab. Audio-visuel ENSET).

— des granulats de différentes dimensions,
— de la pâte de ciment liée aux granulats,
— des défauts de liaison pâte-grains constitués par des microfissures dues au retrait et des cavités provenant des bulles d'air emprisonnées lors du moulage.

2.2.2. *Mécanismes physiques de déformation et de rupture*

Il est difficile de séparer les phénomènes de déformation et de rupture car les microfissures et les cavités initiales qui existent avant toute sollicitation, en se développant par des mécanismes de rupture fragile, engendrent des déformations permanentes (fig. 27).

— Ce phénomène est malgré tout peu important en dessous d'une certaine valeur de la sollicitation. La déformation dans cette première phase est le résultat de mouvements quasi réversibles d'atomes et peut être considérée comme élastique avec une viscosité faible.

— La rupture fragile par décohésion pâte-grains étant le phénomène essentiel de déformation permanente et de rupture, elle est fortement influencée par la nature de la sollicitation. La limite d'élasticité ou la résistance à la rupture sont de l'ordre de 12 fois plus élevées en compression qu'en traction ce qui

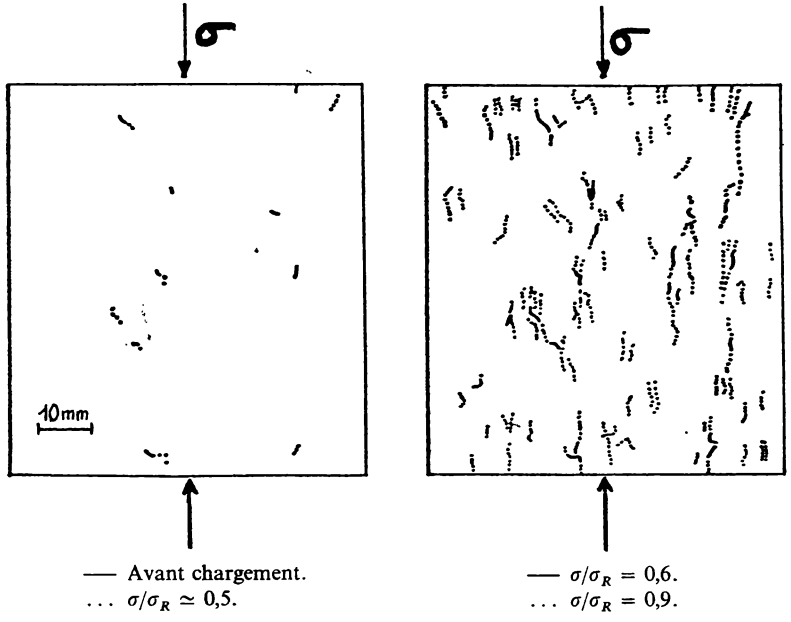


Fig. 27. Observations aux rayons X de l'évolution de la microfissuration dans un béton sollicité en compression (d'après M. Robinson).

explique qu'on utilise le béton essentiellement en compression. Au-delà de la sollicitation correspondant à la limite d'élasticité, les microfissures aux liaisons de la pâte et des grains les plus gros commencent à progresser à la périphérie des grains engendrant au niveau macroscopique des déformations permanentes qui viennent se superposer aux déformations élastiques.

— Pour des sollicitations encore plus importantes, dans une troisième phase, les microfissures gagnent la pâte par décohésion en s'alignant parallèlement à la contrainte s'il s'agit d'une compression. Des glissements apparaissent dans les cristaux des grains, contribuant eux aussi à la déformation permanente qui se produit à volume constant. L'endommagement de microfissuration devient fortement anisotrope.

— La quatrième phase est la phase de rupture : des fissures macroscopiques apparaissent, la contrainte nécessaire pour engendrer de nouvelles déformations diminue, le volume spécifique augmente, la rupture finale intervient lorsque des macrofissures se rejoignent pour former une surface de discontinuité traversant tout l'objet.

On verra au chapitre 7 que la théorie de l'endommagement couplée à l'élasticité suffit pour modéliser les déformations non linéaires des bétons.

2.3. Bois

2.3.1. *Structure anatomique des bois*

Aux deux grandes catégories d'essences de bois, résineux et feuillus, correspondent des structures différentes qui présentent néanmoins des points communs dus au mode de croissance des arbres.

2.3.1.1. *Hétérogénéité et anisotropie*

La croissance en diamètre des arbres est due à la prolifération de cellules dans le cambium situé sous l'écorce du tronc et dont l'activité dépend des saisons. Au printemps les vaisseaux formés sont de grand diamètre dans un tissu lâche (bois de printemps) ; à la fin de l'été, l'activité cessant, le tissu devient plus serré et plus fibreux (bois d'été). Ces alternances forment les cernes concentriques qui caractérisent l'aspect macroscopique de la coupe transversale des arbres (fig. 28).

A cette hétérogénéité radiale pseudo-périodique s'ajoute une autre hétérogénéité due au vieillissement de la partie centrale ou duramen dont les tissus s'épaississent par rapport à ceux de la partie périphérique, l'aubier. L'anisotropie de formation est donc essentiellement une anisotropie de révolution avec bien des imperfections créées par les nœuds des départs de branches, les différences d'exposition, les contraintes internes longitudinales de compression et de traction, les accidents biologiques locaux.

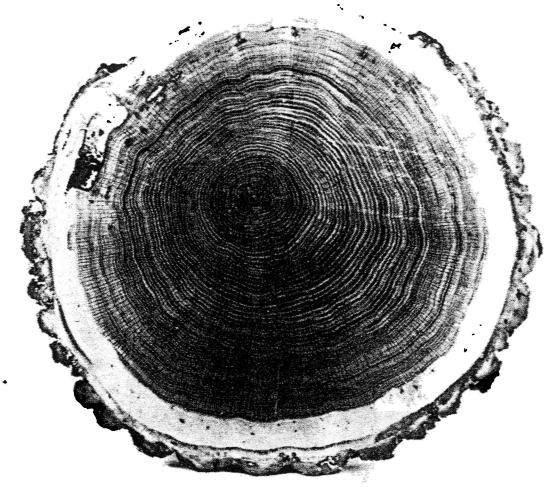


Fig. 28. Section transversale d'une grume de chêne (d'après Lab. Audio-visuel ENSET).

2.3.1.2. *Fibres et cellules*

Les fibres macroscopiques sont constituées de cellules de quelques centièmes de millimètres de côté et de quelques millimètres de long disposées parallèlement à l'axe du tronc. La résistance du bois est d'autant plus grande que la section des cellules est plus petite.

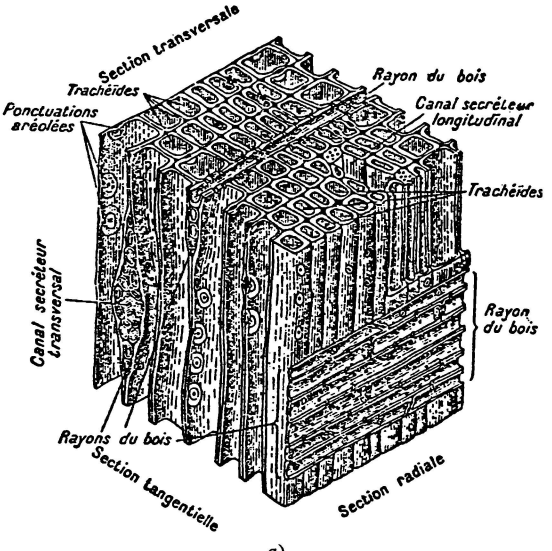
— Pour les résineux, un seul type de cellule forme le tissu de soutien et le tissu de conduction assurant la circulation de la sève. On trouve aussi les canaux résinifères qui élaborent les résines et les « rayons » du bois, formés de cellules plus denses organisées en lames radiales (fig. 29*a*).

— Les feuillus ont une structure plus complexe formée de 3 à 4 types de cellules assurant des fonctions différentes : tissu de soutien, tissu de conduction, tissu de réserve (fig. 29*b*).

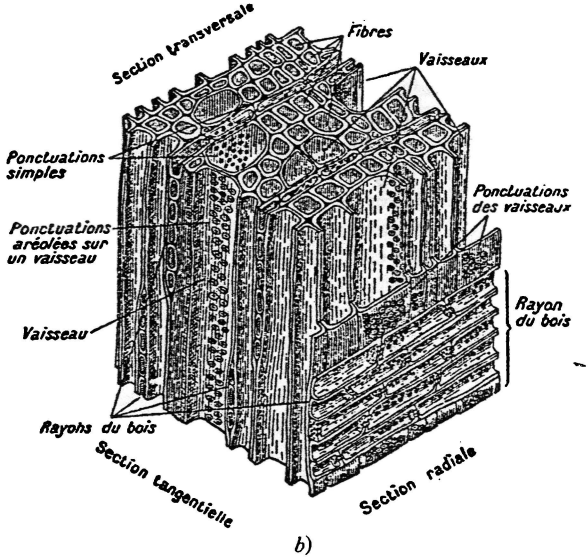
2.3.1.3. *Humidité*

Les cellules du bois sont essentiellement constituées de cellulose (40 à 50 % en poids) et de lignine (25 à 30 %). A ces deux polymères il faut ajouter l'eau qui peut atteindre un taux d'humidité par rapport au bois sec de 100 % et qui existe soit sous forme de combinaison chimique avec la lignine, soit sous forme d'imprégnation dans les membranes des cellules, soit sous forme « libre » dans les vides des tissus.

L'humidité joue un très grand rôle sur les propriétés mécaniques, d'où l'importance du séchage des bois. Au-dessous du taux d'humidité qui corres-



a)



b)

Fig. 29. Structure des bois :
(*a*) résineux : épicéa.
(*b*) feuillu : peuplier (d'après M. T. Gautherin).

pond à la saturation des fibres, les caractéristiques d'élasticité et la résistance à la rupture sont d'autant plus élevées que le taux d'humidité est plus faible.

2.3.2. *Mécanismes physiques de déformation et de rupture*

Les déformations élastiques sont dues aux déformations réversibles des cellules qui sont fortement influencées par le taux d'humidité. Elles peuvent atteindre 0,1 à 0,5 % sans déformations permanentes appréciables, selon les essences de bois et la direction de la sollicitation par rapport à l'axe de l'arbre. La viscosité est faible.

Comme pour le béton, il est difficile de séparer les mécanismes de déformation permanente et de rupture, soit que les déformations permanentes macroscopiques résultent en fait de microruptures, soit que la rupture macroscopique intervienne avant que des déformations appréciables ne se soient produites. Quoiqu'il en soit, le mécanisme principal de déformation plastique du bois est le glissement des cellules les unes par rapport aux autres alors que la rupture intervient par la rupture des chaînes de cellulose, ruptures de liaisons pour des contraintes très élevées dans la direction des fibres, ruptures par clivage pour des contraintes beaucoup plus faibles dans les directions perpendiculaires.

3. BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE 1

FRIEDEL J. *Dislocations*. Pergamon (1967).

HULL D. *Introduction to dislocations*. Pergamon (1975).

MCCLINTOCK, ARGON A. S. *Mechanical behavior of materials*. Addison-Wesley (1966).

YOKOBORI T. *An interdisciplinary approach to fracture and strength of solids*. Nordhoff publication (1968).

GAROFALO F. *Déformation et rupture par fluage*. Dunod (1970).

ENGEL L., KLINGELE H. *An atlas of metal damage*. Wolf Science Books (1981).

WARD I. M. *Mechanical properties of solid polymers*. Wiley Interscience (1971).

KAUSCH H. H. *Polymer fracture*. Springer Verlag (1978).

NEVILLE A. M. *Properties of concrete*. J. Wiley (1973).

BARON J., SAUTGREY R. *Le béton hydraulique*. Presses de l'ENPC (1982).

KOLLMAN F. F. P., COTE W. A., *Principles of wood science and technology*. Springer Verlag (1968).

Chapitre 2

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE ET DE THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS

« *A chaque phénomène sa variable*
A chaque variable sa loi d'évolution »

Pour modéliser les phénomènes physiques de déformation et de rupture brièvement décrits au chapitre 1, il faut une méthode fondée sur des principes généraux gouvernant les variables représentatives de l'état du milieu matériel. C'est l'objet du présent chapitre qui rassemble sous une forme condensée tous les concepts de base qui seront utilisés par la suite. Deux types de modélisation sont nécessaires : l'une que l'on peut qualifier de cinématique ou de mécanique schématise les mouvements et les efforts dans le milieu, l'autre que l'on peut qualifier de phénoménologique ou de physique introduit les variables caractéristiques des phénomènes étudiés.

La présentation qui en est donnée ici résulte des travaux de P. Germain concrétisés dans un cours de 3e Cycle repris par J. Lemaitre, et dans l'ouvrage « Cours de mécanique des milieux continus » cité dans la bibliographie de ce chapitre et qui contient tous les détails nécessaires à une compréhension en profondeur. Ici, on se limite aux résultats essentiels en négligeant de nombreux développements mathématiques. Les notations diffèrent peu de l'ouvrage cité en référence ce qui pourra aider les lecteurs désireux d'approfondir la question.

La schématisation mécanique présentée repose sur le principe des puissances virtuelles. L'idée de base figurait déjà dans les travaux de d'Alembert vers 1750 mais c'est le développement récent des méthodes variationnelles de l'analyse fonctionnelle dans les années 1970 (Duvaut, Lions, Nayroles) qui a surtout contribué à son utilisation systématique. Le choix d'un mouvement virtuel particulier pour un milieu donné conduit naturellement à une définition cohérente des déformations et des contraintes et aux équations d'équilibre avec les conditions aux limites correspondantes.

L'état d'un milieu matériel dépend en général de toute l'histoire de ses variables mécaniques et son comportement peut se modéliser par des lois héréditaires ou intégrales. Pour obtenir un formalisme directement appréhendable par les méthodes de l'analyse fonctionnelle, nous préférons utiliser l'approche de la thermodynamique des processus irréversibles par variables d'état initiée par les chimistes et appliquée à la mécanique par Eckart, Biot vers 1950. Le potentiel thermodynamique permet de définir les variables associées à partir des variables observables et des variables internes choisies en fonction des phénomènes à modéliser et conduit naturellement aux lois d'état. Le pseudo-potentiel de dissipation fournit les lois complémentaires d'évolution des variables décrivant les processus irréversibles selon le formalisme de Moreau (1970).

Notons toutefois que la thermodynamique élémentaire présentée ici sera utilisée « sans thermique ni véritable dynamique » pour la plupart des phénomènes étudiés mais son cadre sera très précieux pour guider et limiter les choix possibles de la modélisation phénoménologique.

1. ÉNONCÉ DU PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES

1.1. Mouvements et puissance virtuels

Pour schématiser les efforts mis en jeu dans les phénomènes que l'on souhaite étudier, il est commode d'imaginer des mouvements fictifs ou virtuels et d'analyser le travail ou la puissance qui en résulte.

Exemples :

— pour analyser les forces de gravité agissant sur une automobile on peut imaginer de la soulever (mouvement virtuel de bas en haut) ;

— pour analyser les efforts de frottement de dérapage de cette automobile sur la route, on peut imaginer de la tirer « tous freins serrés » (mouvement virtuel horizontal) ;

— pour analyser la rigidité de la suspension on peut imaginer de déplacer l'habitacle par rapport aux roues (mouvement virtuel relatif d'un point par rapport à un autre).

Plus généralement un mouvement virtuel d'un milieu matériel repéré dans un référentiel est défini à un instant donné par un champ de vecteurs vitesses dépendant du point (M) :

$$\vec{v}(M) .$$

C'est par le choix de $\vec{v}(M)$ que l'on peut schématiser plus ou moins finement les phénomènes mécaniques.

La puissance virtuelle d'un système d'efforts dans un mouvement virtuel donné est par définition la fonction linéaire continue à valeur scalaire de $\vec{v}(M)$

qui représente le travail par unité de temps mis en jeu par le ou les phénomènes considérés dans le mouvement donné :

$$\hat{P}(\vec{v}(M)) .$$

1.2. Systèmes de référence et dérivée particulaire

Les mouvements peuvent être décrits, soit en variables d'Euler, soit en variables de Lagrange.

— Les variables d'Euler sont le temps t et les coordonnées de la position du point matériel M à l'instant t : il s'agit d'un repérage dans la configuration actuelle. La vitesse du point s'exprime par :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) .$$

— La description lagrangienne utilise le temps et les coordonnées (x_1^0, x_2^0, x_3^0) de la position initiale M_0 du point M : le repérage est fait par rapport à la configuration initiale et la vitesse s'exprime par :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) .$$

La notion de dérivée particulaire s'applique à toute quantité définie à partir d'un ensemble que l'on suit dans son mouvement.

— En variables de Lagrange, la dérivée particulaire est identique à la dérivée partielle par rapport au temps. Par exemple l'accélération du point M s'exprime par :

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} .$$

— Au contraire, en variables d'Euler il n'y a pas identité puisque les coordonnées actuelles de M dépendent du temps. On a alors :

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} . \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \vec{v}$$

ou encore en notations indicielles

$$\gamma_i = \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j}\, v_j \quad *$$

---

* On utilise la convention de sommation d'Einstein :

$$v_{i,j}\, v_j = v_{i,1}\, v_1 + v_{i,2}\, v_2 + v_{i,3}\, v_3 .$$

1.3. Principe des puissances virtuelles (Germain 1972)

Un milieu matériel étant isolé, on peut distinguer les actions extérieures qui agissent sur le milieu, des actions intérieures qui représentent les liaisons existant entre toutes les parties possibles du milieu.

Axiome d'objectivité

La puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement rigidifiant est nulle.

Axiome de l'équilibre (statique ou dynamique)

Pour tout milieu matériel repéré dans un référentiel absolu, à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération $\hat{P}_{(a)}$ est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs $\hat{P}_{(i)}$ et des efforts extérieurs $\hat{P}_{(x)}$

$$\boxed{\hat{P}_{(i)} + \hat{P}_{(x)} = \hat{P}_{(a)}}\,.$$

Ces deux axiomes entraînent la loi fondamentale de la dynamique.

2. MÉTHODE DES PUISSANCES VIRTUELLES

2.1. Taux de déformation et contrainte

L'application du principe des puissances virtuelles à un domaine isolé pour un mouvement virtuel particulier et un choix des formes linéaires intervenant dans les puissances conduisent directement aux équations de la mécanique des milieux continus.

Soit donc un domaine $\mathscr{D}$ de frontière $\partial\mathscr{D}$ intérieur à un milieu de volume $\mathscr{S}$ et de frontière $\partial\mathscr{S}$ et soit $\vec{n}$ la normale extérieure en un point M de $\partial\mathscr{D}$ repérée dans un repère orthonormé (O, x_1, x_2, x_3).

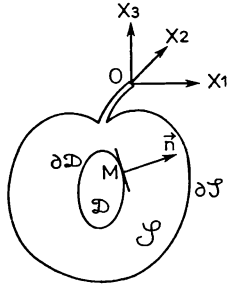


Fig. 1. Milieu matériel isolé.

2.1.1. *Choix du mouvement virtuel, Théorie du premier gradient*

Le premier choix consiste à définir l'espace des vitesses virtuelles. Ici un simple champ de vecteurs vitesse de déplacement $\vec{v}(M)$ suffit dans la mesure où l'on ne cherche pas à rendre compte des microrotations (milieux micropolaires exclus).

Le second choix concerne les termes à faire intervenir dans les puissances. un seul terme en $\vec{v}(M)$ est insuffisant pour décrire le comportement des corps présentant une certaine rigidité. L'idée la plus simple consiste à lui adjoindre le champ des gradients de vitesse $\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v}$ ou $\hat{v}_{i,j}$. Pour la théorie du premier gradient, le mouvement virtuel est ainsi représenté par :

$$\vec{v}(M) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v}.$$

En décomposant $\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v}$ en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique, on fait apparaître le tenseur (du second ordre) des taux de déformation $\hat{\mathbf{D}}$ et le tenseur des taux de rotation $\hat{\mathbf{\Omega}}$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v} + (\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v})^T] + \frac{1}{2}[\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v} - (\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v})^T] \,*$$

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v} - (\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v})^T]$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v} + (\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v})^T]}$$

ou

$$\hat{D}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{v}_{i,j} + \hat{v}_{j,i}).$$

2.1.2. *Puissance virtuelle des efforts intérieurs*

On suppose qu'elle est définie par l'intégrale sur tout domaine $\mathscr{D}$ d'une densité volumique qui à priori contient trois termes en $\vec{v}$, $\hat{\mathbf{D}}$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}$, associés respectivement à un vecteur $\vec{f}^*$ et deux tenseurs du second ordre, $\boldsymbol{\sigma}$ symétrique, et $\underset{\sim}{\mathbf{\Gamma}}$ antisymétrique.

$$\hat{P}_{(i)} = -\int_{\mathscr{D}} (\vec{f}^*.\vec{v} + \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{D}} + \mathbf{\Gamma} : \hat{\mathbf{\Omega}})\, dV \,. \,**$$

Le signe moins respecte les conventions qui seront utilisées par la suite en thermodynamique.

---

* Le symbole ( )^T désigne la transposition.

** Les deux points : désignent le produit tensoriel contracté sur deux indices.

Le premier axiome du principe des puissances virtuelles impose que pour tout mouvement de solide rigide,

— de translation $\vec{v} \neq 0$, $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{\Omega} = 0$,
— de rotation $\vec{v} = 0$, $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{\Omega} \neq 0$,

la puissance $\hat{P}_{(i)}$ soit nulle.

Par application du lemme fondamental de la physique des milieux continus : à toute fonction $f(M)$ définie et continue dans $\mathscr{D}$:

$$\int_{\mathscr{D}} f(M)\,\mathrm{d}V = 0 \quad \forall \mathscr{D} \quad \text{dans} \quad \mathscr{S} \Rightarrow f(M) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathscr{D},$$

cela entraîne que $f^*.\vec{v} = 0$ et $\mathbf{\Gamma} : \hat{\mathbf{\Omega}} = 0$ quels que soient $\vec{v}$ et $\hat{\mathbf{\Omega}}$

d'où $\quad \vec{f^*} = 0, \quad \mathbf{\Gamma} = 0$

et $\quad \hat{P}_{(i)} = -\int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{D}}\,\mathrm{d}V.$

On verra que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ ainsi introduit est le tenseur de Cauchy. Le premier axiome du principe des puissances virtuelles et le choix du mouvement virtuel en théorie du premier gradient sont équivalents à l'hypothèse habituellement faite pour introduire le tenseur des contraintes, hypothèse qui consiste à supposer que les efforts intérieurs peuvent être schématisés par une densité surfacique de forces de cohésion $\vec{T}$ qui représente des actions à très courte distance. C'est en développant cette hypothèse que l'on définit un vecteur contrainte qui dépend du point considéré M, du temps t, et qui dépend linéairement de la normale $\vec{n}$ à $\partial\mathscr{D}$ en M

$$\vec{T}(M, t, \vec{n}).$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ s'en déduit par :

$$\vec{T}(M, t, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma}(M, t).\vec{n}.$$

Il est symétrique et les composantes de sa matrice représentative dans le repère (O, x_1, x_2, x_3) sont :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j.$$

Ces composantes sont indiquées schématiquement sur la figure 2. Sur chaque face, le vecteur contrainte se décompose en une contrainte normale et deux contraintes tangentielles.

La méthode des puissances virtuelles permet de mieux préciser les hypothèses introduites en les faisant porter sur les mouvements virtuels et surtout elle permet de construire aisément d'autres théories fondées sur d'autres hypothèses si nécessaire : introduction d'un champ de rotations dans l'espace des vitesses virtuelles pour les milieux micropolaires, introduction du second

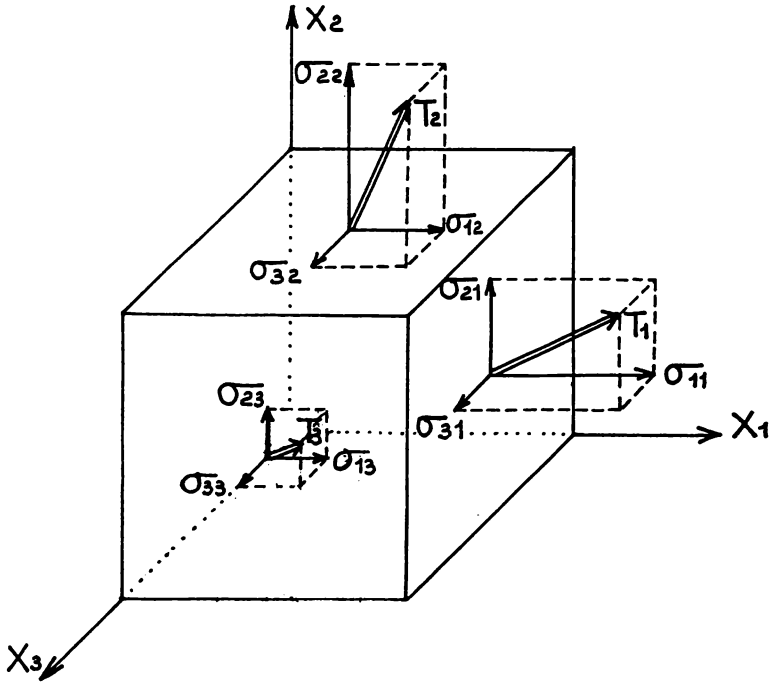


Fig. 2. Composantes du vecteur contrainte et de la matrice représentative du tenseur des contraintes (d'après Germain-Muller).

gradient dans l'expression des puissances virtuelles pour décrire plus finement les déformations par exemples.

2.1.3. *Puissance virtuelle des efforts extérieurs*

Les efforts extérieurs comprennent :

— des efforts exercés à distance par des systèmes extérieurs à $\mathscr{S}$, supposés définis par une densité volumique de force $\vec{f}$ (pas de tenseur ni de couple).

— des efforts de contacts schématisés par une densité surfacique de forces $\vec{T}$ (Postulat de Cauchy)

$$\hat{P}_{(x)} = \int_{\mathscr{Q}} \vec{f}.\vec{\hat{v}}\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathscr{Q}} \vec{T}.\vec{\hat{v}}\,\mathrm{d}S\,.$$

On pourrait rajouter un terme en $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{v}$ mais on démontrerait en toute rigueur, qu'il est nul.

2.1.4. *Puissance virtuelle des quantités d'accélération*

Si $\vec{\gamma}$ est le vecteur accélération en chaque point M et ρ la masse volumique (les valeurs relatives à quelques matériaux particuliers sont donnés dans le tableau 8), la puissance des quantités d'accélération s'exprime par :

$$\hat{P}_{(a)} = \int_{\mathscr{Q}} \vec{\gamma}.\vec{\hat{v}}\rho \, \mathrm{d}V .$$

2.2. Equations d'équilibre

L'application de l'axiome de l'équilibre du principe des puissances virtuelles au domaine $\mathscr{Q}$ conduit aux équations d'équilibre :

$$\hat{P}_{(i)} + \hat{P}_{(x)} = \hat{P}_{(a)}$$

$$\boxed{-\int_{\mathscr{Q}} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{D}} \, \mathrm{d}V + \int_{\mathscr{Q}} \vec{f}.\vec{\hat{v}} \, \mathrm{d}V + \int_{\partial\mathscr{Q}} \vec{T}.\vec{\hat{v}} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathscr{Q}} \vec{\gamma}.\vec{\hat{v}}\rho \, \mathrm{d}V}$$

ou $$-\int_{\mathscr{Q}} \sigma_{ij} \hat{D}_{ij} \, \mathrm{d}V + \int_{\mathscr{Q}} f_i \hat{v}_i \, \mathrm{d}V + \int_{\partial\mathscr{Q}} T_i \hat{v}_i \, \mathrm{d}S = \int_{\mathscr{Q}} \gamma_i \hat{v}_i \rho \, \mathrm{d}V .$$

Pour exploiter le fait que cette identité est vérifiée quel que soit le mouvement virtuel $\vec{\hat{v}}$, il convient de faire apparaître $\vec{\hat{v}}$ lui-même dans le premier terme par application du théorème de la divergence (ou par intégration par parties)

$$-\int_{\mathscr{Q}} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{D}} \, \mathrm{d}V = -\int_{\mathscr{Q}} \boldsymbol{\sigma} : \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \vec{\hat{v}} \, \mathrm{d}V$$

$$= -\int_{\partial\mathscr{Q}} \boldsymbol{\sigma}.\vec{\hat{v}}.\vec{n} \, \mathrm{d}S + \int_{\mathscr{Q}} \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}.\vec{\hat{v}} \, \mathrm{d}V$$

$\vec{n}$ étant la normale extérieure à la frontière $\partial\mathscr{Q}$ du domaine $\mathscr{Q}$. L'équation relative au 2e axiome s'écrit alors :

$$-\int_{\partial\mathscr{Q}} \boldsymbol{\sigma}.\vec{\hat{v}}.\vec{n} \, \mathrm{d}S + \int_{\mathscr{Q}} \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}.\vec{\hat{v}} \, \mathrm{d}V + \int_{\mathscr{Q}} \vec{f}.\vec{\hat{v}} \, \mathrm{d}V + \int_{\partial\mathscr{Q}} \vec{T}.\vec{\hat{v}} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathscr{Q}} \vec{\gamma}.\vec{\hat{v}}\rho \, \mathrm{d}V$$

ou

$$\int_{\mathscr{Q}} (\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - \rho\vec{\gamma}).\vec{\hat{v}} \, \mathrm{d}V + \int_{\partial\mathscr{Q}} (\vec{T} - \boldsymbol{\sigma}.\vec{n}).\vec{\hat{v}} \, \mathrm{d}S = 0 \quad \forall \vec{\hat{v}} .$$

Identité qui, d'après le lemme fondamental, ne peut être vérifiée quel que soit $\vec{c}$ que si

$$\boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - \rho\vec{\gamma} = 0} \quad \text{dans } \mathscr{D} \text{ ou } \sigma_{ij,j} + f_i - \rho\gamma_i = 0$$

$$\vec{T} = \boldsymbol{\sigma}.\vec{n} \quad \text{sur } \hat{c}\mathscr{D} \qquad ou \qquad T_i = \sigma_{ij}\, n_j\,.$$

La première équation sous ses deux formes traduit l'équilibre statique ou dynamique local. La seconde donne un sens de vecteur contrainte à la densité surfacique de forces introduite. Elle montre que $\boldsymbol{\sigma}$ est bien le tenseur des contraintes de Cauchy : tenseur du second ordre symétrique. Elle donne aussi les conditions aux limites en efforts si l'on applique l'axiome de l'équilibre des puissances virtuelles à tout le domaine $\mathscr{S}$ considéré.

Si $\vec{T}^d$ représente la densité de force appliquée sur la frontière $\partial\mathscr{S}$ du domaine $\mathscr{S}$, le même raisonnement que précédemment conduit à :

$$\boxed{\vec{T}^d = \boldsymbol{\sigma}.\vec{n}} \quad \text{sur } \partial\mathscr{S} \text{ ou } T_i^d = \sigma_{ij}\, n_j$$

2.3. Déformations et déplacements

La méthode des puissances virtuelles introduit naturellement les variables cinématiques vitesse de déplacement $\vec{v}$ et taux de déformation $\mathbf{D}$ définis à chaque instant t. Outre cette description du mouvement, l'étude des milieux solides nécessite de caractériser l'état actuel par rapport à une configuration choisie comme référence qui peut être la configuration initiale ou une configuration relâchée lorsque des phénomènes d'élasticité et d'inélasticité sont présents simultanément. Il faut alors introduire le vecteur déplacement et le tenseur des déformations en transformation finie ou en transformation infinitésimale lorsque ces quantités restent petites.

2.3.1. *Hypothèse des petites déformations et petits déplacements*

Dans le cas d'une transformation infinitésimale on peut confondre les variables d'Euler et les variables de Lagrange ce qui revient à négliger les termes du second ordre dans les développements qui permettent de passer des secondes aux premières.

Soit donc $\vec{u}$ le vecteur déplacement défini par

$$\vec{u} = \int_0^t \vec{v}\, \mathrm{d}t \qquad \text{ou} \qquad \vec{v} = \dot{\vec{u}}\,,$$

$t = 0$ correspondant à la configuration de référence.

Soit $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur déformation défini par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t \mathbf{D}\, dt \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

La définition du tenseur $\mathbf{D}$ permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t \frac{1}{2}[\text{grad}\, \vec{v} + (\text{grad}\, \vec{v})^T]\, dt.$$

L'hypothèse des petites perturbations entraînant l'équivalence des variables d'Euler et des variables de Lagrange, la dérivée particulaire est une dérivée partielle et l'on peut commuter les opérateurs gradient et intégrale :

$$\int_0^t \text{grad}\, \vec{v}\, dt = \text{grad}\left(\int_0^t \vec{v}\, dt\right) = \text{grad}\, \vec{u}$$

d'où

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\text{grad}\, \vec{u} + (\text{grad}\, \vec{u})^T].$$

La déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ définie à partir du taux de déformation $\mathbf{D}$ est donc la partie symétrique du gradient du déplacement $\vec{u}$ défini à partir de la vitesse $\vec{v}$.

Les équations de la mécanique des milieux continus en petites déformations et petits déplacements se résument donc à :

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{div}\, \boldsymbol{\sigma} + f = \rho \vec{\gamma} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\text{grad}\, \vec{u} + (\text{grad}\, \vec{u})^T] \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \\ \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \end{array}$$

Pour résoudre un problème il convient d'ajouter :

— les conditions aux limites en général données en contraintes $\boldsymbol{\sigma}.\vec{n} = \vec{T}^d$ sur $\partial \mathscr{S}_F$, et en déplacement $\vec{u} = \vec{u}^d$ donné sur la partie complémentaire $\partial \mathscr{S}_u$;

— les lois de comportement qui traduisent la physique du milieu dans des relations entre contrainte et déformation ; leur étude fait l'objet des chapitres 4, 5 et 6.

En pratique, l'hypothèse des petites déformations peut être appliquée tant que le carré du module de la déformation reste inférieur à l'ordre de grandeur de la précision des calculs envisagés soit :

$$|\varepsilon| < 2 \text{ à } 5.10^{-2}.$$

Ce sera le cas dans la plupart des développements de cet ouvrage.

2.3.2. *Transformation finie en grandes déformations et grands déplacements*

Lorsque cette hypothèse ne peut être appliquée il faut introduire de nouvelles notions géométriques de la déformation, décrites en détail dans les ouvrages cités en référence de ce chapitre et qui ne sont que résumées ici.

Soit M un point du milieu dans sa configuration actuelle à l'instant t repéré en variables de Lagrange par rapport à sa configuration initiale M_0 à t_0 (fig. 3).

$$M = M(M_0, t_0, t)$$

et soit $\mathscr{F}$ la transformation qui permet de passer de M_0 à M pour un vecteur $\vec{x}$

$$\vec{x}(M) = \mathscr{F}(\vec{x}(M_0), t_0, t)\,.$$

La déformation peut s'exprimer à partir de la transformation linéaire tangente qui exprime la transformation au voisinage de M_0 et M

$$\mathrm{d}\vec{x}(M) = \mathbf{F}.\mathrm{d}\vec{x}(M_0)$$

où $\mathbf{F}$ est le tenseur gradient de $\mathscr{F}$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \vec{x}(M_0)}\,.$$

Si l'on choisit l'état de référence en M on est conduit à caractériser la déformation par le tenseur des déformations d'Almansi-Euler. Si l'on choisit l'état de

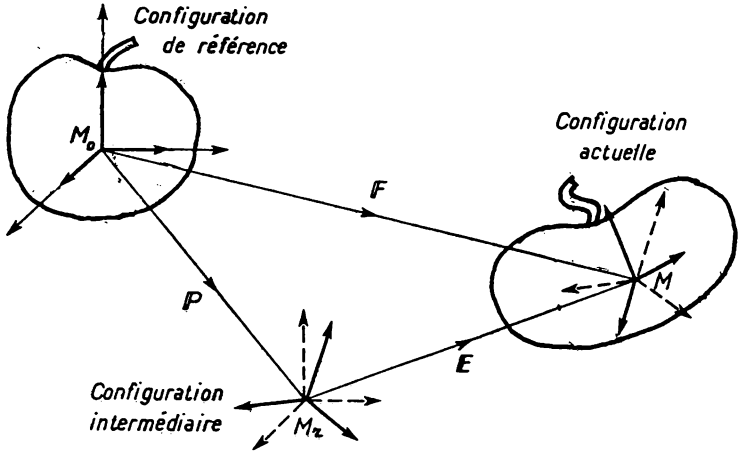


Fig. 3. Configuration initiale (M_0) actuelle (M) et relâchée (M_r) dans une transformation finie.

référence en M_0, on introduit alors le tenseur de Green-Lagrange $\mathbf{\Delta}$ dont la définition est :

$$\mathbf{\Delta} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T.\mathbf{F} - \mathbf{1})$$

où le point désigne le produit contracté sur un indice et où $\mathbf{1}$ est le tenseur unité du second ordre.

Un aspect important des grandes déformations, concernant l'écriture des lois de comportement élastoplastiques (ou viscoplastiques), est lié à la séparation de la déformation (totale) en déformation élastique (réversible) et inélastique (irréversible). La règle de partition utilisée en petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$ (voir § 4.1) ne se généralise en grandes transformations qu'à travers l'introduction d'une configuration intermédiaire relâchée. La figure 3 montre alors schématiquement la décomposition de la transformation $\mathbf{F}$ en une transformation inélastique $\mathbf{P}$ entre configurations initiale et intermédiaire et une transformation élastique entre cette dernière et l'état actuel : $\mathbf{E}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}.\mathbf{P}.$$

Le taux de déformation défini dans la configuration actuelle par :

$$\mathbf{D} = \tfrac{1}{2}[\text{grad } \vec{v} + (\text{grad } \vec{v})^T]$$

$\vec{v}$ étant le vecteur vitesse du point matériel suivi dans son mouvement, se décompose de façon additive :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p.$$

Par contre, la déformation totale $\mathbf{\Delta}$ ne se décompose pas simplement en la somme d'une déformation élastique (définie par rapport à la configuration relâchée)

$$\mathbf{\Delta}^e = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}^T\,\mathbf{E} - \mathbf{1})$$

et d'une déformation inélastique (définie par rapport à la configuration initiale)

$$\mathbf{\Delta}^p = \tfrac{1}{2}(\mathbf{P}^T\,\mathbf{P} - \mathbf{1}).$$

Dans cet ouvrage les aspects géométriques relatifs aux grandes déformations ne sont pas traités ; on retiendra seulement que les lois développées peuvent être étendues au cas des grandes transformations mais au prix d'une grande complexité de la présentation. Le tableau 4 montre schématiquement les correspondances qui existent entre les variables et équations, en terme de vitesses dans la configuration actuelle, en terme de petites déformations et en terme de grandes déformations. On remarque la grande similitude entre la première et la deuxième colonne : les quantités de la première sont effectivement les dérivées par rapport au temps de celles de la deuxième. Comme indiqué dans le tableau, le traitement des grandes déformations nécessite

Description en vitesse	Description en petites perturbations	Description en transformation finie
Variables d'Euler $M = M(x, t)$	Variables d'Euler $\equiv$ Variables de Lagrange	Variables de Lagrange $M = M(M_0, t_0, t)$
Configuration actuelle	Configuration actuelle $\equiv$ Configuration initiale	Configuration initiale
Vitesse $\vec{v}$	Déplacement $\vec{u}$	Transformation $x(M) = \mathscr{F}(x(M_0), t_0, t)$
Gradient des vitesses grad $\vec{v}$	Gradient des déplacements grad $\vec{u}$	Gradient de la transformation linéaire tangente $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x(M_0)}$
Tenseur des taux de déformation $\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\text{grad } \vec{v} + (\text{grad } \vec{v})^T]$	Tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T]$	Tenseur de Green-Lagrange $\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$
Tenseur des taux de déformations élastiques $\mathbf{D}^e$	Tenseur des déformations élastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Transformation élastique par rapport à la configuration relâchée **E** Tenseur des déformations élastiques $\boldsymbol{\Delta}^e = \frac{1}{2}[\mathbf{E}^T \mathbf{E} - \mathbf{1}]$
Tenseur des taux de déformations inélastiques $\mathbf{D}^p$	Tenseur des déformations inélastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Transformation inélastique **P** Tenseur des déformations inélastiques $\boldsymbol{\Delta}^p = \frac{1}{2}[\mathbf{P}^T \mathbf{P} - \mathbf{1}]$
Partition $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$	Partition $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$	Décomposition $\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$ $(\boldsymbol{\Delta} \neq \boldsymbol{\Delta}^e + \boldsymbol{\Delta}^p)$
	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{D}^e$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{D}^p$	$\dot{\boldsymbol{\Delta}} \neq \mathbf{D}$ $\dot{\boldsymbol{\Delta}}^e \neq \mathbf{D}^e$ $\dot{\boldsymbol{\Delta}}^p \neq \mathbf{D}^p$
Tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur de Piola-Kirchhoff 1 $\mathbf{S} = \det(\mathbf{F})\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{T-1}$ Tenseur de Piola-Kirchhoff 2 $\mathbf{S}^* = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S}$

Tableau 4. Variables de déformation et de déplacement.

souvent l'emploi de tenseurs de contrainte différents du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ défini dans la configuration actuelle. Les équations du mouvement (et de l'équilibre) écrites au paragraphe précédent en variables d'Euler (configuration actuelle) restent valables : on peut cependant les remplacer par les équations correspondantes en variables de Lagrange, faisant intervenir la masse volumique initiale et le tenseur de Piola-Kirchhoff 2.

Dans le cas unidimensionnel, on utilise souvent la déformation « vraie » ε_v et la contrainte vraie σ_v, définies en variables d'Euler sur la configuration actuelle. La déformation étant supposée homogène, on peut écrire la déformation vraie :

$$d\varepsilon_v = \frac{dl}{l} = \frac{dx(M)}{x(M)}, \quad \text{ou} \quad \varepsilon_v = \int_{x_0(M_0)}^{x(M)} \frac{dx}{x},$$

et en introduisant l'expression des petites déformations par rapport à la configuration initiale $\varepsilon = (x - x_0)/x_0$

$$\boxed{\varepsilon_v = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{x}{x_0} = \ln (1 + \varepsilon)}.$$

La contrainte de Cauchy σ_v, utilisée jusqu'à présent est la contrainte vraie. On ne peut l'identifier à la contrainte nominale $\sigma = F/S_0$ (qui se trouve être la contrainte de Piola-Kirchoff) qu'en petites déformations. Sinon il faut prendre en compte la variation de section :

$$S = S_0(1 - \nu^* \varepsilon)^2 \simeq S_0(1 - 2\,\nu^* \varepsilon)$$

où ν^* est le coefficient de contraction élastique ou élastoplastique. En première approximation, en élastoplasticité on confond ν^* avec 1/2 et on écrit :

$$\boxed{\sigma_v = \frac{F}{S_0(1 - \nu^* \varepsilon)^2} \simeq \sigma(1 + \varepsilon) \simeq \sigma\, e^{\varepsilon_v}}.$$

2.4. Invariants. Représentations tensorielles

Dans l'écriture tridimensionnelle des lois de comportement, l'hypothèse d'isotropie conduit à utiliser les invariants des tenseurs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de leurs déviateurs définis par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathbf{1} \quad \text{ou} \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \tfrac{1}{3}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})\,\mathbf{1} \quad \text{ou} \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{3}\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}.$$

Ces tenseurs du second ordre possèdent trois invariants élémentaires définis par trois fonctions à valeurs scalaires indépendantes. Mathématiquement on définit ces trois invariants comme les coefficients de l'équation caractéristique :

$$\det (\boldsymbol{\sigma} - x\,\mathbf{1}) = 0$$

c'est-à-dire les quantités scalaires :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathrm{I}} &= \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\
\Sigma_{\mathrm{II}} &= \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}))^2 - \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}^2)] = \tfrac{1}{2}(\sigma_{ii}^2 - \sigma_{ij}\,\sigma_{ij}) \\
&= \sigma_{11}\,\sigma_{22} + \sigma_{22}\,\sigma_{33} + \sigma_{33}\,\sigma_{11} - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 - \sigma_{12}^2 \\
\Sigma_{\mathrm{III}} &= \det(\boldsymbol{\sigma})\,.
\end{aligned}$$

En pratique nous utiliserons plutôt les invariants suivants :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{I}} &= \Sigma_{\mathrm{I}} = \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}) \\
\sigma_{\mathrm{II}} &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}^2) = \tfrac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{ij} \\
\sigma_{\mathrm{III}} &= \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^3) = \tfrac{1}{3}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{jk}\,\sigma_{ki}\,.
\end{aligned}$$

De la même manière, on peut définir les invariants du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathrm{I}} &= \mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii} \\
\varepsilon_{\mathrm{II}} &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}^2) = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij} \\
\varepsilon_{\mathrm{III}} &= \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}^3) = \tfrac{1}{3}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{jk}\,\varepsilon_{ki}\,.
\end{aligned}$$

En plasticité on fait souvent intervenir les invariants des déviateurs de contrainte et de déformation plastique, définis de la même façon : s_{II}, s_{III}, $e_{p\mathrm{II}}$, $e_{p\mathrm{III}}$ (on a $s_{\mathrm{I}} = e_{p\mathrm{I}} = 0$). Par commodité d'écriture on sera amené à employer des fonctions de ces invariants qui représentent des grandeurs physiques concrètes. Il est pratique de choisir des invariants homogènes qui s'identifient en traction simple avec la première composante du tenseur. On définit ainsi :

- Pour les contraintes :

— la contrainte hydrostatique

$$J_1(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_I = 3\,\sigma_H$$

— la contrainte équivalente au sens de Mises

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = (3\,s_{\mathrm{II}})^{1/2} = \sigma_{\mathrm{eq}}$$

— le troisième invariant homogène à une contrainte unidimensionnelle

$$J_3(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{27}{2}\,s_{\mathrm{III}}\right)^{1/3}.$$

- Pour les déformations :

— la déformation volumique

$$J_1(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_I = 3\,\varepsilon_H$$

— la déformation inélastique équivalente au sens de Mises

$$I_2(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = (\tfrac{4}{3}\,e_{p\mathrm{II}})^{1/2} = \varepsilon_{p_{\mathrm{eq}}}\,.$$

Les invariants ainsi définis sont suffisants pour écrire les lois de comportement des matériaux isotropes. Dans le cas anisotrope on peut également utiliser des arguments tensoriels caractéristiques de l'anisotropie : soit par exemple la fonction **f** anisotrope reliant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ au tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans le cas d'une anisotropie générale.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) .$$

Si $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ sont les vecteurs de base du repère orthonormé d'une configuration de référence, on peut poser :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) .$$

A toute rotation $\vec{q}\vec{a}_1$, $\vec{q}\vec{a}_2$, $\vec{q}\vec{a}_3$ du repère, on peut associer les transformations

$$\vec{q}.\boldsymbol{\sigma}.\vec{q}^T \quad \text{et} \quad \vec{q}.\boldsymbol{\varepsilon}.\vec{q}^T$$

ce qui montre que **g** est une fonction isotrope pouvant alors s'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = C_p \, \mathbf{G}_p .$$

— Les $\mathbf{G}_p$ sont les tenseurs générateurs. Ils sont au nombre de 21 dans le cas général mais s'expriment linéairement en fonction d'un nombre inférieur de générateurs indépendants.

— Les C_p sont des coefficients, fonctions des 21 invariants associés au tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ et aux trois vecteurs $\vec{a}_1 \, \vec{a}_2 \, \vec{a}_3$, invariants qui s'expriment eux aussi en fonction d'un nombre inférieur d'invariants indépendants.

3. ÉNONCÉS FONDAMENTAUX DE LA THERMODYNAMIQUE

3.1. Lois de conservation, premier principe

L'équation d'équilibre établie au paragraphe précédent peut être interprétée comme une forme de la loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathscr{Q}} \rho \vec{v} \, \mathrm{d}V - \int_{\partial \mathscr{Q}} \vec{T} \mathrm{d}S = \int_{\mathscr{Q}} \vec{f} \, \mathrm{d}V$$

car on peut l'en déduire par application du théorème de la divergence avec

$$\vec{T} = \boldsymbol{\sigma}.\vec{n} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{\gamma}$$

$\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right.$ désignant toujours la dérivée particulaire$\left.\right)$.

De la même façon, la symétrie du tenseur des contraintes $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, qui résulte directement du principe des puissances virtuelles peut être considérée comme une conséquence de l'équation de conservation du moment cinétique.

La deuxième loi de conservation est la conservation de la masse qui, avec les notations introduites, s'exprime par :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{Q}} \rho \, \mathrm{d}V = 0 .$$

Premier principe de la thermodynamique

Il constitue la troisième grande loi de conservation : la conservation de l'énergie. Considérons encore un domaine $\mathscr{Q}$ de frontière $\hat{c}\mathscr{Q}$ intérieur au milieu matériel $\mathscr{S}$ étudié :

— soit E son énergie interne, e l'énergie interne spécifique

$$E = \int_{\mathscr{Q}} \rho e \, \mathrm{d}V$$

— soit K son énergie cinétique

$$K = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{Q}} \rho \vec{v}.\vec{v} \, \mathrm{d}V$$

— soit Q le taux de chaleur reçue par le domaine $\mathscr{Q}$; il comprend deux termes : la chaleur créée dans le volume $\mathscr{Q}$ par des actions extérieures à $\mathscr{Q}$ (chauffage inductif par exemple), et la chaleur reçue par conduction au travers de la frontière $\partial\mathscr{Q}$ de $\mathscr{Q}$

$$Q = \int_{\mathscr{Q}} r \, \mathrm{d}V - \int_{\partial\mathscr{Q}} \vec{q}.\vec{n} \, \mathrm{d}S$$

r est une densité volumique de production interne de chaleur à distance.
$\vec{q}$ est le vecteur courant de chaleur.
$\vec{n}$ est la normale extérieure à $\hat{c}\mathscr{Q}$.

— soit $P_{(x)}$ la puissance réelle des efforts extérieurs :

$$P_{(x)} = \int_{\mathscr{Q}} \vec{f}.\vec{v} \, \mathrm{d}V + \int_{\partial\mathscr{Q}} \vec{T}.\vec{v} \, \mathrm{d}S$$

le premier principe de la thermodynamique s'exprime par :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E + K) = P_{(x)} + Q} \quad \forall\mathscr{Q}$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{Q}} \rho\left(e + \frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}\right)\mathrm{d}V = \int_{\mathscr{Q}} (\vec{f}.\vec{v} + r)\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathscr{Q}} (\vec{T}.\vec{v} - \vec{q}.\vec{n})\,\mathrm{d}S\,.$$

Il est possible d'en déduire une expression locale ne faisant intervenir que la puissance des efforts intérieurs et la chaleur reçue. Pour cela écrivons le deuxième axiome du principe des puissances virtuelles appliqué ici au mouvement réel étudié :

$$P_{(x)} = P_{(a)} - P_{(i)}$$

en remarquant que

$$P_{(a)} = \int_{\mathscr{Q}} \rho\vec{\gamma}.\vec{v}\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_{\mathscr{Q}} \rho\vec{v}.\vec{v}\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}$$

il vient

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} - P_{(i)} + Q$$

avec

$$Q = \int_{\mathscr{Q}} r\,\mathrm{d}V - \int_{\partial\mathscr{Q}} \vec{q}.\vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathscr{Q}} r\,\mathrm{d}V - \int_{\mathscr{Q}} \mathrm{div}\,\vec{q}\,\mathrm{d}V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathscr{Q}} \rho e\,\mathrm{d}V = \int_{\mathscr{Q}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathscr{Q}} r\,\mathrm{d}V - \int_{\mathscr{Q}} \mathrm{div}\,\vec{q}\,\mathrm{d}V$$

Cette identité est vérifiée quel que soit le domaine $\mathscr{Q}$. D'après le lemme fondamental elle implique :

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r - \mathrm{div}\,\vec{q}$$

ou, dans l'hypothèse des petites perturbations :

$$\boxed{\rho\dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \mathrm{div}\,\vec{q}} \quad \text{ou} \quad \rho\dot{e} = \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij} + r - \dot{q}_{i,i}\,.$$

3.2. Entropie, deuxième principe

Après l'énergie interne et le taux de chaleur il faut encore introduire deux nouvelles variables, la température et l'entropie.

On suppose qu'il est possible de repérer la température par un champ à valeurs scalaires positives défini à chaque instant et en tout point du domaine $\mathscr{D}$ étudié : $T(M, t)$.

L'entropie exprime une variation d'énergie associée à une variation de température. On la définit pour un domaine $\mathscr{D}$ à partir d'une densité d'entropie spécifique s :

$$S = \int_{\mathscr{D}} \rho s \, \mathrm{d}V .$$

Le second principe

Il postule que le taux de production d'entropie est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue divisé par la température.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ désignant toujours la dérivée particulaire :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \geqslant \int_{\mathscr{D}} \frac{r}{T} \mathrm{d}V - \int_{\partial\mathscr{D}} \frac{\vec{q}.\vec{n}}{T} \mathrm{d}S} \quad \forall \mathscr{D}$$

ou encore en utilisant le théorème de la divergence :

$$\int_{\mathscr{D}} \left(\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \right) \mathrm{d}V \geqslant 0$$

cette inégalité, vérifiée quel que soit le domaine $\mathscr{D}$, entraîne la forme locale exprimant le taux de production irréversible d'entropie :

$$\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \geqslant 0 .$$

L'inégalité fondamentale contenant le second et le premier principe s'obtient en remplaçant r par son expression tirée de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{1}{T} \left(\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \operatorname{div} \vec{q} \right) \geqslant 0 .$$

En remarquant que

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) = \frac{\operatorname{div} \vec{q}}{T} - \frac{\vec{q}.\overrightarrow{\operatorname{grad}\, T}}{T^2}$$

et en multipliant par $T > 0$ on en déduit :

$$\rho \left(T \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}\, T}}{T} \geqslant 0 .$$

L'inégalité de Clausius-Duhem s'obtient en introduisant une nouvelle variable, l'énergie libre spécifique Ψ définie par :

$$\Psi = e - Ts .$$

Par dérivation, on exprime le premier terme de l'inégalité fondamentale,

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{de}{dt} - T\frac{ds}{dt} - s\frac{dT}{dt} \quad \text{ou} \quad T\frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} = -\left(\frac{d\Psi}{dt} + s\frac{dT}{dt}\right)$$

et finalement :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho\left(\frac{d\Psi}{dt} + s\frac{dT}{dt}\right) - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}\, T}}{T} \geqslant 0$$

ou dans l'hypothèse des petites perturbations

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T}) - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}\, T}}{T} \geqslant 0}$$

ou $$\sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T}) - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geqslant 0 .$$

4. MÉTHODE DE L'ÉTAT LOCAL

Pour éviter la confusion dans l'esprit du lecteur, il est grand temps de dresser un bilan des variables destinées à la description du comportement thermomécanique des milieux solides. C'est le potentiel thermodynamique qui va tout clarifier !! Mais avant de le définir, il y a lieu d'opérer un choix dans la nature des variables. Ce choix représente à la fois la faiblesse et la richesse de la méthode thermodynamique phénoménologique : faiblesse, car il est en partie subjectif et conduit à des modèles différents selon l'humeur des auteurs ; richesse, car il permet d'élaborer des théories adaptées à l'étude d'un ou plusieurs phénomènes couplés ou non, et ce, en fonction de l'utilisation qui doit en être faite.

4.1. Variables d'état

La méthode de l'état local postule que l'état thermomécanique d'un milieu matériel en un point et à un instant donnés est complètement défini par la connaissance des valeurs à cet instant d'un certain nombre de variables ne dépendant que du point considéré. Les dérivées temporelles de ces variables n'intervenant pas pour définir l'état, cette hypothèse implique que toute

évolution puisse être considérée comme une succession d'états d'équilibre. On exclut ainsi du champ d'application de cette théorie les phénomènes ultrarapides pour lesquels les échelles de temps des évolutions seraient de l'ordre des temps de relaxation de retour à l'équilibre thermostatique (vibrations atomiques). C'est par le choix de la nature et du nombre des variables d'état que l'on décrit plus ou moins finement les phénomènes physiques. Les processus ainsi définis seront thermodynamiquement admissibles si, à chaque instant de l'évolution, l'inégalité de Clausius-Duhem est satisfaite. Les variables d'état appelées aussi variables thermodynamiques ou variables indépendantes sont les variables observables et les variables internes.

4.1.1. *Variables observables*

Un certain nombre de variables d'état sont imposées par le formalisme de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus développé aux paragraphes précédents ; ce sont les variables observables :

— la température T
— la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ (en petites déformations).

On se limite à ces deux variables observables qui sont les seules qui interviendront dans les phénomènes d'élasticité, de viscoélasticité, de plasticité, de viscoplasticité, d'endommagement et de rupture.

Pour les phénomènes réversibles (ou élastiques) à chaque instant, l'état dépend uniquement de ces variables observables. Par exemple, la puissance réversible est définie à l'aide de la contrainte associée $\boldsymbol{\sigma}$

$$\Phi_e = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} .$$

4.1.2. *Variables internes*

Pour les phénomènes dissipatifs, l'état actuel dépend aussi de l'histoire passée, représentée dans la méthode de l'état local par les valeurs à chaque instant d'autres variables appelées variables internes.

La plasticité et la viscoplasticité nécessitent l'introduction de la variable déformation plastique (ou viscoplastique). En petites déformations, la déformation plastique notée $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est la déformation permanente associée à la configuration relâchée. Elle résulte de la déformation totale par « décharge élastique » conduisant à la partition des déformations

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^e .$$

Deux variables internes, liées par cette équation de partition, sont ainsi formellement définies : la déformation plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et la déformation thermoélastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ (comprenant éventuellement la dilatation thermique).

Les autres phénomènes tels que l'écrouissage, l'endommagement, la rupture nécessitent l'introduction d'autres variables internes de nature plus cachée. Elles représentent l'état interne de la matière (densité de dislocations, micro-

structure cristalline, configuration de microfissures et cavités, etc...), sans qu'il soit possible de les mesurer par des observations directes. Elles n'interviennent pas non plus directement dans les lois de conservation ni dans le second principe. on les appelle variables internes mais ce sont des variables d'état qui seront traitées comme les variables observables.

Il n'existe pas de méthode objective pour choisir la nature des variables internes les mieux adaptées à tel ou tel phénomène. Là encore, c'est l'expérience, le sens physique et bien souvent le type d'application envisagée qui guident ce choix. Elles seront précisées au fur et à mesure des besoins dans les différents chapitres. Pour leur étude générale nous les désignons par $V_1, V_2, \ldots, V_k \ldots$; V_k pouvant représenter soit une variable scalaire, soit une variable tensorielle.

4.2. Potentiel thermodynamique, lois d'état

Ayant défini les variables d'état, on postule l'existence d'un potentiel thermodynamique duquel dérivent les lois d'état. Sans entrer dans le détail disons que la donnée d'une fonction à valeur scalaire, concave par rapport à T, convexe par rapport aux autres variables d'état, permet de vérifier à priori les conditions de stabilité thermodynamique imposées par les inégalités que l'on peut déduire du deuxième principe.

On peut travailler d'une manière équivalente avec différents potentiels; nous choisissons le potentiel énergie libre spécifique Ψ, qui dépend des variables d'état observables et des variables internes :

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, V_k) .$$

En élastoplasticité (ou viscoplasticité). les déformations n'interviennent que sous la forme de leur partition $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^e$, soit

$$\Psi = \Psi([\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p], T, V_k) = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, V_k)$$

ce qui montre que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} .$$

On utilise l'inégalité de Clausius-Duhen avec

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k .$$

On obtient :

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \left(s + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} T} \geqslant 0 .$$

Une hypothèse classique permet d'annuler indépendamment certains termes de cette inégalité. On peut imaginer d'abord une transformation élastique à température constante ($T = 0$) et uniforme ($\overrightarrow{\text{grad}}\, T = 0$) qui ne modifie ni la déformation plastique ($\dot{\varepsilon}^p = 0$) ni les variables internes ($\dot{V}_k = 0$). Il faut pour cela considérer que les déformations élastiques peuvent se situer à des échelles de temps supérieures à celles qui remettraient en cause l'hypothèse de l'état local et inférieures à celles des phénomènes dissipatifs. L'inégalité de Clausius-Duhem devant être vérifiée quel que soit $\dot{\varepsilon}^e$, cela implique

$$\sigma - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} = 0 .$$

Cette égalité étant vérifiée, on peut imaginer une transformation thermique de dilatation, telle que $\dot{\varepsilon}^p = 0$, $\dot{V}_k = 0$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, T = 0$ qui impose à l'inégalité de n'être vérifiée que si :

$$s + \frac{\partial \Psi}{\partial T} = 0 .$$

Ces expressions définissent les lois de la thermoélasticité :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} \\ s &= - \frac{\partial \Psi}{\partial T} \end{aligned}}$$

Notons que

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^p}$$

ce qui montre que la contrainte est la variable associée à la déformation élastique, à la déformation totale et à la déformation plastique (avec le signe moins).

Par analogie avec les relations précédentes, on définit les variables forces thermodynamiques associées aux variables internes par :

$$A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} .$$

Ces relations constituent les lois d'état :

— l'entropie s et le tenseur des contraintes σ ayant été définis par ailleurs, la donnée du potentiel thermodynamique $\Psi(\varepsilon^e, T, V_k)$ fournira la théorie de la thermoélasticité couplée ou non ;

— par contre les variables A_k associées aux variables internes, n'ayant pas

encore été introduites, c'est la donnée du potentiel thermodynamique $\Psi(..., V_k)$ qui les définit ;

— s, σ et $A_1, A_2 ... A_k$ constituent les variables associées. Le vecteur formé par ces variables est le gradient de la fonction Ψ dans l'espace des variables T, ε^e, V_k. Ce vecteur est normal au graphe de la fonction Ψ.

Les variables associées forment un ensemble de variables normales en dualité avec les variables d'état observables et internes. Le tableau 5 résume l'ensemble des variables ainsi introduites.

Variables d'état		Variables associés
Observables	Internes	
ε		σ
T		s
	ε^e	σ
	ε^p	$-\sigma$
	V_k	A_k

Tableau 5. Variables thermodynamiques.

4.3. Dissipation. Lois complémentaires

Le potentiel thermodynamique, on l'a vu, permet d'écrire les relations d'état entre les variables observables et leurs variables associées, mais pour les variables internes, il ne permet que la définition de leurs variables associées. Pour décrire les processus dissipatifs, en particulier l'évolution des variables internes, il faut un formalisme complémentaire. C'est l'objet du potentiel des dissipations.

4.3.1. *Dissipation intrinsèque, dissipation thermique*

Compte tenu des lois d'état et en posant $\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ l'inégalité de Clausius-Duhem se réduit à l'expression de la dissipation qui doit être positive :

$$\Phi = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \dot{V}_k - \vec{g}.\vec{q}/T \geqslant 0 \quad .$$

On remarque que Φ est formé d'une somme de produits de variables forces ou variables duales telles que σ, A_k, $\vec{g}$ respectivement par les variables flux $\dot{\varepsilon}^p$, $-\dot{V}_k$, $-\vec{q}/T$. La somme des deux premiers termes :

$$\Phi_1 = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \dot{V}_k$$

est appelée dissipation intrinsèque (ou dissipation mécanique). C'est la dissipation plastique augmentée des dissipations associées à l'évolution des autres variables internes ; elle est généralement dissipée par l'élément de volume sous forme de chaleur. Le dernier terme :

$$\Phi_2 = -\vec{g} \cdot \frac{\vec{q}}{T} = -\frac{\vec{q}}{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, T$$

est la dissipation thermique par conduction.

4.3.2. *Potentiel de dissipation*

Pour définir les lois complémentaires relatives aux processus dissipatifs, on postule l'existence d'un potentiel de dissipation (ou pseudo-potentiel) s'exprimant comme une fonction à valeur scalaire continue et convexe par rapport aux variables flux, les variables d'état pouvant éventuellement intervenir comme paramètres :

$$\varphi(\dot{\varepsilon}^p, \dot{V}_k, \vec{q}/T).$$

Ce potentiel est une fonction convexe, positive et nulle à l'origine dans l'espace des variables flux $\dot{\varepsilon}^p$, $\dot{V}_k$, $\vec{q}/T$. Les lois complémentaires s'expriment alors par la propriété de normalité (ou dissipativité normale)

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}^p} \qquad A_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k} \qquad \vec{g} = -\frac{\partial \varphi}{\partial (\vec{q}/T)}.$$

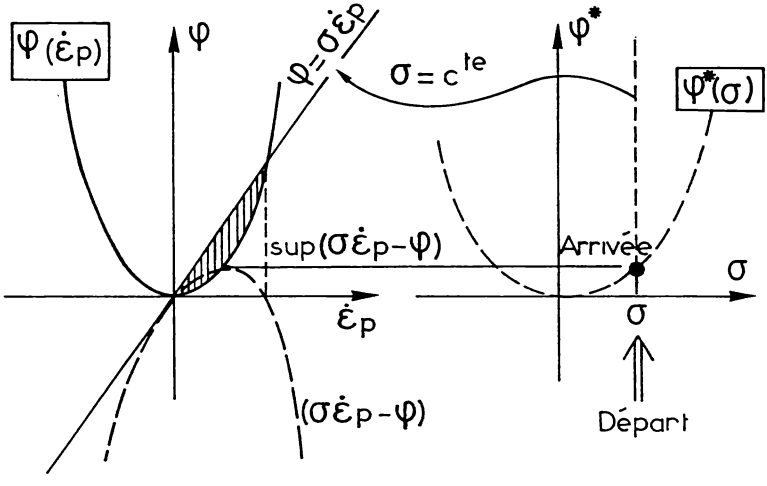


Fig. 6. — Construction du graphe d'un potentiel $\varphi^*(\sigma)$ dual de $\varphi(\dot{\varepsilon}_p)$ par la transformée de Legendre-Fenchel.

Les forces thermodynamiques sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ normal au graphe de φ dans l'espace des variables flux.

En fait il est plus commode d'exprimer les lois complémentaires sous la forme de lois d'évolution des variables flux en fonction des variables duales. La transformée de Legendre-Fenchel permet de définir le potentiel correspondant $\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, A_k, \vec{g})$, dual de φ par rapport aux variables $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, $\dot{V}_k$ et $\vec{q}/T$. Par définition :

$$\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, A_k, \vec{g}) = \sup_{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{V}_k, \vec{q}/T)} \left(\left[\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - A_k \dot{V}_k - \frac{\vec{g}.\vec{q}}{T} \right] - \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{V}_k, \frac{\vec{q}}{T}) \right).$$

Cette transformation, d'une écriture un peu barbare, peut être illustrée par le graphe de la figure 6 où l'on n'a retenu qu'une seule variable.

On démontre que si la fonction φ^* est dérivable la propriété de normalité est conservée pour les variables $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, $-\dot{V}_k$, $-\vec{q}/T$, les lois complémentaires d'évolution s'écrivant alors :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$-\dot{V}_k = \frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k}$$

$$-\frac{\vec{q}}{T} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \vec{g}}$$

Notons une fois encore les propriétés que doivent vérifier les potentiels φ et φ^* pour que le second principe soit automatiquement vérifié : être une fonction convexe, non négative et nulle à l'origine : ($\boldsymbol{\sigma} = A_k = \vec{g} = 0$). Dans la suite on utilisera généralement le potentiel φ^* et les relations d'évolution des variables flux. Cette règle de normalité est suffisante pour vérifier à priori le second principe ; elle n'est pas nécessaire. Les matériaux standard généralisés sont ceux pour lesquels cette règle s'applique. Le matériau standard est celui pour lequel seule la première relation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ s'applique. C'est cette première relation qui conduit aux lois de plasticité ou de viscoplasticité, la seconde exprime les lois d'évolution des variables internes, la troisième conduit à la loi de Fourier pour la thermostatique. Le tableau 7 résume les variables de dissipation.

Tout le problème de la modélisation des phénomènes réside dans la détermination de l'expression analytique du potentiel thermodynamique Ψ et du potentiel de dissipation φ ou de son dual φ^* et dans leur identification d'après des expériences caractéristiques. En fait les valeurs de φ ou de φ^* sont quasi inaccessibles à la mesure car elles représentent une énergie le plus souvent dissipée sous forme de chaleur. Les variables flux et les variables duales se

Variables flux	Variables duales
$\dot{\varepsilon}^p$	σ
$-\dot{V}_k$	A_k
$-\frac{\vec{q}}{T}$	$\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}\, T$

Tableau 7. Variables de dissipation.

prêtent bien mieux à la mesure et c'est sur leurs relations que portent la modélisation et l'identification.

Les lois complémentaires d'évolution sont donc identifiées directement mais le potentiel de dissipation sert de guide ou de cadre pour leur écriture.

Notons que l'écriture des potentiels de dissipation peut être généralisée en faisant intervenir les variables d'état elles-mêmes, qui jouent le rôle de paramètres. Le développement précédent n'est en rien modifié. Les potentiels de dissipation s'écrivent alors :

$$\varphi(\dot{\varepsilon}^p, \dot{V}_k, \vec{q}/T\,;\, \varepsilon^e, T, V_k)$$

$$\varphi^*(\sigma, A_k, \vec{g}\,;\, \varepsilon^e, T, V_k)\,.$$

4.3.3. *Relations de symétrie d'Onsager*

Une première simplification consiste à supposer que la fonction φ^* est une forme quadratique définie positive des variables duales. Si l'on désigne par

$\dot{V}_\alpha$ les variables flux,

A_α les variables duales,

le potentiel φ^* peut s'écrire :

$$\varphi^* = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}(\varepsilon^e, T, V_k)\, A_\alpha\, A_\beta\,.$$

Chaque loi complémentaire d'évolution est linéaire par rapport à la variable duale correspondante :

$$\dot{V}_\alpha = C_{\alpha\beta}\, A_\beta\,.$$

La matrice $C_{\alpha\beta}$ est symétrique. Cette propriété est connue sous le nom de relation de symétrie d'Onsager.

4.3.4. *Découplage des dissipations intrinsèque et thermique*

Une deuxième simplification consiste à supposer le découplage entre dissipation intrinsèque et dissipation thermique, ce qui n'implique pas que les

mécanismes correspondants soient découplés. Cela revient à considérer que le potentiel de dissipation est la somme de deux termes, l'un dépendant des variables duales σ. A_k l'autre faisant intervenir la variable $\vec{g}$:

$$\varphi^* = \varphi_1^*(\sigma.\ A_k) + \varphi_2^*(\vec{g})$$

et le second principe est satisfait par les inégalités respectives :

$$\Phi_1 = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \dot{V}_k = \sigma : \frac{\hat{c}\varphi_1^*}{\hat{c}\sigma} + A_k \frac{\hat{c}\varphi_1^*}{\hat{c}A_k} \geqslant 0$$

$$\Phi_2 = -\vec{g} \cdot \frac{\vec{q}}{T} = \vec{g} \cdot \frac{\hat{c}\varphi_2^*}{\partial \vec{g}} \geqslant 0 .$$

Notons que la première inégalité est automatiquement vérifiée puisque φ_1^* est convexe en σ. A_k et contient l'origine. On a alors :

$$\sigma : \frac{\hat{c}\varphi_1^*}{\hat{c}\sigma} + A_k \frac{\hat{c}\varphi_1^*}{\hat{c}A_k} \geqslant \varphi_1^* \geqslant 0 .$$

4.3.5. *Cas des phénomènes dissipatifs instantanés*

Lorsque le comportement est indépendant des vitesses, la fonction $\varphi_{(\dot{\varepsilon}_p, \dot{v}_k)}$ est positivement homogène de degré 1 et sa fonction duale φ^* est non différentiable.

Par extension, on écrit que $\dot{\varepsilon}^p$ appartient au sous-différentiel de φ^* défini par :

$$\partial\varphi^*_{(\sigma_0)} = \{\ \dot{\varepsilon}^p / \varphi^*_{(\sigma)} \geqslant \varphi^*_{(\sigma_0)} + \dot{\varepsilon}^p : (\sigma - \sigma_0),\ \forall \sigma\ \} .$$

Par ailleurs, on considère la fonction « critère » convexe $f(\sigma, A_k)$ dont le convexe, $f = 0$, a pour fonction indicatrice φ^* :

$$\varphi^* = 0 \qquad \text{si} \quad f < 0 \rightarrow \dot{\varepsilon}^p = 0$$

$$\varphi^* = +\infty \quad \text{si} \quad f = 0 \rightarrow \dot{\varepsilon}^p \neq 0 .$$

Une démonstration, qui n'est pas donnée ici, permet de prouver qu'il est équivalent d'écrire :

$$\dot{\varepsilon}^p \in \partial\varphi^*_{(\sigma)} \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\lambda} \quad \text{si} \quad \begin{cases} f = 0 \\ \dot{f} = 0 \end{cases}$$

où F est une fonction potentielle égale à f dans le cas des théories « associées » et $\dot{\lambda}$ un multiplicateur déterminé par la condition de consistance $\dot{f} = 0$.

Les équations décrivant la normalité (§ 4.3.2) sont à remplacer par :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}\frac{\hat{c}F}{\hat{c}\sigma} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}\frac{\hat{c}f}{\hat{c}\sigma}}$$

$$-\dot{V}_k = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial A_k} \qquad \boxed{-\dot{V}_k = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial A_k}}$$

5. ÉLÉMENTS DE THERMIQUE

5.1. Loi de Fourier

La loi de diffusion de la chaleur, ou loi de Fourier, relation linéaire entre le flux de chaleur $\vec{q}$ et sa variable duale $\vec{g}$ est une conséquence directe des deux simplifications précédentes apportées à l'écriture du potentiel de dissipation. En effet soit :

$$\varphi_2^* = \frac{1}{2}\mathbf{C}.\vec{g}.\vec{g}$$

et

$$-\frac{\vec{q}}{T} = \frac{\hat{c}\varphi_2^*}{\hat{c}\vec{g}} = \mathbf{C}.\vec{g} = \mathbf{C}.\overrightarrow{\text{grad}}\ T\,.$$

Si l'on fait l'hypothèse d'isotropie des propriétés de diffusion du milieu, le tenseur **C** se réduit à un scalaire. De plus, on considère que ce scalaire varie comme l'inverse de la température si bien que l'on peut poser :

$$\boxed{\vec{q} = -k\,\overrightarrow{\text{grad}}\ T} \quad \text{ou} \quad q_i = -kT,i$$

k est le coefficient de conductivité thermique, caractéristique du milieu (voir le tableau 8 pour les valeurs relatives à quelques matériaux particuliers).

5.2. Equation de la chaleur

Reprenons l'équation de conservation de l'énergie (premier principe)

$$\rho\dot{e} = \sigma : \dot{\varepsilon} + r - \text{div}\,\vec{q}$$

et remplaçons $\rho\dot{e}$ par son expression tirée de : $e = \Psi + Ts$:

$$\rho\dot{e} = \rho\dot{\Psi} + \rho T\dot{s} + \rho\dot{T}s$$

puis $\dot{\Psi}$ par son expression en fonction des variables d'état :

$$\rho\dot{e} = \rho\left[\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - s\dot{T} + \frac{1}{\rho}A_k\dot{V}_k\right] + \rho T\dot{s} + \dot{\rho}T\dot{s}$$

il vient

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + A_k\dot{V}_k + \rho T\dot{s} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \operatorname{div}\vec{q}.$$

Avec $s = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial T}(\dot{\varepsilon}^e, T, V_k)$ on peut encore exprimer $\dot{s}$ par

$$\dot{s} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varepsilon^e\,\partial T} : \dot{\varepsilon}^e - \frac{\partial^2\Psi}{\partial T^2}\dot{T} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial V_k\,\partial T}\dot{V}_k$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial s}{\partial T}\dot{T} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_k}{\partial T}\dot{V}_k.$$

En introduisant la chaleur spécifique définie par

$$C = T\frac{\partial s}{\partial T}$$

compte tenu de la loi de Fourier $\vec{q} = -k\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,T$

ou $\operatorname{div}\vec{q} = -k\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,T) = -k\,\Delta T$

et avec $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$

on obtient :

$$k\,\Delta T = \rho C\dot{T} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + A_k\dot{V}_k - r - T\left[\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial A_k}{\partial T}\dot{V}_k\right].$$

qui est l'équation complète de la chaleur, où Δ est l'opérateur Laplacien.

5.2.1. *Propagation de la chaleur*

L'équation de la chaleur classique correspond à un processus :

— sans variation de déformation inélastique, $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$
— sans variation des variables internes, $A_k\dot{V}_k = 0$
— sans production interne de chaleur créée par des sources externes, $r = 0$
— sans couplage thermomécanique, $\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = 0$, $\dfrac{\partial A_k}{\partial T}\dot{V}_k = 0$.

Les valeurs de ces deux derniers termes sont en effet négligeables dans la plupart des applications. La chaleur spécifique est alors la chaleur spécifique à déformation constante :

$$C = C_\varepsilon = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\varepsilon .$$

Le tableau 8 donne quelques valeurs particulières.

$$k\,\Delta T = \rho C_\varepsilon \dot{T} .$$

	Température de fusion T_M °C	Masse volumique ρ kg/m^3	Conductivité thermique k W/m °C	Chaleur spécifique C_ε J/kg °C
Duralumins	600	2 800	115 à 20 °C 150 à 200 °C	900 à 20 °C
Aciers	1 500	7 800	46 à 20 °C 29 à 900 °C	460 à 20 °C 625 à 900 °C
Laitons	900	8 600	128 à 400 °C	450 à 400 °C
Polymères	200	1 300		1 500 à 20 °C
Bétons	2 200	2 000	1.2 à 20 °C	880 à 20 °C
Bois	—	500	0,15 à 20 °C	2 000 à 20 °C

Tableau 8. Ordre de grandeur des caractéristiques thermodynamiques de quelques matériaux.

5.2.2. *Echauffement adiabatique*

L'équation complète de la chaleur permet également de trouver l'élévation de température d'un milieu sujet à dissipation mécanique. Pour cela il suffit de résoudre

$$\rho C\dot{T} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - A_k \dot{V}_k + r + k\,\Delta T + T\left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial A_k}{\partial T}\dot{V}_k\right].$$

L'équation classique utilisée pour calculer l'échauffement des matériaux métalliques lors des processus de mise en forme par exemple correspond à

$k\,\Delta T = 0$ évolution adiabatique.

$r = 0$ pas de production interne de chaleur créée par des sources externes.

$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = 0$, $\frac{\partial A_k}{\partial T}\dot{V}_k = 0$ pas de couplage thermomécanique.

$A_k \dot{V}_k$ représente l'énergie non récupérable stockée dans le matériau. Pour les matériaux métalliques cette énergie est celle des champs de microcontraintes résiduelles accompagnant l'augmentation de la densité des dislocations. Elle ne représente que 5 à 10 % du terme $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et souvent on la néglige

$$A_k \dot{V}_k \simeq 0 .$$

L'équation approchée de l'échauffement adiabatique est donc :

$$\boxed{\rho C_\varepsilon \dot{T} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} .$$

6. BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE 2

GERMAIN P., MULLER P. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson (1980).

GERMAIN P. *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson (1973).

VALID R. *La mécanique des milieux continus et le calcul des structures*. Eyrolles (1977).

BAMBERGER Y. *Mécanique de l'ingénieur, II : Milieux déformables*. Hermann (1981).

NEMAT-NASSER S. *Mechanics today*. Vol. I, II, III, IV, V. Pergamon Press (1972-1980).

SANCHEZ-PALENCIA E. *Non homogeneous media and vibration theory*. Springer Verlag (1980).

TRUESDELL C. *The elements of continuum mechanics*. Springer Verlag (1966).

ERINGEN A. C. *Mechanics of continua*. J. Wiley (1967).

KESTIN J., RICE J. R. *A critical review of thermodynamics*. Stuart Ed. Mono book (1970).

Chapitre 3

IDENTIFICATION ET CLASSIFICATION RHÉOLOGIQUE DES SOLIDES RÉELS

« L'expérience (d'un Laboratoire), c'est l'ensemble des erreurs qu'on ne recommencera plus. »

La mécanique et la thermodynamique des milieux continus (chap. 2) constituent les outils théoriques de base de la formulation des phénomènes physiques de déformation et de rupture. Pour des raisons fondamentales et pratiques, on modélise séparément chaque grande classe de phénomènes. Discerner d'un point de vue qualitatif et identifier les grands types de comportement, tel est l'objet de ce chapitre. La méthode phénoménologique utilisée repose sur l'observation des résultats expérimentaux. On donne donc quelques éléments sur les types d'essais, les machines et les techniques de mesure modernes qui peuvent être utilisés. Grâce aux progrès de l'électronique, des asservissements, des mesures digitales et plus récemment des microprocesseurs, les laboratoires de caractérisation des matériaux subissent ou subiront dans les années 70 et 80 une véritable mutation. De l'ère des mesures approximatives de quelques grandeurs on passe à l'ère de la mesure de l'évolution précise de toute variable mathématiquement bien définie. L'identification de modèles complexes devient possible mais elle nécessite des méthodes numériques d'identification de processus non linéaires qui restent encore du domaine de techniques « heuristiques ».

La classification schématique qui en résulte permet d'associer à priori à chaque matériau une théorie des seuls phénomènes prépondérants, et ce dans un domaine limité des variables d'état. Outre l'intérêt fondamental, ceci permet de guider le choix des matériaux au niveau de la conception et de simplifier l'estimation de la résistance en service au niveau des calculs de structure. La méthode utilisée est celle de la rhéologie initiée par Bingham vers 1930, et dont les développements décisifs ont été acquis lors de la décennie 1950-1960.

1. LA MÉTHODE PHÉNOMÉNOLOGIQUE GLOBALE

On distingue généralement trois grandes méthodes de formulation des lois de comportement des matériaux :

— l'approche microscopique qui tente de modéliser les mécanismes de déformation et de rupture aux échelles atomique et cristalline ou moléculaire, tels qu'ils sont décrits au chapitre 1 ; le comportement macroscopique étant le résultat d'une intégration ou d'une moyennisation des variables microscopiques à l'échelle de l'élément de volume de la mécanique ;

— l'approche thermodynamique qui introduit un milieu continu homogénéisé équivalent au milieu réel et qui représente les phénomènes physiques microscopiques par des « variables internes » macroscopiques ;

— l'approche fonctionnelle qui conduit à des lois héréditaires de type intégral faisant intervenir des fonctions caractéristiques des matériaux, exprimées elles aussi en termes de variables macroscopiques ; elle sera utilisée partiellement dans le paragraphe viscoélasticité du chapitre 4.

Aucune de ces trois approches ne permet des identifications directes : les variables microscopiques (densité de dislocations, densité de cavités, texture, ...) sont difficilement mesurables, et difficilement utilisables dans les calculs pratiques, les potentiels thermodynamiques sont pratiquement inaccessibles aux mesures ; les variables internes, par définition, ne sont pas directement mesurables ; les fonctions héréditaires nécessitent la connaissance de toute l'histoire des variables observables ce qui pose des problèmes tant d'ordre théorique que d'ordre expérimental.

La méthode phénoménologique globale consiste à étudier l'élément de volume de matière au travers des relations de cause à effet qui existent entre les variables physiquement accessibles constituant les entrées et les sorties du processus étudié. On détermine ainsi les réponses du matériau à des entrées spécifiques. Ces réponses sont suffisantes pour caractériser qualitativement les matériaux mais elles ne constituent pas (sauf pour les phénomènes linéaires) des lois de comportement.

Par élément de volume au sens de la mécanique physique des solides, il faut entendre un volume suffisamment important par rapport aux hétérogénéités de la matière et suffisamment petit pour que les dérivées partielles des équations de la mécanique des milieux continus aient un sens. Le tableau 1 ci-dessous donne l'ordre de grandeur de tailles raisonnables d'éléments de

Matériaux	Hétérogénéités	Eléments de volume
Métaux et alliages	cristal 1 µm à 0.1 mm	0,5 × 0,5 × 0,5 mm
Polymères	molécule 10 µm à 0.05 mm	1 × 1 × 1 mm
Bois	fibres 0,1 à 1 mm	1 × 1 × 1 cm
Béton	granulats ≃ 1 cm	10 × 10 × 10 cm

Tableau 1. Ordre de grandeur des éléments de volume représentatifs

volume représentatifs en dessous desquels il est illusoire de donner un sens physique aux contraintes ou déformations autre que celui d'une moyenne sur le volume « homogénéisé » en question.

Les variables physiquement accessibles de l'élément de volume sont celles que l'on peut déduire simplement des 4 grandeurs mesurables classiques de la mécanique : déplacements, force, temps, température.

- Les déformations et leurs vitesses :

— déformation totale tridimensionnelle $\boldsymbol{\varepsilon}$ ou unidimensionnelle ε avec son expression en grandes déformations $\varepsilon_v = \ln(1 + \varepsilon)$,

— déformation élastique réversible $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ou ε_e

— déformation permanente $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ou ε_p.

- La contrainte tridimensionnelle $\boldsymbol{\sigma}$ ou unidimensionnelle σ avec son expression approchée en grandes déformations $\sigma_v \simeq \sigma(1 + \varepsilon)$.

- La température T.

- Le temps t ou le nombre de cycles à rupture t_R ou N_R.

La classification qui découle de la méthode phénoménologique globale ne doit pas être considérée comme intrinsèque ; il s'agit seulement de repères de caractéristiques d'ensemble. Le comportement d'un matériau donné ne peut être représenté par un modèle schématique qu'en fonction de l'utilisation souhaitée et de la précision désirée.

Tel acier à température ambiante pourra être considéré comme :

— élastique linéaire pour un calcul de déformation d'une structure,
— viscoélastique pour un problème d'amortissement de vibrations,
— rigide parfaitement plastique pour un calcul de charges limites,
— élastoplastique écrouissable pour un calcul précis de déformations permanentes,
— élastoviscoplastique pour les problèmes de relaxation des contraintes,
— endommageable par ductilité pour un calcul de limite de mise en forme,
— endommageable par fatigue pour un calcul de durée de vie,
— etc...

2. ÉLÉMENTS SUR LES TECHNIQUES D'EXPÉRIMENTATION ET D'IDENTIFICATION

2.1. Essais caractéristiques

Les essais classiques de caractérisation se font essentiellement en traction ou en traction-compression simples, à température constante. C'est donc sur eux qu'est fondée la classification des solides réels. L'éprouvette est soumise à

une sollicitation axiale (Force ou Déplacement) qui engendre un état de contrainte ou de déformation uniformes dans tout le volume utile ce qui permet de l'assimiler à un élément de volume. Ce qui suit s'applique dans le cas des matériaux isotropes. Quelques indications complémentaires pour les matériaux anisotropes sont données au § 2.1.8.

L'état uniaxial est défini par un état unidimensionnel en contrainte mais bidimensionnel en déformation :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^* \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \varepsilon \end{bmatrix}$$

où ν^* est le coefficient de contraction, égal au coefficient de Poisson ν en élasticité.

En élastoplasticité ou élastoviscoplasticité les hypothèses de découplage des déformations élastique et plastique ($\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$) et d'incompressibilité plastique ($\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = 0$) permettent d'exprimer simplement le coefficient de contraction ν^*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^* \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_e & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_p \end{bmatrix}$$

$$\nu^* = \nu \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon}$$

ou avec la loi d'élasticité linéaire : $\varepsilon_e = \dfrac{\sigma}{E}$

$$\boxed{\nu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{E\varepsilon}\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}.$$

Le graphe de cette fonction, confronté à quelques résultats expérimentaux pour un alliage d'aluminium dont la courbe d'écrouissage à l'allure de celle de la figure 3, est donné sur la figure 2.

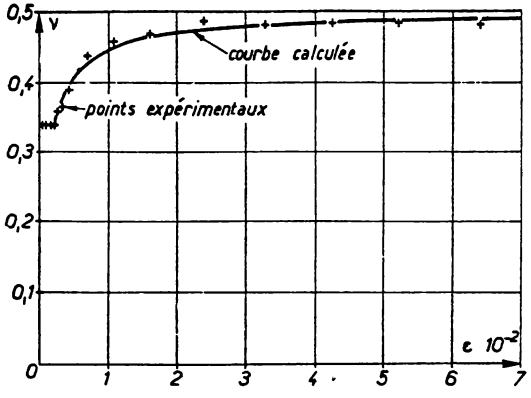


Fig. 2. Coefficient de contraction élastoplastique Alliage d'aluminium AU4G (2024).

2.1.1. *Essai d'écrouissage en traction ou compression simples*

C'est l'essai le plus courant. L'éprouvette est soumise à une déformation à vitesse constante. La réponse est constituée par la variation de la contrainte σ en fonction de la déformation ε qui met en évidence le durcissement du matériau (fig. 3).

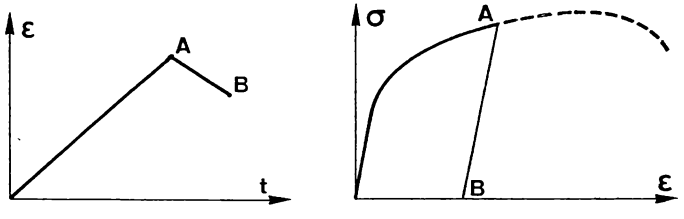


Fig. 3. Essai d'écrouissage.

2.1.2. *Essai de fluage en traction ou compression simples*

L'éprouvette est soumise à un échelon de contrainte (contrainte apparente généralement) et l'on étudie comment varie la déformation ε en fonction du temps t, ce qui caractérise le durcissement et la viscosité du matériau (fig. 4). L'attente à contrainte nulle (point B) correspond à *l'essai de recouvrance*. La recouvrance partielle de la déformation est schématisée sur la partie droite de la figure 4.

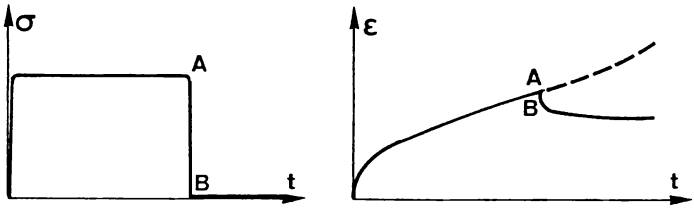


Fig. 4. Essai de fluage puis de recouvrance.

2.1.3. *Essai de relaxation en traction ou compression simples*

C'est l'essai dual du précédent : la réponse en contrainte à un échelon déformation ; elle est gouvernée principalement par la viscosité mais dépend du durcissement induit par le chargement initial (fig. 5).

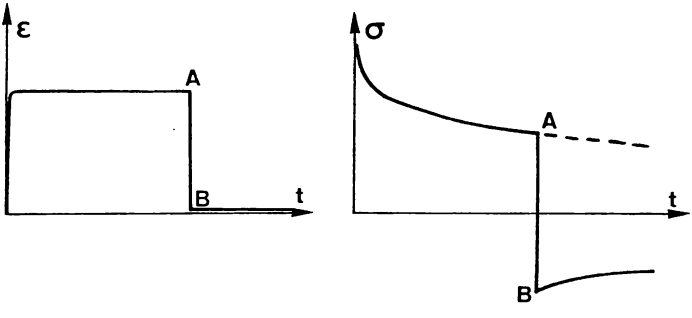


Fig. 5. Essai de relaxation.

2.1.4. *Essai d'écrouissage-relaxation multiple*

Comme son nom l'indique il combine deux types d'essai et permet de caractériser par un seul essai sur une seule éprouvette l'écrouissage du matériau et sa viscosité par des relaxations effectuées successivement à différentes valeurs de déformation (fig. 6).

2.1.5. *Essais cycliques*

L'éprouvette est soumise à une sollicitation (contrainte ou déformation) périodique et l'on étudie l'évolution des cycles réponses dans le graphe (σ, ε) (fig. 7).

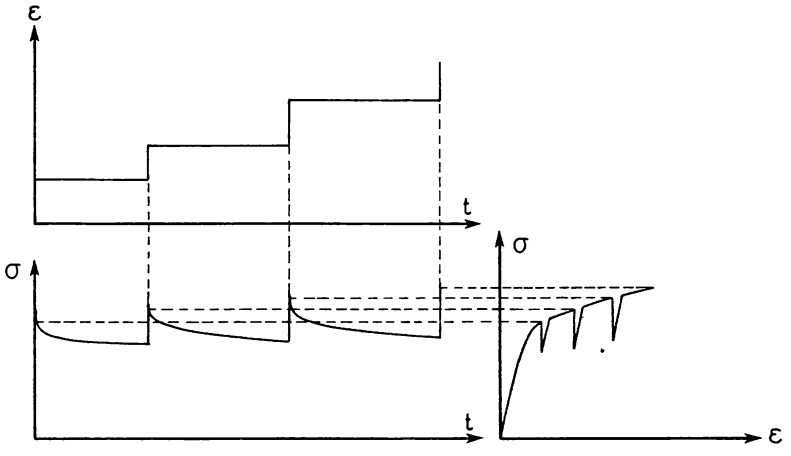


Fig. 6. Essai d'écrouissage relaxation-multiple.

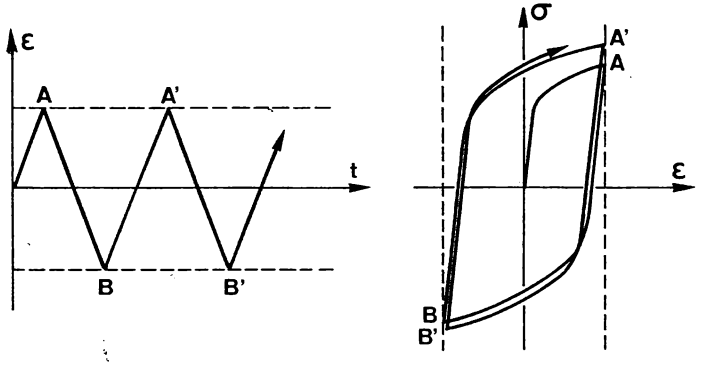


Fig. 7. Essai cyclique à déformation imposée.

En général la réponse tend à se stabiliser au bout d'un certain nombre de cycles. On utilise alors la courbe cyclique qui représente le lieu des sommets des boucles stabilisées correspondant à différents niveaux de contrainte ou de déformation (fig. 8). Dans le cas des matériaux polymères ou, plus généralement, des matériaux viscoélastiques, les sommets des boucles sont difficiles à définir. On parle alors d'essais « harmoniques ».

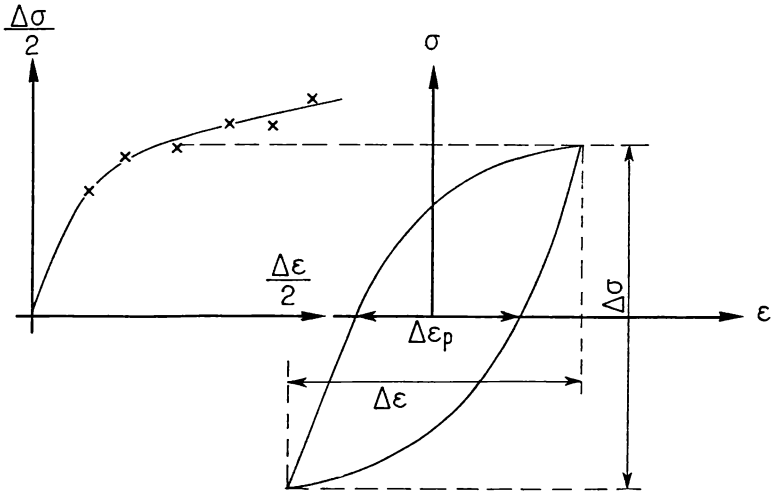


Fig. 8. Courbe d'écrouissage cyclique.

2.1.6. *Essais de rupture*

On utilise les 4 types d'essais précédents en mesurant les conditions correspondantes à la rupture :

— contrainte et déformation à rupture ;

— temps ou nombre de cycles à rupture ;

— énergie dissipée à rupture.

Certaines caractéristiques nécessitent l'utilisation d'éprouvettes de géométries particulières (éprouvettes entaillées pour la mesure de la résilience dans l'essai Charpy, éprouvettes fissurées pour la mesure de la ténacité, etc...).

2.1.7. *Essais multidimensionnels*

Ils sont malheureusement peu pratiqués à cause des difficultés expérimentales. Parmi les essais possibles : traction-cisaillement (ou compression-cisaillement), traction biaxiale, compression triaxiale, c'est l'essai de traction-cisaillement par traction-torsion de tubes qui présente le plus d'intérêt pour la caractérisation de l'anisotropie. La force de traction et le couple de torsion sont appliqués soit simultanément, soit successivement et l'on enregistre la rotation et l'allongement correspondants.

2.1.8. *Problème des matériaux anisotropes*

Les difficultés sont encore plus grandes dans le cas des matériaux anisotropes, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe des directions privilégiées :

— l'essai de traction ou de compression est encore facile à interpréter lorsqu'il est réalisé dans une direction principale d'anisotropie,

— l'essai de torsion sur éprouvette creuse est déjà plus délicat : pour une éprouvette taillée dans une tôle anisotrope par exemple, les déformations de cisaillement ne sont plus uniformes sur la circonférence (les modules de cisaillement en travers long et en travers court sont différents).

D'une façon générale les essais multidirectionnels sur matériaux anisotropes ne peuvent être interprétés sans faire référence à une modélisation particulière. Seul l'essai biaxial réalisé dans les directions principales d'anisotropie permet de s'en affranchir.

2.2. Techniques expérimentales

2.2.1. *Machines d'essais*

La méthode phénoménologique nécessite la réalisation d'expériences sur un élément de volume de matière. Dans la mesure du possible les éprouvettes doivent être soumises à des champs uniformes de contrainte, déformation et température : c'est là une des difficultés des essais mécaniques de caractérisation.

2.2.1.1. *Essais unidimensionnels monotones et cycliques*

L'essai le plus couramment utilisé est l'essai en traction simple dans lequel la partie utile de l'éprouvette est soumise à un champ de contrainte uniaxial. La figure 9 donne le schéma de principe d'une installation moderne, dont les parties essentielles sont :

— le système d'amarrage des têtes d'éprouvettes,

— le dynamomètre mesurant l'effort appliqué à l'éprouvette,

— le capteur de mesure de l'allongement de l'éprouvette,

— le bâti de la machine, dont la rigidité doit être aussi importante que possible,

— le système de chauffage,

— le système d'application des efforts.

En fonction du type de chargement imposé, l'application des efforts se fait de diverses manières : système de masse pour les machines de fluage, système écrou-vis sans fin actionnée par moteur électrique, système hydraulique à servo-commande pour les installations plus sophistiquées.

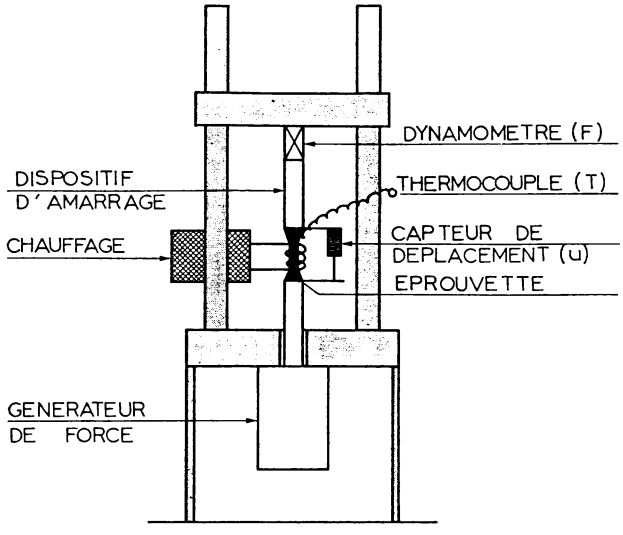


Fig. 9. Machine d'essais en traction-compression.

L'éprouvette elle-même comprend une partie utile constituée d'un fût cylindrique (fig. 10) des têtes de fixation et, entre les deux, des raccordements conçus pour minimiser les concentrations de contrainte.

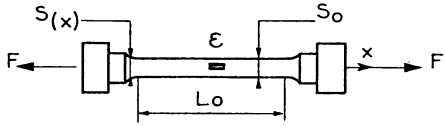


Fig. 10. Eprouvette de traction.

Pour les essais de traction la partie utile peut être très longue, les limitations proviennent de l'usinage et du système de chauffage. Au contraire, les essais de compression exigent des éprouvettes beaucoup plus compactes pour éviter les problèmes de flambement. Des exemples concrets sont donnés au paragraphe 2.2.3.

Pour les essais à température élevée, on utilise les fours à résistance, le chauffage par effet Joule (résistance électrique de l'éprouvette) ou le chauffage par induction haute fréquence qui est certainement la meilleure solution pour les essais de courte ou moyenne durée. Le choix de la technique dépend du type d'essai (monotone ou cyclique), et des températures à obtenir (température uniforme et constante ou température variable).

2.2.1.2. *Essais multidimensionnels*

Il s'agit de réaliser des états de contrainte complexes sur un élément de volume qui puisse être considéré comme isostatique. L'état de contrainte doit pouvoir être déterminé par les seules équations d'équilibre globales, indépendamment du comportement. Différentes techniques sont utilisées.

Essais en traction-compression-pression interne ou externe d'éprouvettes cylindriques creuses.

Cette technique est intéressante car elle ne nécessite pas de machines spéciales. Les dispositifs de pressurisation hydrauliques (à température ambiante) ou à gaz (à température élevée) s'adaptent sur la plupart des machines de traction-compression. Si l'épaisseur e des parois de l'éprouvette est suffisamment petite par rapport au rayon R, on obtient des états biaxés quelconques, on peut même simuler un cisaillement pur ($\sigma_2 = -\sigma_1$) mais les directions principales des contraintes restent fixes (fig. 11).

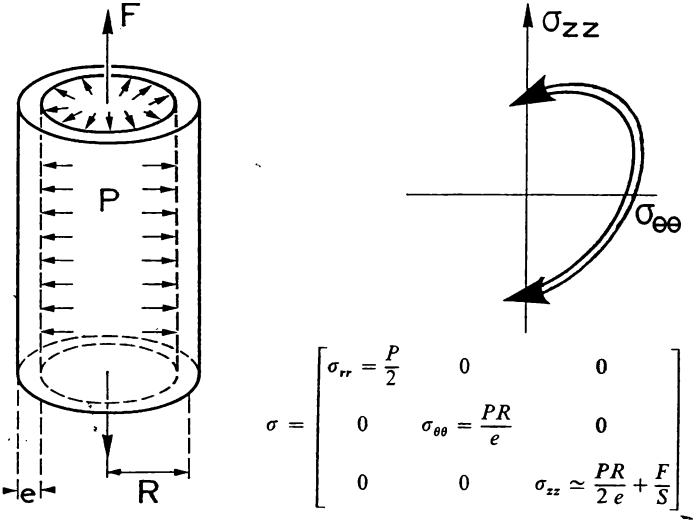


Fig. 11. Cas de traction-compression-pression interne et domaine de contraintes possible.

En mécanique des sols et des roches on pratique beaucoup ce type d'essai mais sur des éprouvettes pleines avec pression externe produite par une cellule de pression.

Essais en traction-compression-torsion sur éprouvettes cylindriques creuses.

Les états de contrainte possibles sont plus limités mais on peut étudier des trajets de chargement avec variation des directions principales des contraintes (fig. 12). La machine est constituée d'un vérin linéaire et d'un vérin torique avec dispositif de découplage. Les machines modernes hydrauliques asservies sont pilotées par ordinateur.

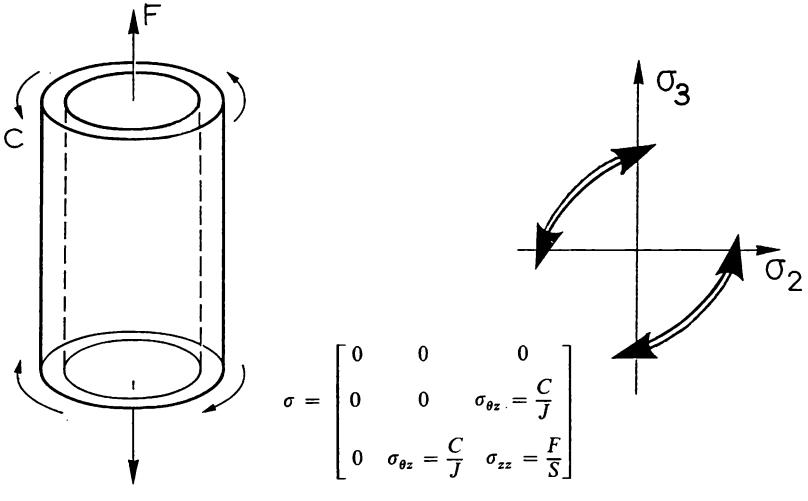


Fig. 12. Cas de traction-compression-torsion et domaine de contraintes possible. (C est le couple de torsion, J est le moment d'inertie de torsion de l'éprouvette.)

Essais biaxiaux sur éprouvettes cruciformes.

La machine nécessite deux ou quatre vérins linéaires placés à 90°. Pour réaliser des états de contrainte uniformes, il faut que les bras de la croix aient une rigidité transversale assez faible. On peut par exemple pratiquer des évidements (fig. 13). Les chargements possibles sont tels que les contraintes principales sont positives, leur direction est constante.

On peut aussi réaliser des cas de traction biaxée sur des éprouvettes en tôles planes ou en forme de calottes sphériques sollicitées par une pression, mais on ne peut décrire que des chemins de chargement radiaux ($\sigma_{00} = \sigma_{\Phi\Phi}$).

Essais en compression triaxiale

Ce type d'essai est surtout utilisé en mécanique des sols et des roches, il nécessite des machines de mise au point très délicate.

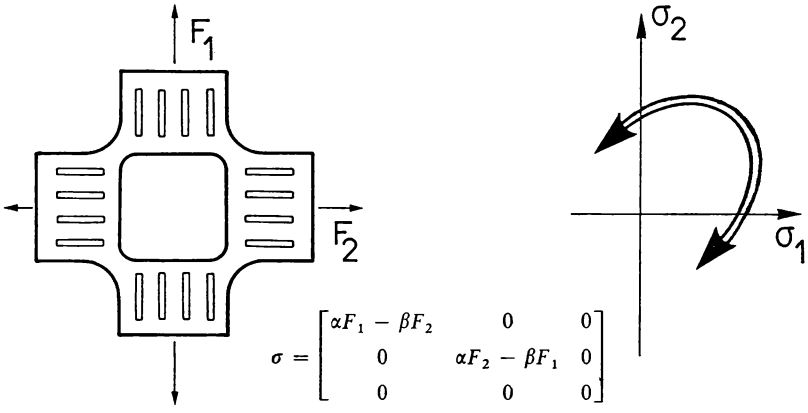


Fig. 13. Cas de bitraction et domaine de contraintes possible.

2.2.2. *Techniques de mesure des variables caractéristiques*

2.2.2.1. *Forces et contraintes*

Les contraintes se déduisent des forces sollicitatrices par les équations de la statique pour les cas isostatiques. Trois exemples sont donnés sur les figures 11, 12, 13.

Les forces (ou couples) appliqués aux éprouvettes sont mesurés par des dynamomètres montés en série avec les éprouvettes. Les dynamomètres à jauges de déformation permettent d'atteindre une précision relative de 10^{-3} ce qui est en général suffisant pour la caractérisation des matériaux.

2.2.2.2. *Déplacements et déformations*

La mesure du déplacement relatif de deux points d'une éprouvette est beaucoup plus délicate que la mesure de la force sollicitatrice car il s'agit de monter un capteur « en parallèle » avec l'éprouvette et non en série. On utilise essentiellement deux techniques : les mesures locales par jauges électriques de déformation et les mesures globales de déplacements.

Jauges extensométriques

Un fil résistant bien collé sur une éprouvette subit le même allongement que cette dernière; il s'ensuit donc une variation de résistance électrique qui se trouve être proportionnelle à la déformation ε. Une mesure précise de cette variation de résistance dans un pont de Wheastone permet de déceler des déformations de l'ordre de $\varepsilon = 10^{-7}$. C'est le qualificatif de « bien collé » du début de ce paragraphe qui limite l'emploi de cette technique particulière-

ment commode. Les colles ne résistent pas aux températures élevées si bien que les mesures de déformation par jauges ne sont utilisées qu'à la température ambiante, au-dessous de la température ambiante et aux températures peu élevées ne dépassant pas 200 à 400 °C.

Capteurs de déplacement.

La déformation peut aussi se déduire, par les équations de la mécanique des milieux continus, du déplacement de deux points matérialisés de l'éprouvette. Le déplacement axial peut être mesuré par un extensomètre fixé soit sur le fût cylindrique de l'éprouvette par des couteaux, soit sur les têtes d'amarrage de l'éprouvette. On peut aussi mesurer la variation du diamètre de l'éprouvette en évitant d'utiliser des couteaux qui souvent induisent une amorce de rupture mais le dépouillement doit tenir compte de la variation du coefficient de Poisson avec la déformation plastique (voir § 2.1). Les extensomètres inductifs ou à jauges de déformation permettent d'atteindre une précision absolue de l'ordre de 1 μm. Les extensomètres optiques permettent d'abaisser à 0,2 μm cette précision mais ils sont coûteux et d'emploi délicat.

2.2.2.3. *Déformation plastique. Longueur utile des éprouvettes*

On appelle longueur utile d'une éprouvette la longueur L_0 qui sous sollicitation devient L et qui permet de calculer la déformation longitudinale ε par la simple relation

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}.$$

La déformation plastique se mesure en retranchant la déformation élastique à la déformation totale ε (mesurée par une jauge électrique par exemple). En traction (compression) on a ainsi :

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \varepsilon_e = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} = \varepsilon - \frac{F}{ES}$$

S étant la section de l'éprouvette.

Le module d'élasticité est donné par le début de l'essai, lorsque l'effort est suffisamment faible pour que l'éprouvette reste élastique ; on a alors

$$E = \frac{F}{S\varepsilon_e}.$$

Lorsque l'extensométrie ne peut être montée directement sur la partie cylindrique de l'éprouvette, on a recours à une longueur utile équivalente corrigée pour tenir compte de la déformation plastique dans les zones de raccordement. Avec les notations de la figure 10, celle-ci est définie par :

$$L_p = \frac{u_p}{\varepsilon_{p(0)}} = 2\int_0^{L/2} \frac{\varepsilon_p(x)}{\varepsilon_{p(0)}}\,dx.$$

On verra au chapitre 5 que la déformation plastique peut s'exprimer comme une fonction puissance de la contrainte $\varepsilon_p = (\sigma/K)^{1/M}$. Par une méthode de tranches, en négligeant les effets de triaxialité dans la zone de raccordement, on montre facilement que :

$$L_p = 2 \int_0^{L/2} \left(\frac{S_0}{S_{(x)}} \right)^M dx \quad .$$

La longueur utile plastique est donc définie à partir de la géométrie de l'éprouvette (loi des sections $S(x)$) et de l'exposant d'écrouissage. La façon de procéder pour mesurer la déformation plastique est donc la suivante :

— établir la relation Force-Déplacement par enregistrement direct dans l'essai de traction (par exemple)

— retrancher les jeux u_j et le déplacement élastique pour obtenir le déplacement plastique, la raideur R de l'ensemble éprouvette et amarrages au niveau de l'extensomètre étant obtenue par l'enregistrement initial dans le domaine élastique (fig. 14)

$$u_p = u - u_j - \frac{F}{R}$$

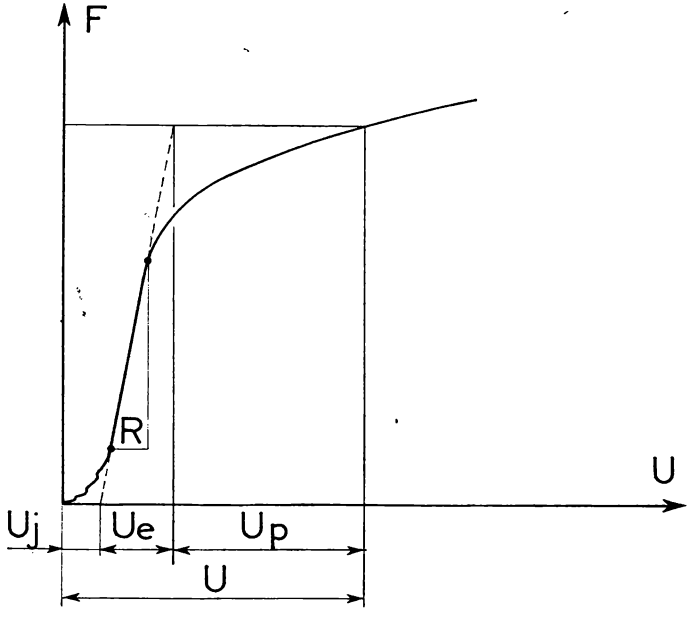


Fig. 14. Enregistrement brut d'un essai d'écrouissage.

— la relation $F(u_p)$ fournit une approximation de l'exposant d'écrouissage M. Il y a en effet identité entre les exposants des lois puissance :

$$\sigma = K\varepsilon_p^M \quad \text{et} \quad F = K' u_p^M$$

puisque

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{et} \quad \varepsilon_p = \frac{u_p}{L_p}$$

— on en déduit la longueur utile équivalente L_p et donc

$$\varepsilon_p = \frac{u_p}{L_p}.$$

Notons que cette longueur utile peut être définie au moyen d'un essai préalable pour une éprouvette, un matériau et une température donnés. Même si les hypothèses faites pour son établissement ne sont pas parfaitement rigoureuses elles sont suffisantes puisqu'il s'agit en fait d'une correction par rapport à la longueur de la zone cylindrique.

2.2.2.4. *Température*

La technique la plus utilisée est celle des thermocouples : la mesure de la force électromotrice qui naît par effet Pelletier entre une soudure « chaude » de deux fils, tels que chromel-alumel par exemple, et leurs extrémités placées à une même température de référence.

Si l'on dispose d'un appareil de mesure sensible au μV la précision théorique des thermocouples chromel-alumel est de $2{,}5.10^{-2}$ °C. Cette précision est largement suffisante pour les essais de caractérisation des matériaux où l'on peut se satisfaire d'une précision absolue de l'ordre de ± 0,1 à 0,5 °C. C'est en viscoplasticité que la situation est la plus critique. Un calcul fondé sur la relation de Dorn exposée au chapitre 6 qui exprime la variation de vitesse de déformation plastique en fonction de la température :

$$\dot{\varepsilon}_p = f(\sigma, \ldots) \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right)$$

permet de montrer que la précision relative à exiger sur la température doit être de l'ordre de 15 à 70 fois supérieure à la précision relative souhaitée sur la déformation

$$\frac{\delta\varepsilon_p}{\varepsilon_p} \simeq 15 \text{ à } 70 \frac{\delta T}{T}.$$

Une mesure de déformation de la classe de précision de 2 % impose à 500 °C une température uniforme sur l'éprouvette et contrôlée à environ 0.5 ° près.

Les thermocouples doivent être soudés sur l'éprouvette, ce qui constitue une

amorce de rupture. On ne peut donc les utiliser que pour les essais destinés à l'étude du comportement à la déformation. Pour les essais de rupture statique ou par fatigue on peut employer des capteurs optiques qui mesurent l'émission infrarouge de l'éprouvette. Un inconvénient toutefois, le pouvoir émissif des éprouvettes varie avec leur état d'endommagement.

2.2.2.5. *Endommagement*

On verra au chapitre 7 que les mesures globales d'endommagement ne font appel qu'à des évaluations de contraintes et de déformations en fonction du temps ou du nombre de cycles.

2.2.2.6. *Longueur ou surface de fissure*

Il s'agit de mesures souvent délicates car la pointe ou le front de fissure ne sont pas toujours bien définis physiquement et correspondent à des zones fortement endommagées bourrées de microfissures.

Mesures optiques

C'est la mesure visuelle directe ou, plus précisément, par procédé photographique : un appareil à déclenchement automatique fournit une image à intervalles de temps réguliers. Après développement et agrandissement (il faut des repères dans la zone utile pour servir d'échelle) on obtient la longueur de fissure par mesure directe. La précision du résultat dépend de l'éclairement, de l'agrandissement, de la qualité des repères et de la bonne définition de la pointe de fissure. Elle varie entre 0,05 et 0,1 mm.

Jauges à fils coupés

Elles sont constituées de fils espacés de 0,5 à 1 mm collés sur un support que l'on peut lui-même coller en amont de la pointe de fissure à mesurer. Lorsque la fissure progresse, elle coupe les fils les uns après les autres, ce qui conduit à une variation de résistance de la jauge ou bien à un signal incrémental qui permet de déclencher un enregistreur. La précision de ce système sans interpolation est de l'ordre de l'espacement des fils.

Méthode du potentiel

L'éprouvette ou l'élément fissuré, conducteur mais isolé, est alimenté, loin de la fissure, par un courant de forte intensité ($I \simeq 20$ A), continu, séquentiel de préférence. Une prise de potentiel, dont les deux points sont situés de part et d'autre et près de la fissure, mesure une tension V qui est fonction des dimensions de l'éprouvette, des positions des points d'alimentation en courant et de prise de potentiel, et de la longueur de la fissure a. Une mesure de V permet donc de connaître a, si par un étalonnage préalable à l'aide d'autres moyens de mesure ou bien à l'aide d'un calcul, on connaît la fonction $a(V)$. Un schéma de cette technique de mesure est donné sur la figure 15.

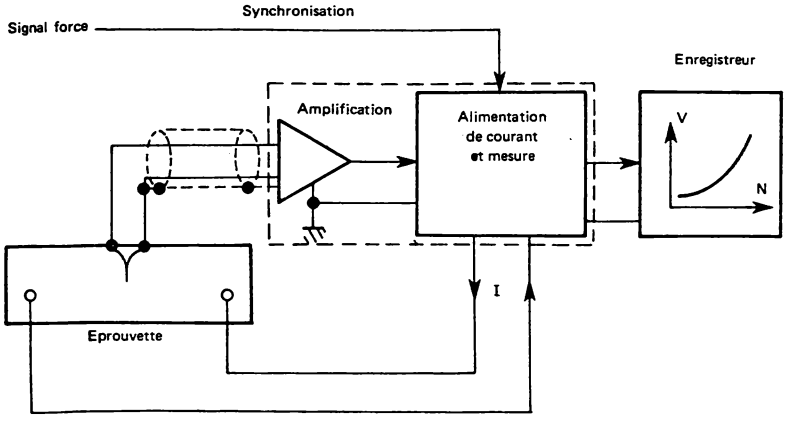


Fig. 15. Schéma de mesure des longueurs de fissure par la méthode du potentiel (d'après G. Baudin et H. Policella).

Bien que la tension à mesurer soit très faible, de l'ordre de quelques dizaines de μV, la précision de la mesure peut atteindre quelques centièmes de millimètre sur les longueurs de fissures dans les tôles minces, à condition de synchroniser la mesure avec l'ouverture maximale de la fissure.

Cette méthode s'applique également à la mesure des profondeurs de fronts de fissures non traversantes dans les pièces massives. L'étalonnage, plus complexe, peut se faire à la cuve des analogies rhéo-électriques ; dans ce cas, la précision est de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre sur les coordonnées de chaque point du front de fissure.

2.2.3. *Eprouvettes*

La mise au point de la forme d'une éprouvette est toujours une opération longue et délicate car si l'on n'y prend garde, la rupture peut intervenir prématurément et précisément là où l'on ne l'attend pas ! Il s'agit toujours d'un compromis entre les implications des caractéristiques de la machine (type de chargement, force maximale, rigidité, système de chauffage) et de celles des mesures à effectuer (sensibilité du dynamomètre, mesure des allongements par extensométrie, locale sur la partie utile de l'éprouvette ou externe sur les têtes d'amarrages). Quelques exemples de dessins côtés d'éprouvettes ayant fait leurs preuves sont donnés ci-dessous, figures 16 à 20 (d'après W. Dauzou LMT Cachan).

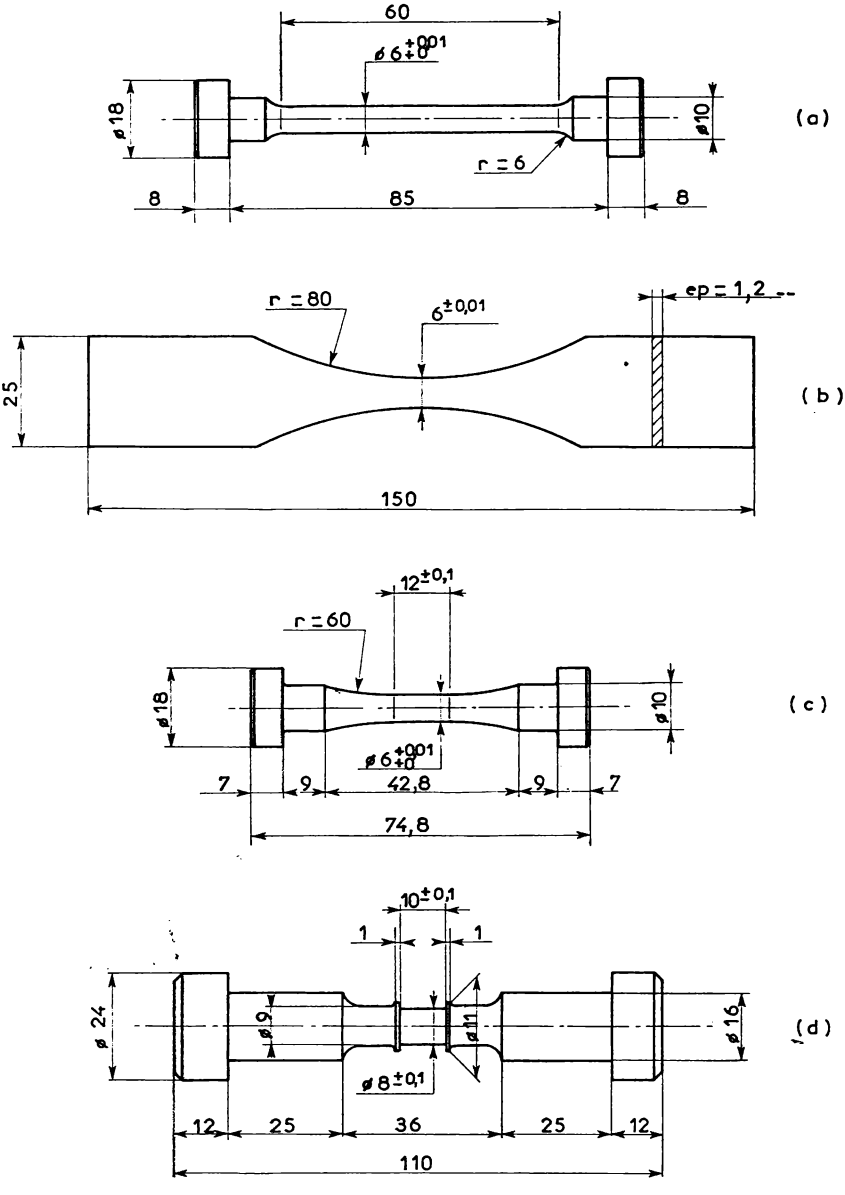


Fig. 16. Eprouvettes de traction
— à section circulaire (*a*)
— plate (b)

Eprouvettes de traction-compression
— pour extensomètre extérieur ou jauge (*c*)
— pour extensomètre local ou optique (*d*).

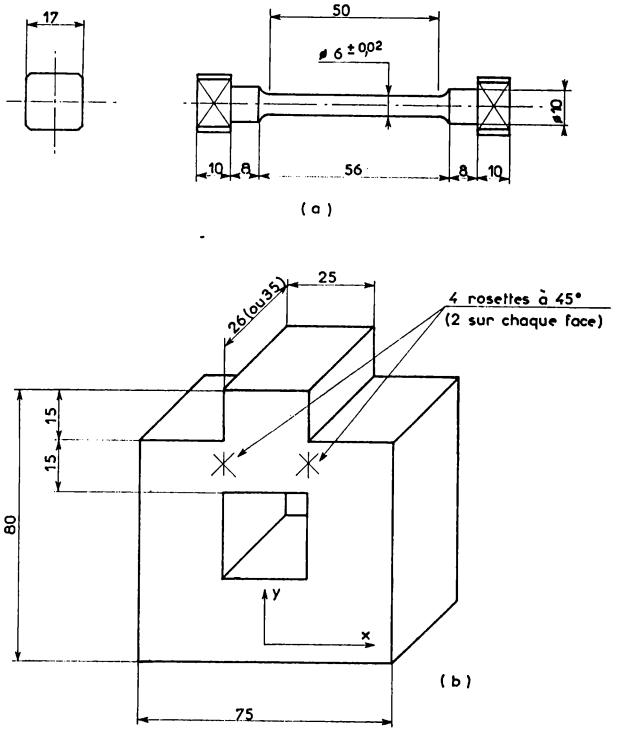


Fig. 17. Eprouvette de tension (*a*).
Eprouvette de cisaillement pur en compression (*b*).

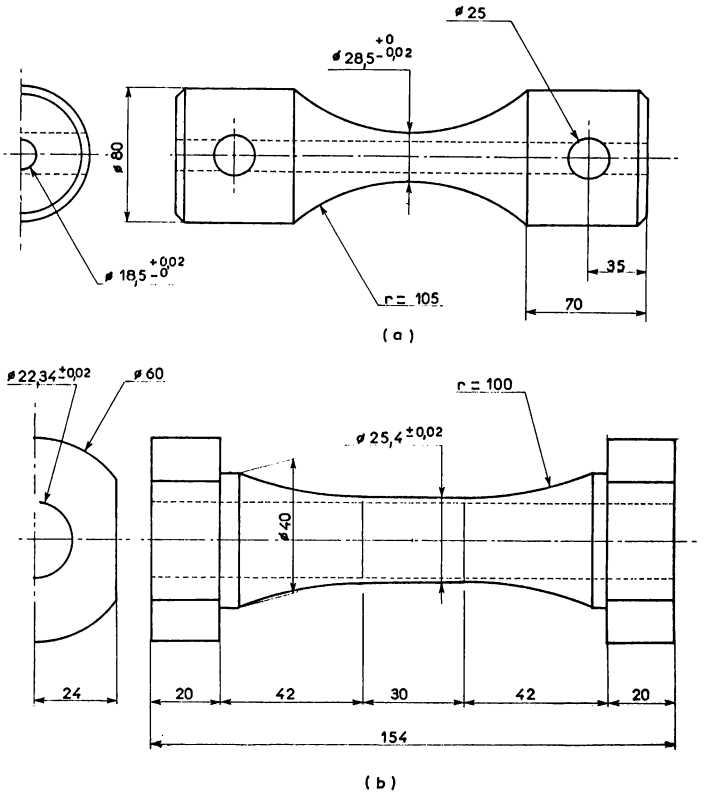


Fig. 18. Eprouvettes de traction-torsion
— Fixation par goupille (*a*) — Fixation par serrage (*b*).

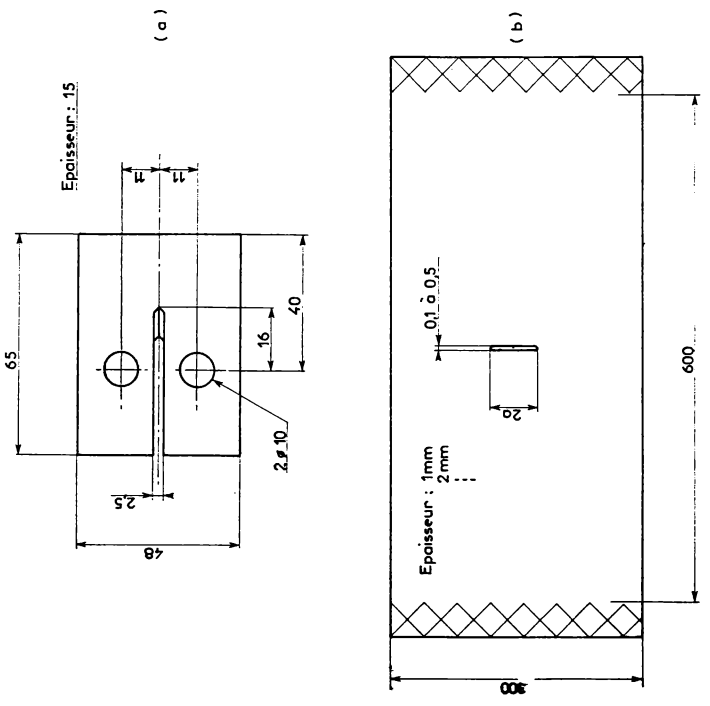


Fig. 20. Eprouvettes de fissuration
Eprouvette C. T. ASTM (*a*)
Eprouvette Irwin (*b*)

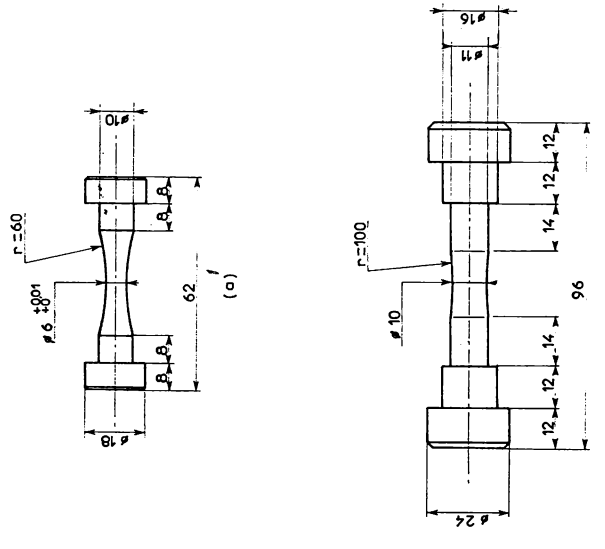


Fig. 19. Eprouvette d'endommagement ductile (*a*)
Eprouvette de fatigue (*b*).

2.3. Méthodes d'identification

La thermodynamique donne la formulation générale des modèles sans en préciser la forme analytique (sauf toutefois pour les comportements linéaires) ni les valeurs numériques. Les expériences fournissent, pour chaque matériau, les relations quantitatives que doivent vérifier les modèles pour être représentatifs des phénomènes étudiés. On appelle identification tout le travail qui consiste à préciser les fonctions qui interviennent dans les modèles et à trouver les valeurs numériques des coefficients qui les définissent pour chaque matériau.

Il s'agit d'un travail difficile qui n'obéit pas à des règles rigoureuses et où l'expérience et « l'art du faiseur de modèles » jouent un grand rôle pour évoluer entre la théorie et l'expérience.

2.3.1. *Formulation analytique des modèles*

2.3.1.1. *Le rapport qualité-prix*

Etant donné un ensemble de résultats expérimentaux, il est toujours possible de trouver une fonction qui les représente avec une erreur ne dépassant pas la marge d'incertitude des mesures. C'est ce qu'on appelle le lissage pour lequel la fonction possède d'autant plus de coefficients représentatifs des résultats expérimentaux que ceux-ci sont plus nombreux.

Un modèle qui a l'ambition de devenir une loi, au contraire, doit avoir un caractère de généralité tel, qu'identifié sur un nombre restreint d'expériences, il soit aussi représentatif d'autres types d'expériences, avec un caractère prévisionnel. L'ensemble des situations vérifiées par un modèle est son domaine de validité. Celui-ci caractérise la qualité du modèle et s'exprime qualitativement par l'ensemble des histoires possibles de variation des variables et quantitativement par les bornes de leur domaine de variation à l'intérieur duquel le modèle s'accorde bien avec la physique. Par exemple la loi de plasticité de Hencky-Mises (chap. 5) est valable pour un matériau isotrope en chargement radial dans le domaine des déformations inférieures au seuil d'endommagement (chap. 6).

Le prix à payer est le nombre de coefficients car les difficultés d'identification sont essentiellement liées à ce nombre. Identifier deux coefficients se fait aisément « à la main ». Identifier cinq coefficients dans un modèle est déjà du domaine d'une procédure numérique, en identifier dix est vraiment du domaine de « l'art assisté par ordinateur ! ». L'évaluation d'un modèle doit donc se faire en examinant lucidement ce rapport qualité/prix = domaine de validité/nombre de coefficients.

2.3.1.2. *Modélisation des non-linéarités*

La plupart des phénomènes étudiés dans cet ouvrage (plasticité, viscoplasticité, endommagement, fissuration) sont « très fortement » non linéaires, c'est-à-dire qu'une linéarisation par un développement de Taylor limité au

premier ordre ne représente le phénomène que pour un accroissement très petit des variables.

Parmi toutes les possibilités analytiques de traduire des non-linéarités on retient essentiellement :

— l'exponentielle : $\exp(aX)$ ou le logarithme $\ln(aX)$.

— la fonction puissance aX^N où N est un coefficient qui peut prendre les valeurs 2, 5, 10, 20 et même jusqu'à 100. Dans certains cas, il est nécessaire d'utiliser la fonction $aX^{N(X)}$ où $N(X)$ est cette fois une fonction de la variable X.

Les raisons en sont essentiellement de deux ordres :

— la facilité d'identification par la transformation logarithme qui donne des relations linéaires,

— les commodités de résolution analytique des modèles pour étudier leurs propriétés.

2.3.1.3. *Règle de cumulation linéaire*

Une propriété importante que vérifie ou non un modèle est la règle de cumulation linéaire (règle de Robinson en fluage, règle de Palmgreen-Miner en fatigue) qui est en fait une propriété de toute équation différentielle, linéaire ou non, à variables séparables.

Les modèles issus des potentiels de dissipation (voir chap. 2) sont toujours de la forme générale :

$$\dot{X} = f(X, V(t))$$

où X est la variable d'évolution du phénomène, fonction des variables causales V (ici on n'en prend qu'une seule pour simplifier).

Montrons que si cette équation différentielle est à variables séparables

$$\dot{X} = g(X).h(V)$$

(g et h étant des fonctions éventuellement non linéaires) elle entraîne la règle de cumulation linéaire. Avec la condition initiale : $t = 0 \rightarrow X = 0$, la solution de cette équation s'exprime par :

$$(g(X))^{-1}\,\mathrm{d}X = h(V)\,\mathrm{d}t$$

ou

$$\int_0^X (g(x))^{-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^t h(V)\,\mathrm{d}t\,.$$

Considérons d'abord le cas où V est constant, égal à V_0, et soit $t(X, V_0)$ la solution correspondante :

$$t(X, V_0) = (h(V_0))^{-1} \int_0^X (g(x))^{-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Considérons ensuite le cas où V varie avec le temps et soit

$$\tau(X, V) = (h(V))^{-1} \int_0^X (g(x))^{-1} \, dx$$

la fonction de X et du temps, déduite de $t(X, V_0)$ en remplaçant V_0 par $V(t)$. dt s'exprimant par : $dt = (h(V))^{-1} (g(X))^{-1} \, dX$, calculons :

$$\int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau(X^*, V(t))}$$

où t^* est le temps qui correspond à X^*, soit $X^* = X(t^*)$

$$\int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau(X^*, V(t))} = \int_0^{t^*} \frac{(h(V))^{-1} (g(x))^{-1} \, dx}{(h(V))^{-1} \int_0^{X^*} (g(x))^{-1} \, dx} =$$

$$= \int_0^{X^*} \frac{(g(x))^{-1} \, dx}{\int_0^{X^*} (g(x))^{-1} \, dx} = 1$$

$$\boxed{\int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau(X^*, V(t))} = 1} .$$

Cette relation exprime que le cumul des temps réduits dt/τ est égal à 1, τ étant la solution obtenue en considérant un processus constant à la place de $V(t)$.

C'est la règle de cumulation linéaire, que vérifie toute équation différentielle à variables séparables. Par exemple la règle de Miner en fatigue pour un chargement d'amplitude de contrainte $\Delta\sigma(N)$ variable, s'exprime par :

$$\int_0^{N_R} \frac{dN}{N_F(\Delta\sigma(N))} = 1$$

où N_R est le nombre de cycles à rupture dans le chargement considéré et N_F est l'expression du nombre de cycles à rupture de référence, pour une sollicitation périodique d'amplitude $\Delta\sigma$.

2.3.1.4. *Dispersion, coefficients aléatoires*

Un autre aspect important est la dispersion des résultats expérimentaux qui peut être due :

— soit à la nature du phénomène, hétérogénéités, processus de croissance aléatoire, incertitude sur le chargement,

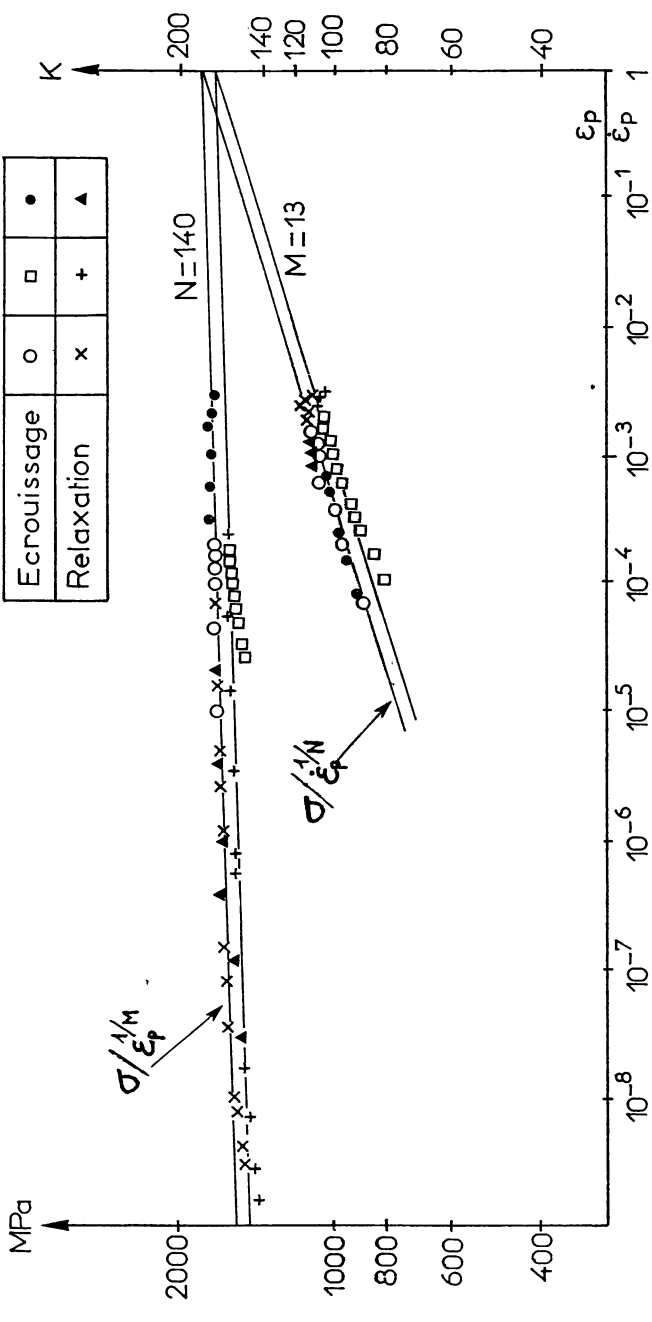


Fig. 21. Identification des coefficients de la loi d'écrouissage-viscosité « produit » Alliage INCO 718, 550 °C.

— soit à la dispersion propre à chaque échantillon, liée au procédé d'élaboration, de mise en forme, au traitement thermique, etc...

Les dispersions classiques sont de l'ordre de 1 à 5 % sur la déformation élastique, 10 à 50 % sur la déformation plastique ou viscoplastique 50 à 100 % (facteur 2) sur le nombre de cycles à amorçage en fatigue oligocyclique ou en fissuration, 1 000 % (facteur 10) en fatigue à grand nombre de cycles.

On reconnaît d'emblée dans ces ordres de grandeur l'influence prononcée de la non-linéarité des phénomènes. Le moyen le plus simple et le plus efficace d'inclure cette dispersion dans les modèles est de donner une définition statistique au coefficient multiplicatif qui intervient dans tout modèle, par exemple le coefficient A dans

$$\dot{X} = AX^m V^n .$$

Un nombre suffisant de résultats expérimentaux permet de définir A par sa densité de probabilité, sa courbe de répartition ou, ce qui est le plus souvent suffisant, par sa moyenne et son écart-type.

La figure 21 montre l'exemple du comportement viscoplastique de l'alliage INCO 718 à 550 °C, au travers de ses fonctions de viscosité et d'écrouissage (voir chap. 6). La dispersion, d'une éprouvette à l'autre, joue sur l'ordonnée, c'est-à-dire sur la contrainte, et non sur la non-linéarité des deux fonctions.

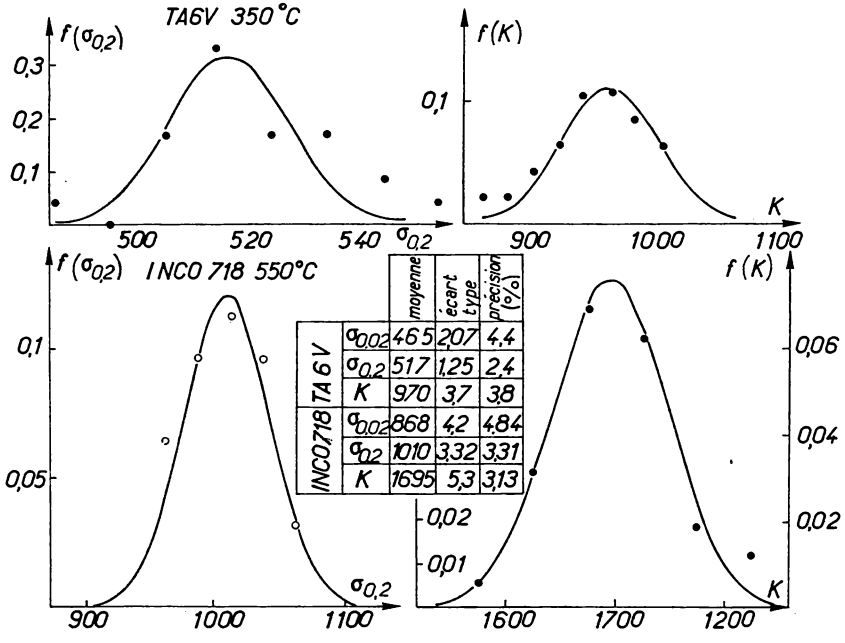


Fig. 22. Probabilités relatives à la limite d'élasticité $\sigma_{0,2}$ et au coefficient de résistance K-Alliage INCO 718, 550 °C.

L'emploi de $M = 13$ et $N = 140$ pour un plus grand nombre d'essais a permis d'obtenir la répartition statistique du coefficient de résistance K de la loi :

$$\sigma = K\varepsilon_p^{1/M}\,\dot{\varepsilon}_p^{1/N}.$$

La figure 22 montre que cette répartition est très voisine de celle observée pour la limite d'élasticité conventionnelle (à 0,2 %).

2.3.2. *Méthodes numériques d'identification*

Connaissant un modèle mathématique par son expression analytique et un ensemble de résultats expérimentaux dans lesquels toutes les variables du modèle ont été excitées, il s'agit de calculer les coefficients inconnus qui conduisent à la meilleure représentation possible des expériences.

2.3.2.1. *Généralités*

Notons tout de suite que ce problème se pose de différentes manières, suivant les essais dont on dispose ou le modèle étudié. Deux cas sont à distinguer :

— on identifie directement la loi de comportement, c'est-à-dire l'entité (ou fonction de transfert) qui est représentative du matériau. Un exemple est celui d'une loi dans laquelle interviennent une variable X et sa vitesse $\dot{X}$:

$$H(X, \dot{X}, Y) = 0$$

Lorsque l'on a pu mesurer une série de triplets de valeurs $(X, \dot{X}, Y)$ (au même instant), on peut obtenir les coefficients définissant la fonction H par lissage direct des points expérimentaux. Suivant les cas on fera appel à une méthode de moindres carrés linéaire ou non linéaire (voir ci-dessous).

— on identifie sur la réponse, c'est-à-dire que l'on cherche les coefficients caractéristiques de la fonction H en ajustant au mieux la réponse de l'équation de comportement à une sollicitation donnée (entrée), à la réponse observée expérimentalement pour la même sollicitation. Dans ce cas, on utilisera la méthode des moindres carrés non linéaires, les réponses étant le plus souvent non explicitées de façon analytique simple.

Remarques

— Un modèle donné ne peut s'identifier correctement que si l'on dispose de résultats d'essais en nombre suffisant, mettant en jeu une plage de variation importante de chacun des paramètres (par exemple les paramètres X, $\dot{X}$, Y de la fonction H). Dans le cas contraire, on risque une indétermination plus ou moins nette d'un ou plusieurs coefficients.

— Pour un même matériau et un même modèle on peut être amené à définir plusieurs jeux de coefficients, chacun s'adaptant mieux à un domaine de

variation ou à un type de chargement, par exemple : chargements transitoires rapides, de courte durée, ou chargements de très longue durée, stationnaires.

2.3.2.2. *Méthode des moindres carrés linéaire*

Il s'agit de minimiser l'écart entre des valeurs expérimentales et des valeurs calculées obtenues par un modèle. Différentes normes d'erreur peuvent être employées : on aboutit généralement à un problème de minimisation d'une fonction écart :

$$h(a)$$

qui dépend des coefficients caractéristiques inconnus a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Diverses méthodes de minimisation peuvent être employées : elles sont plus ou moins efficaces, la convergence peut être difficile en raison des grandes non-linéarités des phénomènes généralement étudiés. On se limite ici à l'exposé de la méthode des moindres carrés ou méthode de Gauss-Newton qui s'applique lorsque la fonction écart choisie est la somme des carrés des écarts :

$$h(a) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} E_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} [y_j^C(a, x_j) - y_j^E(x_j)]^2$$

y_j^E et y_j^C représentent respectivement les valeurs expérimentales et calculées de l'un des paramètres en fonction des autres, désignés par x_j (le j-ième point expérimental). La figure 23 indique schématiquement comment est définie cette fonction :

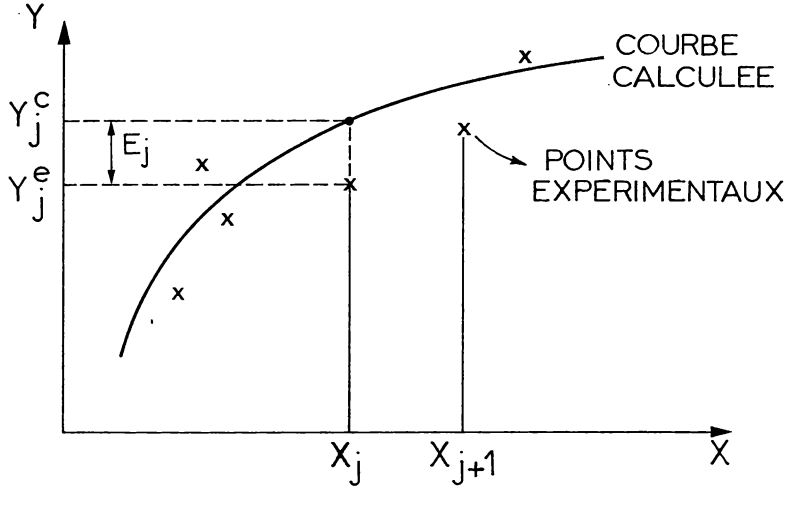


Fig. 23. Graphe d'identification.

La méthode des moindres carrés linéaire s'emploie lorsque l'expression de y^C est linéaire en fonction des coefficients a_i

$$y_j^C = A_0(x_j) + A_1(x_j)\, a_1 + \cdots + A_n(x_j)\, a_n .$$

Pour minimiser h il suffit d'écrire :

$$\frac{\partial h}{\partial a_k} = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

grâce à la linéarité on trouve immédiatement, avec $A_{ij} = A_i(x_j)$:

$$\sum_i \left(\sum_j A_{jk}\, A_{ji} \right) a_i = \sum_j A_{jk} (y_j^E - A_0) .$$

La résolution de ce système linéaire, dont la matrice $\sum_j A_{jk}\, A_{ji}$ est symétrique, fournit facilement les inconnues a_i.

2.3.2.3. *Méthode de Gauss-Newton*

C'est la généralisation de la méthode précédente. Pour une expression non linéaire de la fonction y^C on introduit la linéarisation :

$$y_j^C(a) = y_j^C(a^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j^C}{\partial a_i}(a^0)\, \Delta a_i$$

Pour un jeu de coefficients a^0 donné, on calcule successivement la fonction écart en chaque point y_j^C et sa dérivée par rapport à chacun des coefficients (ce gradient peut rarement être établi explicitement, il faut alors procéder par petits accroissements finis sur chaque coefficient). Cette expression est formellement identique à l'expression du paragraphe précédent : il suffit de remplacer pour obtenir un jeu de valeurs Δa_i qui conduit généralement à une moins mauvaise solution a^1 par :

$$a_i^1 = a_i^0 + \Delta a_i .$$

On reprend alors de même à partir de cette nouvelle solution. Notons que la convergence de cette méthode itérative n'est pas toujours assurée. Cependant, quand elle converge, elle converge rapidement, ce qui fait qu'elle est assez pratique d'emploi et relativement peu coûteuse si le nombre de coefficients n'est pas trop élevé.

La figure 24 montre l'exemple de l'identification de la loi de plasticité de l'acier 316 L par un essai de traction à 20 °C. La loi choisie fait intervenir trois coefficients :

$$\sigma = \sigma_Y + K_Y\, \varepsilon_p^{1/M_Y}$$

on voit que, pour diverses solutions de départ, la convergence est correcte et assez rapide.

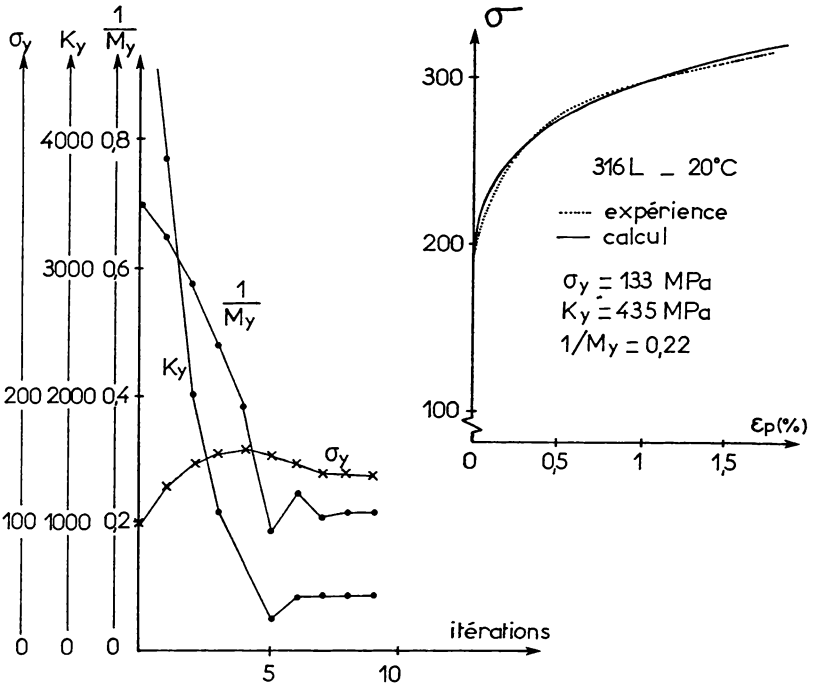


Fig. 24. Identification de la loi de plasticité à 3 coefficients. Acier 316 L.

2.3.2.4. *Variation des paramètres caractéristiques en fonction de la température.*

Sauf exception les paramètres caractéristiques d'un matériau, qui définissent chaque modèle de comportement, dépendent de la température. Une méthode générale permettant d'introduire cette dépendance consiste à écrire ces coefficients sous forme d'une fonction parabolique définie par morceaux. Soit par exemple, pour le paramètre α :

$$\alpha(T) = a_i(T - T_i)^2 + b_i(T - T_i) + c_i \quad \text{pour} \quad T_i < T < T_{i+1}\,.$$

Les coefficients a_i, b_i, c_i sont choisis de façon à assurer la continuité de α et de $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}T$:

$$c_{i+1} = a_i(T_{i+1} - T_i)^2 + b_i(T_{i+1} - T_i) + c_i$$
$$b_{i+1} = 2\,a_i(T_{i+1} - T_i) + b_i\,.$$

Ils sont déterminés de proche en proche par les valeurs mesurées du paramètre α, en introduisant éventuellement des valeurs intermédiaires pour assurer un bon lissage.

3. SCHÉMATISATION DES COMPORTEMENTS RÉELS

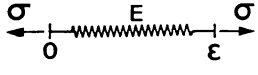
L'allure qualitative de la réponse des matériaux aux essais caractéristiques permet de les classer à l'aide des qualificatifs : rigide, élastique, visqueux, plastique et parfaitement plastique. A chaque schéma type correspond une théorie mathématique qui est développée dans les chapitres 4 à 8.

3.1. Modèles analogiques

Les modèles analogiques sont des groupements d'éléments mécaniques dont les réponses à des sollicitations sont similaires à celles des matériaux. Ils sont utilisés, souvent à des fins didactiques, pour donner une image concrète des équations de comportement. L'analogie se limite là et ne porte en aucun cas sur les mécanismes physiques eux-mêmes.

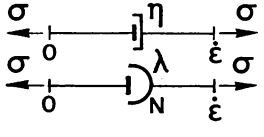
Les éléments les plus utilisés sont les suivants :

— le ressort qui schématise l'élasticité linéaire



$$\sigma = E\,\varepsilon$$

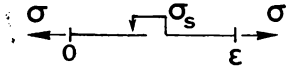
— l'amortisseur qui schématise la viscosité linéaire ou non



$$\sigma = \eta\,\dot{\varepsilon}$$

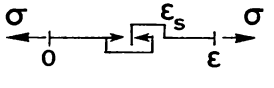
$$\sigma = \lambda\,\dot{\varepsilon}^{1/N}$$

— le patin qui schématise un seuil de contrainte



$$-\sigma_s < \sigma < \sigma_s$$

— la butée qui schématise un seuil de déformation



$$-\varepsilon_s \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s$$

Ces différents éléments (indice i) peuvent être associés :

— soit en série :

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \qquad \sigma = \sigma_i$$

— soit en parallèle :

$$\sigma = \sum_i \sigma_i \qquad \varepsilon = \varepsilon_i$$

— soit en groupements mixtes.

Les analogies mécanique-électrique permettent de réaliser ces modèles sous forme de réseaux électriques mais les calculateurs numériques ont supplanté ces calculateurs analogiques.

3.2. Solide rigide et fluide parfait

Ils ne sont cités que pour mémoire puisqu'ils sortent du cadre de la mécanique des solides déformables. Dans la pratique, la distinction entre solide et fluide est subjective et ne peut être liée qu'au choix d'une échelle de temps :

— un solide admet un état d'équilibre sous sollicitation :

— un fluide subit un écoulement pour toute sollicitation aussi faible soit-elle.

Mais il n'est pas aisé de distinguer un écoulement infiniment lent d'un équilibre atteint pour un temps infini ! Une échelle de temps liée au phénomène étudié permet de lever l'ambiguïté mais les notions de fluide et de solide perdent alors leur sens objectif : tel polymère pourra être considéré comme un solide pour des problèmes de chocs et comme un fluide pour des problèmes de stabilité de longue durée.

3.3. Fluide visqueux

Un corps est appelé « fluide visqueux » si ses réponses aux essais caractéristiques ont les allures suivantes (fig. 25). Ce corps est aussi quelquefois qualifié de solide viscoplastique (voir chapitre 6) :

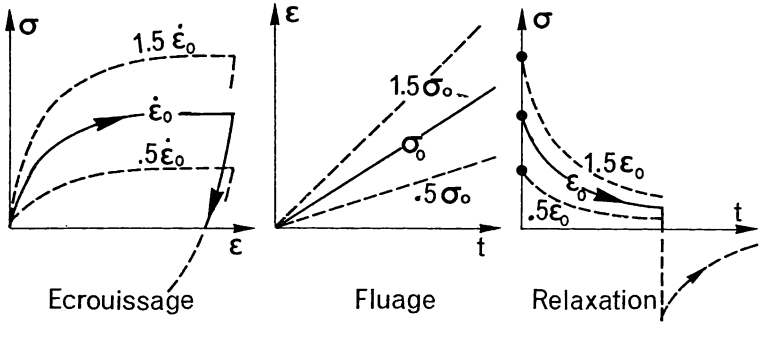
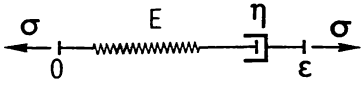


Fig. 25. Fluide visqueux.

— Il y a écoulement pour toute valeur de contrainte : $\dot{\varepsilon} = f(\sigma)$.

— Un modèle analogique simple est le modèle de Maxwell constitué d'un ressort et d'un amortisseur linéaires en série. Son équation constitutive est :



$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Sa réponse au test de relaxation $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$ où $H(t)$ est la fonction échelon d'Heaviside $H = 0$ si $t < 0$, $H = 1$ si $t \geqslant 0$, est :

$$\sigma = E\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{E}{\eta} \cdot t\right).$$

— Applications aux solides « mous » :

. Polymères thermoplastiques au voisinage de la température de fusion.

. Béton frais en négligeant son vieillissement.

. De nombreux métaux aux températures proches de la température de fusion.

3.4. Solides élastiques

La déformation est essentiellement réversible. L'étude détaillée de ces solides figure au chapitre 4.

3.4.1. *Solide élastique parfait*

Les réponses qualitatives aux trois essais caractéristiques sont les suivantes (fig. 26).

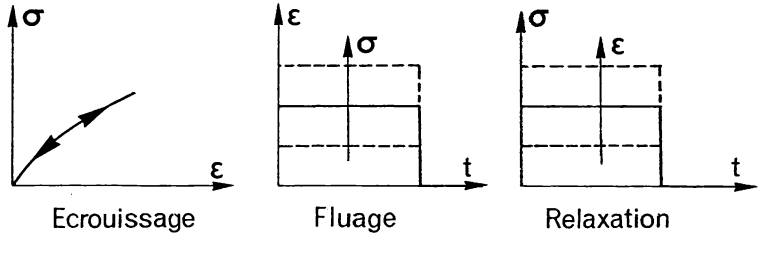


Fig. 26. Solide parfaitement élastique.

— La réversibilité est instantanée. La relation contrainte-déformation est :

$$\sigma = f(\varepsilon) .$$

— Le modèle analogique de l'élasticité linéaire est le ressort

$$\sigma = E\varepsilon$$

— Applications : les métaux, les bétons, les roches pour des sollicitations inférieures à la limite d'élasticité.

3.4.2. *Solide viscoélastique* (fig. 27)

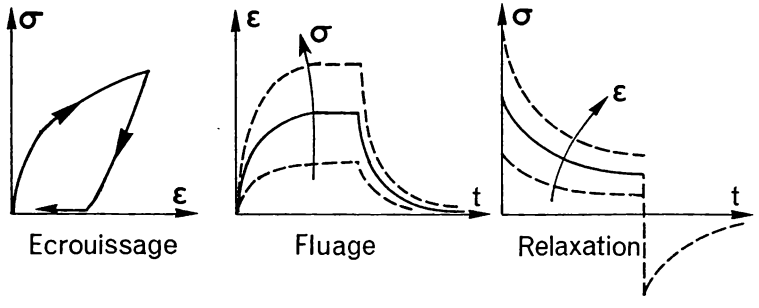
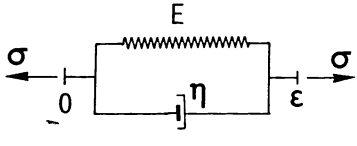


Fig. 27. Solide visco-élastique.

— La réversibilité est « retardée » et n'intervient qu'après un temps infini

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) .$$

— Un modèle analogique simple est le modèle de Kelvin-Voigt : un ressort et un amortisseur linéaires en parallèle :



Sa réponse au test de fluage $\sigma = \sigma_0 H(t)$ est :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right)\right].$$

Les modèles analogiques de Kelvin-Voigt généralisé et de Maxwell généralisé pour les solides sont décrits au chapitre 4. Le solide viscoélastique présente souvent du vieillissement : ce point est abordé au paragraphe 3.8.

— Applications : les polymères organiques, le caoutchouc, le bois si la sollicitation n'est pas trop élevée.

3.5. Solides plastiques

On appelle ainsi des solides qui, après cessation des sollicitations, présentent des déformations permanentes instantanément stables et qui sont en équilibre sous sollicitation. Leur comportement ne dépend pas explicitement du temps.

Par définition, la déformation plastique ε_p est celle qui correspond à la configuration relâchée : $\varepsilon_p = \varepsilon(\sigma = 0)$. L'étude détaillée des solides plastiques constitue le chapitre 5.

3.5.1. *Solide rigide parfaitement plastique* (fig. 28)

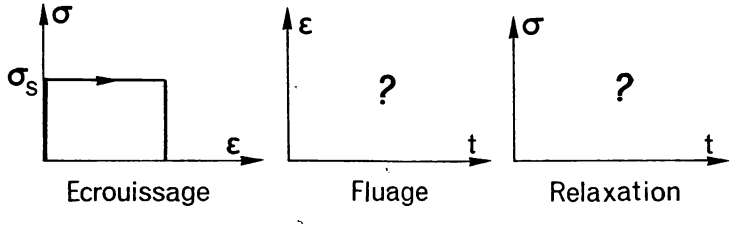


Fig. 28. Solide rigide parfaitement plastique.

— La déformation est nulle ou négligeable en deçà d'un seuil de contrainte σ_s et arbitraire pour cette valeur, quelle que soit la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ dans les essais d'écrouissage ou le temps dans les essais de fluage et de relaxation :

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = 0$$

$$\sigma = \sigma_s \operatorname{Sgn}(\dot{\varepsilon}) \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_p \text{ (arbitraire)}.$$

— Le modèle analogique est le patin.

— Applications :

. Mécanique des sols.

. Analyse de la mise en forme des métaux (Cf. chap. 5).

3.5.2. *Solide élastique parfaitement plastique* (fig. 29)

— La déformation est élastique linéaire en deçà du seuil σ_s et arbitraire et indépendante de la vitesse de déformation pour cette valeur de contrainte :

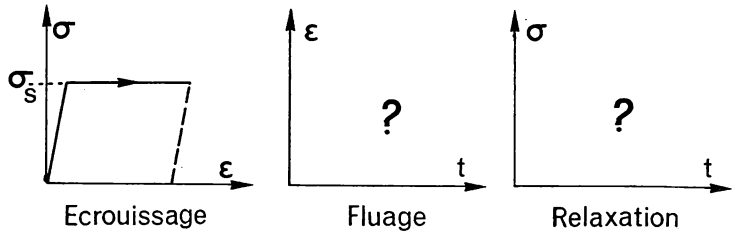
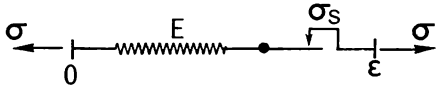


Fig. 29. Solide élastique parfaitement plastique.

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \sigma_s \operatorname{Sgn}(\dot{\varepsilon}) \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p \text{ (arbitraire)}.$$

— Le modèle analogique du solide parfaitement élasto-plastique est le modèle de Saint-Venant, un ressort linéaire et un patin en série :



— Applications :

. Aciers à faible teneur en carbone (présentant un « palier ») pour $\varepsilon < 2.10^{-2}$ et $T < \frac{1}{4} T_M$. (T_M étant la température absolue de fusion en °K).

. Analyse limite (cf. chap. 5).

3.5.3. *Solide élastoplastique écrouissable* (fig. 30)

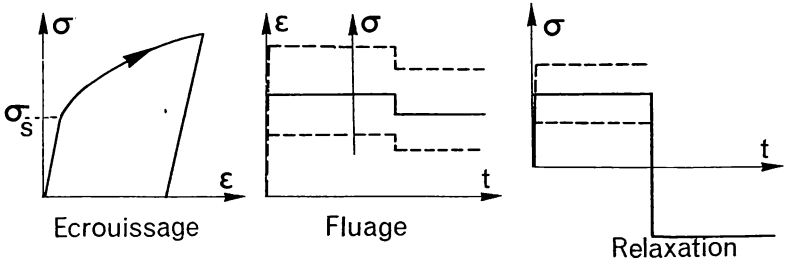


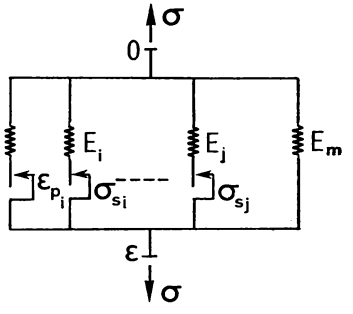
Fig. 30. Solide élastoplastique écrouissable.

La déformation totale est la somme d'une déformation élastique linéaire et d'une déformation permanente, nulle en deçà du seuil σ_s

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$|\sigma| \geqslant \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + g(\sigma).$$

— Le modèle analogique correspondant est le modèle de Saint-Venant généralisé. En supposant les seuils σ_{s_i} rangés dans l'ordre croissant et le seuil juste atteint pour l'élément j, son équation constitutive est la suivante :



$$\sigma = \sum_{1}^{j} \sigma_{s_i} + \sum_{j+1}^{m} E_i \varepsilon$$

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\sigma_{s_i}}{E_i} + \varepsilon_{p_i} & \sigma_i = \sigma_{s_i} \\ \dfrac{\sigma_i}{E_i} & \sigma_i < \sigma_{s_i} \end{cases}$$

La courbe de traction est linéaire par morceaux, les seuils en contrainte s'exprimant :

$$\sigma'_{s_j} = \sum_{1}^{j-1} \sigma_{s_i} + \frac{\sigma_{s_j}}{E_j} \sum_{j}^{m} E_i .$$

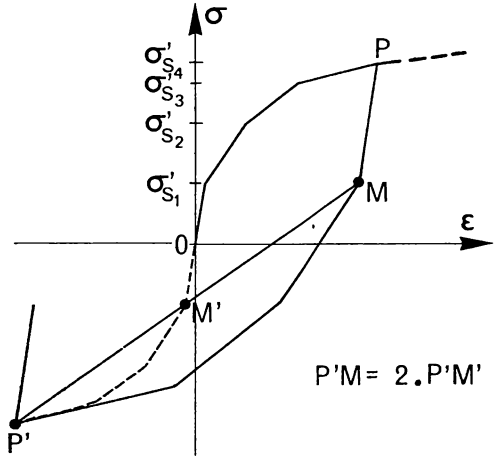


Fig. 31. Courbe d'écrouissage du modèle de Saint-Venant généralisé.

Sa courbe d'écrouissage de décharge après une traction se déduit de la courbe d'écrouissage en compression par une homothétie de rapport 2 et de centre P' symétrique du point de décharge P par rapport à l'origine O (fig. 31).

— Applications : métaux et alliages aux températures inférieures au quart de leur température absolue de fusion (températures exprimées en °K).

3.6. Solides viscoplastiques

Les solides appelés viscoplastiques sont ceux qui présentent des déformations permanentes après cessation des sollicitations (comme les solides plastiques) mais qui subissent un écoulement de fluage, fonction du temps, sous sollicitation (équilibre impossible). Leur étude est présentée au chapitre 6.

3.6.1. *Solide parfaitement viscoplastique* (fig. 32)

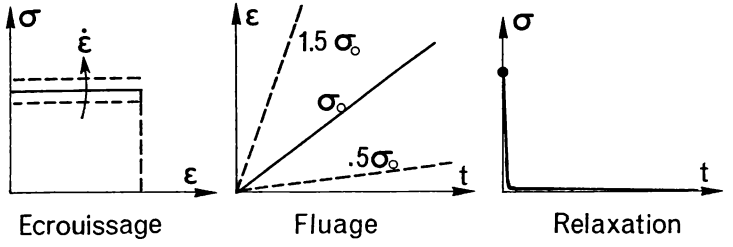


Fig. 32. Solide parfaitement viscoplastique.

— La vitesse de déformation permanente est une fonction de la contrainte comme pour les fluides visqueux : $\sigma(\dot{\varepsilon})$.

— Modèle de Norton :

$$\sigma = \lambda \dot{\varepsilon}^{1/N}.$$

— Applications : schématisation très grossière des métaux et alliages aux températures supérieures au tiers de leur température absolue de fusion (en °K).

3.6.2. *Solide élastique parfaitement viscoplastique* (fig. 33)

— L'élasticité n'est plus considérée comme négligeable mais la vitesse de déformation plastique ne dépend toujours que de la contrainte. Il n'y a pas d'influence de l'écrouissage

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}$$

$$|\sigma| \geqslant \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \qquad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + f(\sigma).$$

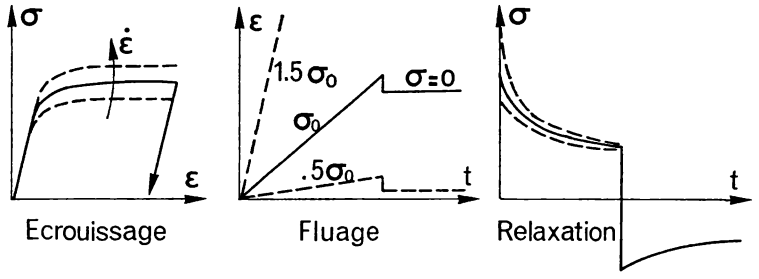
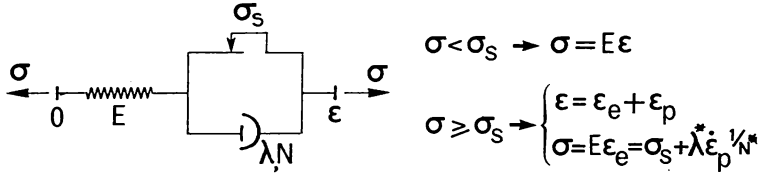


Fig. 33. Solide élastique parfaitement viscoplastique.

— Modèle de Bingham-Norton.



Sa réponse à une sollicitation de relaxation est :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 H(t) \rightarrow \sigma = \sigma_s + \frac{E\varepsilon_0 - \sigma_s}{\left[1 + \dfrac{(N-1)E}{\dot{\lambda}^N}(E\varepsilon_0 - \sigma_s)^{N-1} t\right]^{\frac{1}{N-1}}}$$

3.6.3. *Solide élasto-visco-plastique écrouissable* (fig. 34)

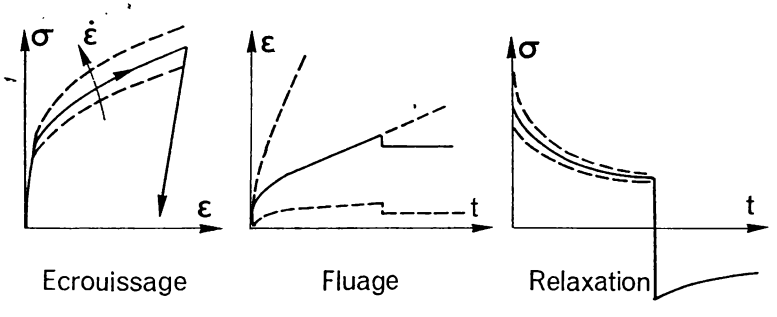


Fig. 34. Solide élastoviscoplastique.

— C'est le schéma le plus complexe puisque la contrainte dépend de la vitesse de déformation plastique et de la déformation plastique elle-même ou d'une autre variable d'écrouissage.

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$|\sigma| \geqslant \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

$$\sigma = E\varepsilon_e = f(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p).$$

— Applications :

. métaux et alliages aux températures moyennes et élevées,

. le bois pour des sollicitations élevées.

3.7. Caractérisation de l'écrouissage

Il existe plusieurs manières de schématiser le durcissement des matériaux engendré par les déformations.

3.7.1. *Ecrouissage isotrope*

Bien que la plupart des matériaux présentent une forte anisotropie d'écrouissage, le schéma de l'écrouissage isotrope est très utilisé à cause de sa simplicité et de sa bonne représentativité dans le cas du chargement radial, c'est-à-dire lorsque le vecteur représentatif des contraintes dans l'espace des contraintes garde une direction constante.

Pour mettre en évidence cette isotropie ou cette anisotropie, il faut avoir recours à des résultats expérimentaux effectués dans des directions de sollici-

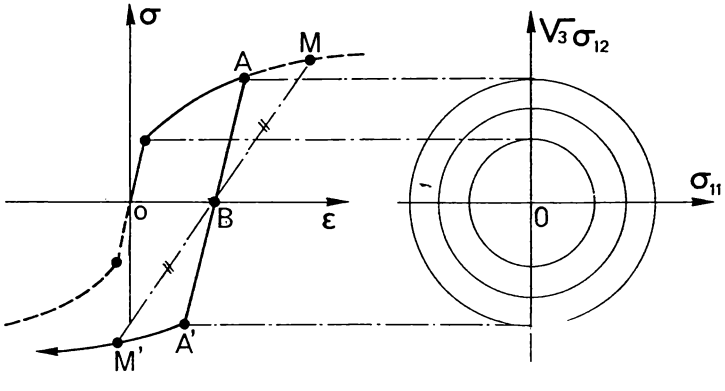


Fig. 35. Essai de traction-compression. Essai de traction-torsion. Ecrouissage isotrope.

tations différentes : essais de traction biaxiale, essais de traction (ou compression) et torsion. L'anisotropie initiale se décèle par des essais sur éprouvettes usinées dans des directions différentes liées à la matière.

On dira qu'un matériau est justiciable de l'hypothèse d'écrouissage isotrope, si la frontière de son domaine d'élasticité ne dépend que d'un paramètre scalaire (fig. 35) :

— la courbe de compression succédant à une traction dans un essai d'écrouissage se déduit de la courbe de traction monotone par une homothétie de rapport -1 et de centre le point à contrainte nulle (point B de la figure 35) ;

— les courbes de charge, lieux des points représentant la limite d'élasticité dans l'espace à deux dimensions, contrainte normale et contrainte tangentielle (essais de traction-torsion sur tube pour différents états d'écrouissage), se déduisent les unes des autres par une homothétie de centre O (sur la figure 35).

3.7.2. *Ecrouissage cinématique*

Une schématisation très utile de l'écrouissage anisotrope est l'écrouissage cinématique linéaire pour lequel le domaine d'élasticité garde une amplitude constante mais se déplace par translation dans l'espace des contraintes. Le « centre du domaine d'élasticité » (C sur la figure 36) représente la contrainte interne de l'état neutre.

— La courbe de compression unidimensionnelle se déduit de la nouvelle courbe de traction par une homothétie de rapport -1 de centre C.

— Dans l'essai de traction-torsion les courbes de charge correspondant à des états d'écrouissage différents se déduisent les unes des autres par des translations de vecteurs tels que $\overrightarrow{OC}$.

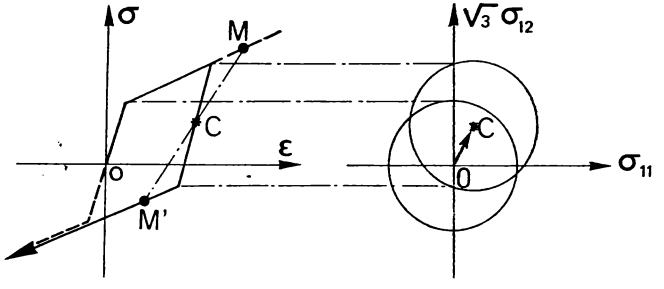


Fig. 36. Essai de traction-compression. Essai de traction-torsion. Ecrouissage cinématique.

3.7.3. *Effet Bauschinger*

L'effet Bauschinger se met en évidence lorsque l'on soumet une éprouvette à un essai de traction suivi d'un essai de compression ; on constate souvent

que la traction préalable a écroui le matériau dans le sens de la traction (augmentation de la limite d'élasticité) mais l'a adouci dans le sens de la compression : la figure 37 montre que la limite d'élasticité en compression est plus faible que la limite initiale en compression.

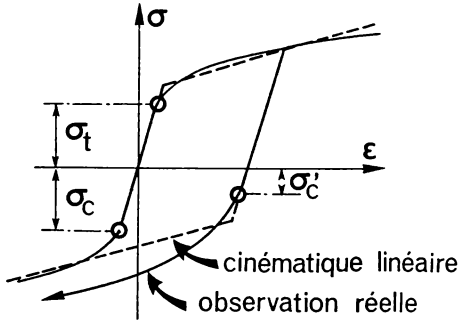
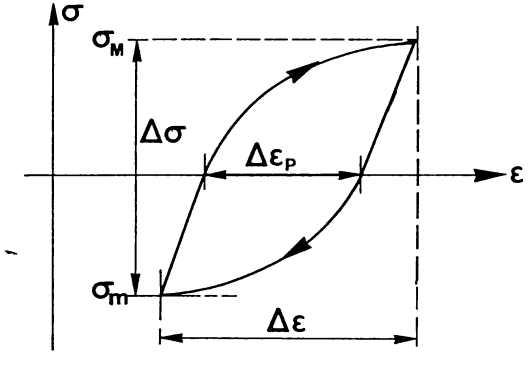


Fig. 37. Effet Bauschinger.

Parmi les deux schématisations simples de l'écrouissage évoquées ci-dessus, l'écrouissage cinématique se rapproche plus de cas réellement rencontrés et donne une première approximation de l'effet Bauschinger.

3.7.4. *Effets des chargements cycliques*

Lors de sollicitations cycliques de traction-compression, la plupart des métaux et alliages voient leurs propriétés d'écrouissage varier au cours des cycles. Il peut y avoir adoucissement ou durcissement selon les matériaux, la



$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_M + \sigma_m}{2}$$

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p = \frac{\Delta\sigma}{E} + \Delta\varepsilon_p$$

Fig. 38. Cycle contrainte-déformation.

température et l'état initial. La figure 38 définit les quantités généralement utilisées pour observer les résultats d'essais cycliques (au cycle stabilisé).

L'adoucissement se manifeste lorsque l'amplitude de contrainte $\Delta\sigma$ diminue au cours des cycles successifs, à déformation contrôlée (fig. 39*a*), ou lorsque l'amplitude de déformation $\Delta\varepsilon$ augmente dans un essai à contrainte imposée (fig. 39*b*).

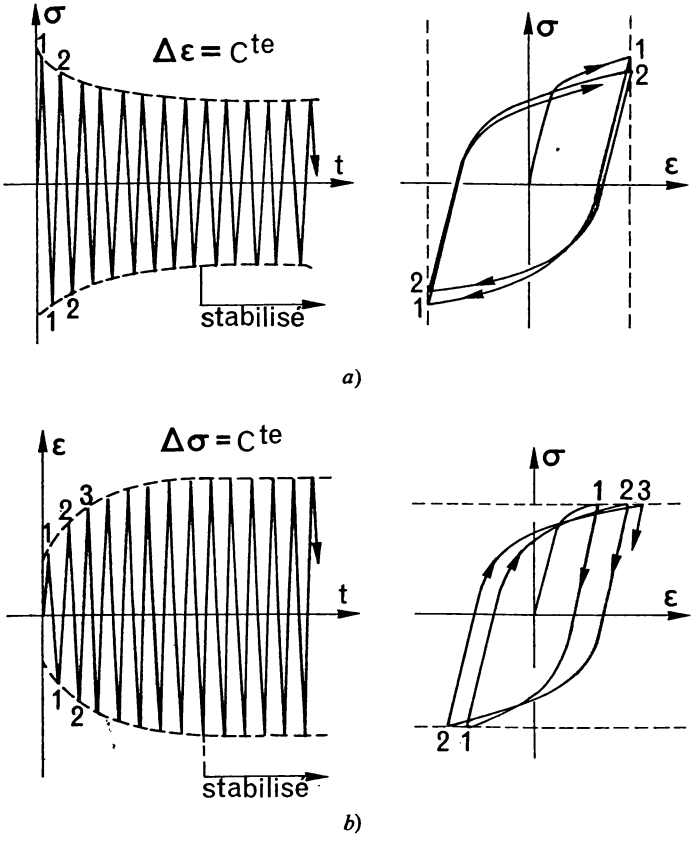


Fig. 39. Phénomène d'adoucissement cyclique.

Il y a durcissement cyclique si l'amplitude de contrainte augmente à déformation imposée (fig. 40*a*) ou si l'amplitude de déformation diminue à contrainte imposée (fig. 40*b*).

Lorsqu'à une sollicitation périodique correspond une réponse périodique, on dit qu'il y a stabilisation et existence d'un cycle stabilisé (voir § 2.1.5).

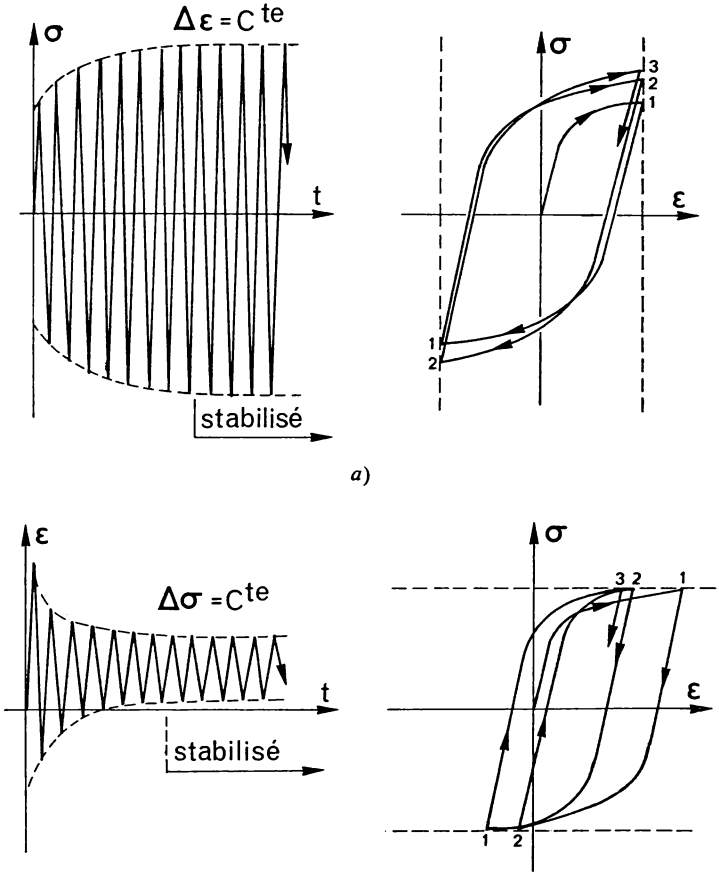


Fig. 40. Phénomène de durcissement cyclique.

Si le chargement n'est pas purement alterné. il peut exister des effets supplémentaires (fig. 41*a* et *b*). En contrainte imposée non symétrique il peut y avoir accommodation ou, le plus souvent, effet de rochet, c'est-à-dire augmentation progressive de la déformation à chaque cycle, même en régime stabilisé (on a une déformation périodique superposée à un terme séculaire de déformation progressive). A ces deux observations correspondent sous déformation imposée les effets de relaxation ou de non-relaxation de la contrainte moyenne (fig. 41*c* et *d*).

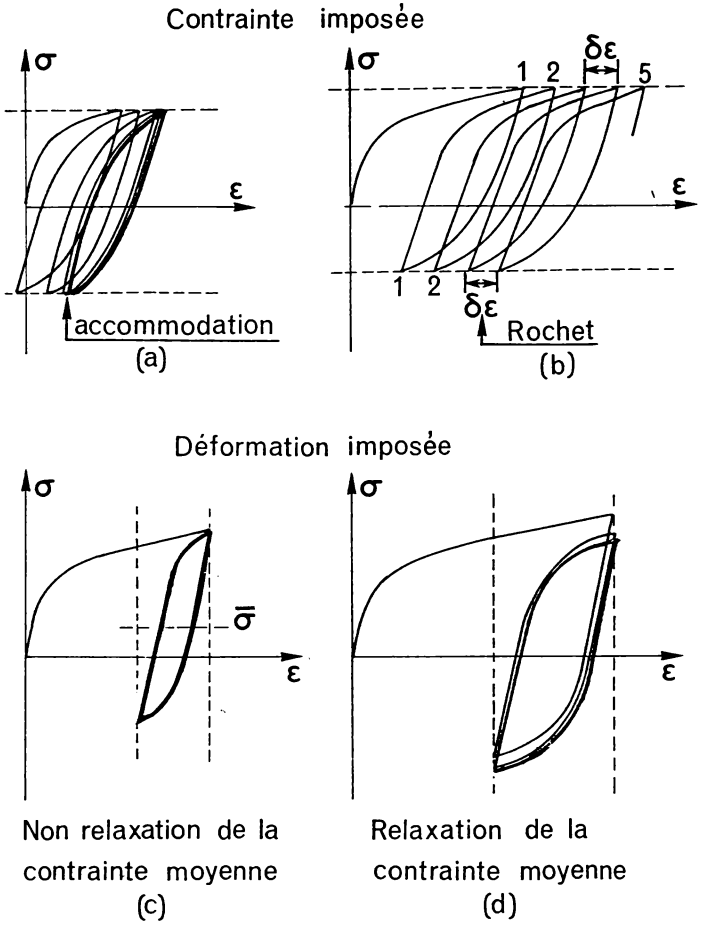


Fig. 41. Phénomènes d'accommodation (*a*), de rochet (*b*), de non-relaxation (*c*) et de relaxation de la contrainte moyenne (*d*).

3.8. Vieillissement

Les matériaux considérés dans les paragraphes précédents sont supposés stables, c'est-à-dire que leurs propriétés caractéristiques ne varient pas avec le temps. Les effets de vieillissement d'un matériau se jugent par comparaison des réponses à des tests caractéristiques (exemple fig. 42) :

a) l'essai de référence est réalisé avant tout vieillissement du matériau (essai de traction par exemple),

b) le même essai est réalisé sur une éprouvette, identique initialement, après une attente de plus ou moins longue durée.

Si les réponses aux essais *a* et *b* sont différentes on dit qu'il y a eu vieillissement. Si les réponses restent toujours identiques le matériau est stable.

Les matériaux qui vieillissent sont les bétons, les polymères, mais aussi les alliages métalliques sous certaines conditions de température.

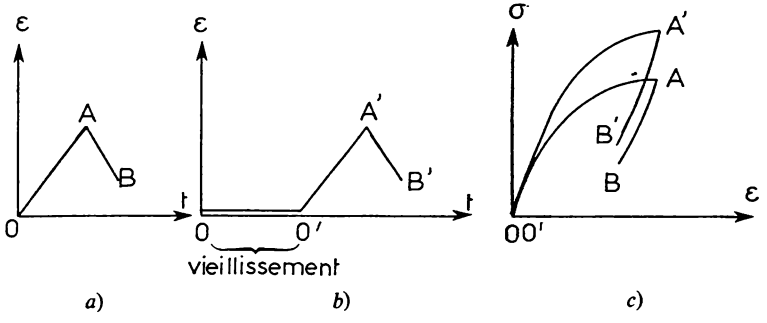


Fig. 42. Essai caractéristique pour étudier le vieillissement d'un matériau : (*a*) avant, (*b*) après vieillissement, (*c*) réponses.

4. SCHÉMATISATION DE LA RUPTURE

La caractérisation de la rupture est un travail délicat car elle repose en partie sur l'examen physique de la morphologie des cassures et dépend de l'échelle à laquelle l'analyse est effectuée : échelle microscopique des mécanismes de rupture, échelle macroscopique de l'élément de volume, échelle de la structure. Ce sont les deux dernières qui conduisent aux modélisations décrites dans les chapitres 7 et 8.

L'observation des faciès de rupture des métaux impose une préparation des échantillons qui relève des techniques de métallographie. L'examen visuel est limité à une résolution de l'ordre de 0,1 mm. La loupe binoculaire, avec un grossissement maximal de l'ordre de 100 X, permet déjà de détecter les zones de cassures qui correspondent à une rupture macrofragile (aspect brillant), à une rupture par fatigue (aspect plus mat) ou à une rupture macroductile (changement de géométrie). C'est avec le microscope optique (grossissement maximal de l'ordre de 1 000 X) que l'on commence à observer les décohésions de rupture micro-fragile, les stries de rupture par fatigue et les cavités de rupture microductile; mais c'est surtout avec le microscope électronique (grossissement 10 000 X à 100 000 X et même jusqu'à 10^6) que l'on peut analyser finement ces défauts pour en déduire la cinématique des mécanismes de rupture décrits au chapitre 1.

4.1. Rupture par endommagement de l'élément de volume

Au niveau de l'élément de volume, des microdécohésions fragiles et des microductilités mettant en jeu des déformations plastiques locales très importantes sont presque toujours présentes mais en proportion variable et c'est sur cette proportion que joue la schématisation.

L'élément de volume est considéré comme totalement endommagé, c'est-à-dire rompu, lorsqu'une fissure macroscopique est amorcée. Dans une structure, une taille conventionnelle de fissure de 1 mm^2 ou une dimension caractéristique de 1 mm est raisonnable par rapport à la nature cristalline ou moléculaire des métaux et polymères et par rapport à l'analyse de la mécanique des milieux continus. Cette dimension est de l'ordre de 1 cm pour le bois et de 10 cm pour le béton.

4.1.1. *Endommagement macro-fragile*

C'est l'endommagement par décohésion que subissent, sous sollicitations monotones, certains matériaux comme le béton, en l'absence de déformations irréversibles macroscopiques. Les seules déformations irréversibles présentes sont celles qui résultent de l'arrangement des fissures qui constituent cet endommagement. Dans l'essai d'écrouissage, la rupture intervient sans striction appréciable (fig. 43*a*).

4.1.2. *Endommagement plastique ductile*

Schématiquement, il s'agit de l'endommagement associé aux grandes déformations plastiques qui engendrent la croissance et la coalescence de cavités par le mécanisme d'instabilité microductile.

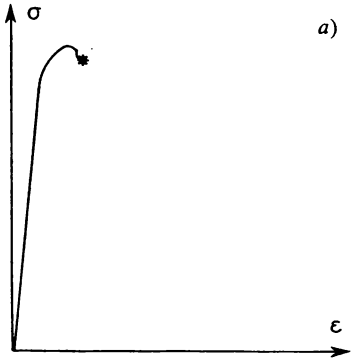
— La déformation plastique cumulée est supérieure à 10 ou 50 10^{-2}.

— La courbe d'écrouissage présente une grande phase de striction (fig. 43*b*).

4.1.3. *Endommagement viscoplastique fragile*

C'est l'endommagement qui accompagne les déformations de fluage. Il concerne donc les métaux aux températures moyennes et élevées pour lesquels les décohésions de rupture microfragile aux joints de grains sont prépondérantes. Les déformations irréversibles peuvent être importantes mais elles n'influent pas directement sur le mécanisme de décohésion. Il est essentiellement fonction de la variable temps.

Les deux mécanismes de décohésion et de déformation étant présents simultanément, les essais globaux ne permettent pas de caractériser ce type d'endommagement qui ne peut être décelé que par des examens micrographiques de cassures. Un exemple est donné sur la figure 19 du chapitre 1.



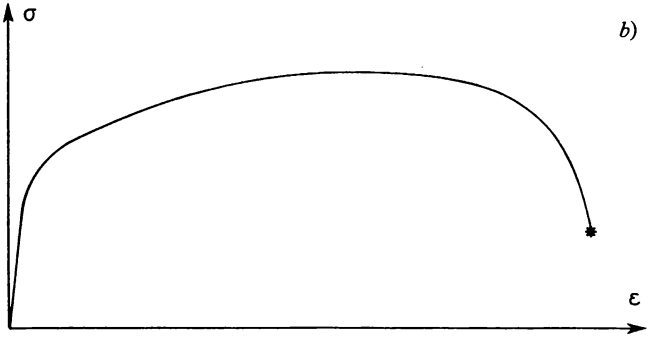


Fig. 43. (*a*) Courbe d'écrouissage, d'un matériau fragile.
(*b*) Courbe d'écrouissage d'un matériau ductile.

4.1.4. *Endommagement de fatigue*

Sous l'action de sollicitations répétées, périodiques ou non, des ruptures microfragiles discontinues dans le temps interviennent. Elles sont souvent intracristallines et se manifestent par des stries sur les faciès de rupture. Un exemple est donné sur la figure 21 du chapitre 1.

Cet endommagement existe dans le domaine des petites déformations et est essentiellement fonction du nombre de cycles de sollicitations.

4.2. Rupture par fissuration d'une structure

Une fissure étant amorçée dans une structure (1 mm, 1 cm, 10 cm), sous l'effet de sollicitations, elle peut croître et provoquer la rupture de cette structure, c'est-à-dire sa séparation en plusieurs morceaux. Là encore, selon les matériaux et le type de sollicitation, différents mécanismes peuvent intervenir.

4.2.1. *Fissuration par rupture fragile*

La propagation de la fissure résulte d'un phénomène d'instabilité. Elle se propage à grande vitesse sans dissipation plastique appréciable. Les seules énergies mises en jeu sont l'énergie élastique emmagasinée et l'énergie de rupture pour créer la surface de discontinuité que constitue la fissure. Le graphe effort-longueur ou surface de fissure a l'allure indiquée sur la figure 44*a*.

4.2.2. *Fissuration par rupture ductile*

La croissance de la fissure est stable, elle progresse à une vitesse qui n'est fonction que de la vitesse de mise en charge de la structure. Dans le bilan énergétique on doit prendre en considération l'énergie dissipée en déformations plastiques dans la région voisine du front de fissure. Le graphe correspondant a l'allure indiquée sur la figure 44*b*.

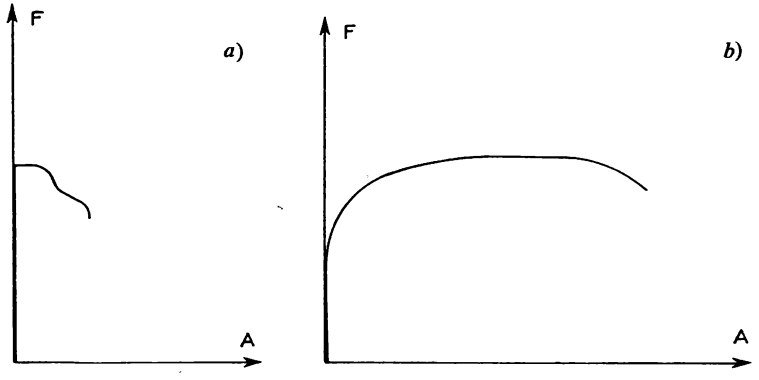


Fig. 44. Courbe effort-surface de fissure (*a*) rupture fragile, (*b*) rupture ductile.

4.2.3. *Fissuration par fluage*

Dans les métaux à haute température la fissure peut croître sous sollicitation constante à une vitesse qui dépend du niveau de cette sollicitation.

4.2.4. *Fissuration par fatigue*

Par le même mécanisme que pour l'élément de volume, des sollicitations répétées, périodiques ou non, engendrent une progression discontinue de la fissure pour laquelle le nombre de cycles est la variable de description cinématique. Sur la surface de fissure on observe des stries.

5. SCHÉMATISATION DES FROTTEMENTS

Dans les problèmes relatifs à la mise en forme on est amené à modéliser les forces de frottement au contact entre le matériau déformé et l'outil (cas du filage par exemple).

Les interactions de surfaces sont une conséquence de la rugosité des surfaces en présence qui réduit les surfaces de contact réel à une faible fraction de leur valeur apparente. En conséquence, tout effort normal induit des contraintes locales dépassant la limite d'élasticité.

5.1. Modèle de Coulomb

Il résulte de la théorie du frottement par adhésion. On définit le coefficient de frottement f comme le rapport de l'effort tangentiel à l'effort normal exercé sur les surfaces.

L'effort tangentiel s'exprime comme le produit de la surface de contact réel par la contrainte de rupture en cisaillement τ_R du matériau le moins résistant ; on suppose que l'effort normal s'exprime comme le produit de la surface de contact réel par la dureté Brinel H du matériau, si bien que le coefficient de frottement vaut : $f = \tau_R/H$, quantité caractéristique des deux matériaux en contact.

Le modèle de Coulomb exprime la contrainte tangentielle σ_{12} qui s'oppose au mouvement de translation relatif de deux matériaux soumis à une contrainte normale de contact σ_{11} sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= f\sigma_{11} \quad \text{si } f\sigma_{11} < \tau_R \\ \sigma_{12} &= \tau_R \quad \text{si } f\sigma_{11} \geqslant \tau_R \end{aligned} .$$

Le tableau 45 donne quelques valeurs de f pour des couples de matériaux particuliers.

Métal	Température	Lubrification	f	$\overline{m}$
Acier doux	20°	Sec	0,25	0,5
Acier doux	950°	Sec	0,45	0,3 à 1
Acier doux	20°	Huile	0,03	0,05
Aciers	20°	Savons	0.05	0,07
Aluminium	20°	Huile	0,05	0,15
Cuivre	20°	Sec	0,1	0,9
Cuivre	850°	Graphite	0,25	0,2

Tableau 45. Valeurs approximatives de coefficients de frottement.

5.2. Modèle de couche limite

A l'interface il se forme souvent une couche mince d'oxydes ou de lubrifiants parfaitement adhérente aux deux corps.

On suppose que le mouvement relatif ne peut s'opérer que par cisaillement de cette couche pour une contrainte tangentielle égale à une fraction $\overline{m}$ de la contrainte de rupture ou de plastification en cisaillement du matériau le moins résistant :

$$\sigma_{12} = \overline{m}\tau_R$$

$\overline{m}$ est le coefficient de frottement de couche limite $0 \leqslant \overline{m} \leqslant 1$,
$\overline{m} = 0$ caractérise le contact sans frottement,
$\overline{m} = 1$ caractérise le contact « collant » des matériaux à température élevée.

Le tableau 45 indique quelques valeurs caractéristiques de $\overline{m}$.

6. BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE 3

PERSOZ B. *Introduction à l'étude de la rhéologie.* Dunod (1960).

MALVERN L. E. *Introduction to the mechanics of a continuous medium.* Prentice Hall (1969).

MANDEL J. *Propriétés mécaniques des matériaux.* Eyrolles (1978).

LIEURADE H. P. *La pratique des essais de fatigue.* P. Y. C. Edition (1982).

BROYDEN C. G., FLETCHER R., MURRAY W., POWEL M. J. D., SWANN W. M. *Numerical methods for unconstrained optimization.* Murray Ed. (1972).

LOVEDAY M. S., DAY M. F., DYSON B. F. *Measurement of high temperature mechanical properties of materials.* National Physical Laboratory. The Majesty's Stationery Office (1982).

A.S.T.M. *Metals Handbook* : Vol. 1 à 12. American Society for Metals.

Chapitre 4

ÉLASTICITÉ, THERMOÉLASTICITÉ, VISCOÉLASTICITÉ LINÉAIRES

« *Une loi est un modèle qui n'est plus* (*et pas encore* !) *contesté.* »

R. Hooke (1676), T. Young (1807), A. L. Cauchy (1822), Timoshenko (1934)..., tout a été dit, ou presque sur le comportement élastique linéaire des matériaux. Dans ce domaine, on se bornera donc à des rappels sous forme de formulaire, en insistant sur l'élasticité anisotrope si importante pour les matériaux composites et sur l'identification des coefficients. Le terme élasticité est employé ici au sens de réversibilité des déformations comme indiqué au chapitre 3. Il n'exclut ni la dissipation thermique (thermoélasticité) ni la dissipation mécanique par viscosité (viscoélasticité).

La thermoélasticité introduit plusieurs coefficients supplémentaires dans la loi de comportement, dont le coefficient de dilatation, et permet de traiter les problèmes liés aux variations de température comme les problèmes de contraintes d'origine thermique.

La théorie de la viscoélasticité s'est considérablement développée avec la rhéologie dans les années 1960. On se restreint, dans ce chapitre, à la viscoélasticité linéaire, suffisante pour traiter les problèmes de comportement mécanique de certains polymères.

Ces théories sont des théories de milieux continus, les hétérogénéités sont supposées suffisamment petites par rapport à la taille de l'élément de volume pour que les résultats d'expériences effectuées sur ce dernier, soient bien caractéristiques du comportement macroscopique moyen. Ceci vaut aussi pour les composites et les bétons dont les comportements peuvent être approchés plus finement par les techniques d'homogénéisation.

1. ÉLASTICITÉ

1.1. Domaine de validité et d'emploi

Tous les matériaux solides possèdent un domaine de l'espace des contraintes à l'intérieur duquel une variation des sollicitations n'entraîne qu'une variation de déformation élastique. Comme on l'a vu au chapitre 1, il s'agit de mouvements réversibles d'atomes, de molécules ou de cellules, qui correspondent à des déformations n'excédant pas 0,2 à $0{,}5.10^{-2}$ pour les matériaux métalliques, les composites, les bétons, les bois, ce qui justifie l'hypothèse des petites déformations. La dissipation est nulle.

La limite de ce domaine d'élasticité, dont une étude précise est faite au chapitre 5, dépend de la température et des sollicitations mécaniques antérieures, dues aux procédés d'élaboration ou au service des pièces mécaniques. La température, favorisant les mouvements irréversibles, diminue la taille de ce domaine jusqu'à la rendre nulle à la fusion. Les sollicitations mécaniques, au contraire, par le phénomène d'écrouissage peuvent l'augmenter considérablement.

Avant d'utiliser la théorie de l'élasticité pour telle ou telle application, il y a donc lieu de s'assurer que l'ordre de grandeur des contraintes est bien compatible avec le domaine d'élasticité du matériau considéré, tel qu'il est défini au chapitre V. Ce travail n'est pas toujours réalisable « a priori » mais il l'est toujours « a postériori ».

L'hypothèse d'isotropie élastique est très bien vérifiée pour les matériaux métalliques, elle l'est un peu moins pour le béton alors que pour les composites et les bois, il faut utiliser des théories à anisotropies particulières.

1.2. Formulation

On suit la méthode de l'état local exposée au chapitre 2. La schématisation du solide élastique, définie au chapitre 3, montre que les variables d'état à faire intervenir sont la température et la déformation élastique. Si l'on se restreint aux transformations isothermes, seule la déformation élastique, égale à la déformation totale ε, intervient comme variable d'état ; la température intervient comme un paramètre dont dépendent les coefficients d'élasticité. Le comportement est décrit en petites déformations ; configuration initiale et configuration actuelle sont donc confondues.

1.2.1. *Potentiel thermodynamique*

Pour obtenir une théorie linéaire, il suffit de choisir comme potentiel thermodynamique convexe, une forme quadratique définie positive des composantes du tenseur des déformations :

soit : $\Psi = \frac{1}{2\rho} \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}$ *

ρ étant la masse volumique,

a est un tenseur du 4e ordre, dont les composantes sont les coefficients d'élasticité isotherme éventuellement fonctions de la température.

Par définition de la variable associée, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dérive du potentiel Ψ pour donner la loi d'état :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon} .$$

Le tenseur **a** vérifie certaines propriétés de symétrie. En effet :

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = a_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \quad \text{et} \quad \sigma_{kl} = a_{klij}\, \varepsilon_{ij}$$

en dérivant de nouveau on obtient :

$$a_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}\, \partial \varepsilon_{kl}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{kl}\, \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = a_{klij}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}}$$

est la loi de Hooke généralisée du milieu élastique linéaire isotrope, qui dépend des 21 coefficients, composantes indépendantes du tenseur symétrique de rigidité élastique.

Par inversion, ou par définition d'un potentiel dual :

$$\Psi^* = \frac{1}{2\rho} \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}$$

on introduit de même, le tenseur de souplesse, du 4e ordre, symétrique, **A** :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma} .$$

Le cas de l'élasticité non linéaire se traite par le choix d'autres formes du potentiel Ψ, qui doivent bien entendu assurer la convexité.

1.2.2. *Elasticité linéaire isotrope*

L'isotropie et la linéarité imposent que le potentiel Ψ soit un invariant quadratique du tenseur des déformations, c'est-à-dire une combinaison linéaire du carré du premier invariant $\varepsilon_I^2 = [\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon})]^2$ et du second invariant $\varepsilon_{II} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$:

$$\Psi = \frac{1}{2\rho}(\lambda \varepsilon_I^2 + 4\,\mu \varepsilon_{II})$$

* Les deux points : désignent le produit tensoriel contracté sur deux indices.

et $$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\, \mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}} \quad *$$

ou : $$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

λ et μ sont les deux coefficients de Lame.

En travaillant avec la forme duale :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma}$$

on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\, \mathbf{1}}$$

ou $$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

E est le module d'Young,
ν est le coefficient de Poisson dont les valeurs sont données sur le tableau du paragraphe 1.4 pour différents matériaux.

Les relations entre parties sphériques :

$$\sigma_H = \frac{1}{3}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$$

$$\varepsilon_H = \frac{1}{3}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

et déviateurs :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_H \mathbf{1}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_H \mathbf{1}$$

sont également utiles :

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_H &= \frac{1-2\nu}{E}\sigma_H \\ \boldsymbol{\varepsilon}' &= \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}' \end{aligned}}$$

Enfin, indiquons les relations classiques entre les coefficients de Lame, le module d'Young, le coefficient de Poisson, le module de cisaillement G et le module de compression hydrostatique K.

* **1** est le tenseur unité.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu, \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}.$$

Pour que la loi d'élasticité dérive d'un potentiel quadratique, la seule condition que doivent vérifier les coefficients est (le module E est supposé positif) :

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}.$$

Ce résultat découle immédiatement de la démonstration générale du cas orthotrope (voir § 1.2.3).

Cas de l'hypothèse des contraintes planes

(valable par exemple pour les plaques minces).

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.$$

De l'expression $\sigma_{33} = 0$, on tire facilement la relation contrainte-déformation en deux dimensions :

$$\sigma_{ij} = \lambda' \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (i \text{ et } j = 1, 2)$$

où $$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}.$$

La relation entre $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ devient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

$$\varepsilon_{13} = 0$$

$$\varepsilon_{23} = 0.$$

Cas de l'hypothèse des déformations planes

(valable par exemple pour les plaques épaisses).

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{23} = 0\,.$$

1.2.3. *Elasticité orthotrope*

Un milieu est dit orthotrope pour une propriété donnée, si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux (ce qui entraîne d'ailleurs la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal). Autrement dit, si les caractéristiques d'élasticité d'éprouvettes découpées selon des axes symétriques par rapport à un plan particulier P_1 puis par rapport à un autre P_2 sont identiques, alors le matériau est orthotrope de plans d'orthotropie P_1 et P_2. Les intersections de ces trois plans de symétrie définissent les axes principaux d'orthotropie. C'est un modèle qui schématise bien la constitution des composites unidirectionnels et des bois, mais aussi des produits métalliques laminés.

La matrice de souplesse du matériau orthotrope ne comporte que 9 coefficients indépendants. On peut en effet écrire les relations entre contrainte et déformation dans des systèmes d'axes tels que l'axe 1 fasse un angle α ou $-\alpha$ avec l'un des axes principaux d'orthotropie :

$$\{\varepsilon\}^{(\alpha)} = [A]^{(\alpha)} \{\sigma\}^{(\alpha)}$$

$$\{\varepsilon\}^{(-\alpha)} = [A]^{(-\alpha)} \{\sigma\}^{(-\alpha)}\,.$$

Les matrices $[A]^{(\alpha)}$ et $[A]^{(-\alpha)}$ ne diffèrent que par les rotations élémentaires d'angle α. Par définition, l'orthotropie signifie que $\{\varepsilon\}^{(\alpha)} = \{\varepsilon\}^{(-\alpha)}$ dès que l'on applique des contraintes identiques dans les axes (α) et $(-\alpha)$: $\{\sigma\}^{(\alpha)} = \{\sigma\}^{(-\alpha)}$. Ceci est vrai quels que soient α et les six composantes de contrainte indépendantes : on obtient donc six relations entre les coefficients d'élasticité. De façon similaire, six autres relations sont obtenues par rapport au deuxième axe d'orthotropie (celles relatives au troisième axe sont automatiquement vérifiées). Il reste alors $21 - 6 - 6 = 9$ coefficients indépendants.

Dans le repère principal d'orthotropie, la loi peut donc se mettre sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

avec les conditions de symétrie :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}.$$

Le matériau est caractérisé par 9 coefficients indépendants :

- 3 modules de tension E_1, E_2, E_3 dans les directions de l'orthotropie,
- 3 modules de cisaillement G_{12}, G_{23}, G_{31},
- 3 coefficients de contraction ν_{12}, ν_{23}, ν_{31} par exemple.

Ces coefficients doivent en plus vérifier certaines inégalités pour assurer que le potentiel thermodynamique duquel on est parti est bien une forme quadratique définie positive :

$$\Psi = \frac{1}{2\rho}\mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma}.$$

Considérant que les modules de tension et de cisaillement sont des quantités positives, Ψ sera une forme définie positive si les valeurs propres de la matrice des coefficients de contraction sont strictement positives, ce qui conduit à :

$$1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0, \quad 1 - \nu_{23}\nu_{31} > 0, \quad 1 - \nu_{13}\nu_{31} > 0$$

$$1 - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{13}\nu_{32} - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{32}\nu_{23} > 0.$$

Des exemples de valeurs des coefficients d'élasticité orthotrope pour quelques matériaux sont donnés dans le tableau du paragraphe 1.4.

1.2.4. *Elasticité à isotropie transverse*

Un milieu est élastique à isotropie transverse si ses caractéristiques d'élasticité sont identiques pour tous les couples de directions symétriques par rapport à un axe.

Si l'axe d'isotropie transverse est repéré par $\vec{x}_3$ le matériau est « isotrope » dans tous les plans normaux à $\vec{x}_3$.

Un composite stratifié obtenu par collage de couches formées de fibres unidirectionnelles et disposées selon « toutes » les directions peut être considéré comme isotrope transverse. Il en est de même des alliages obtenus par solidification orientée.

Une démonstration analogue à celle indiquée plus haut pour le matériau orthotrope montre que seuls 5 coefficients de la matrice d'élasticité sont indépendants. Plus précisément, les conditions d'isotropie dans les plans normaux à $\vec{x}_3$ impliquent :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}.$$

Par rapport au cas orthotrope, on a tenu compte des égalités suivantes :

$E_1 = E_2$ mêmes modules de tension dans les directions 1 et 2.

$\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$ même contraction suivant 1 et 2 pour une traction appliquée suivant 3.

$G_{13} = G_{23}$ mêmes modules de cisaillement autour des directions 2 et 1.

$2G_{12} = \frac{E_1}{1+\nu_{12}}$ module de cisaillement autour de 3.

Le matériau est alors caractérisé par 5 coefficients indépendants :

2 modules de tension E_1, E_3,
1 module de cisaillement G_{13},
2 coefficients de contraction ν_{12}, ν_{13}.

Quelques exemples de valeurs sont donnés dans le tableau du paragraphe 1.4.

1.3. Identification

L'identification des coefficients caractéristiques de l'élasticité repose sur l'évaluation de raideurs dans des essais statiques de traction-compression, dans des essais de vibrations ou dans des essais de propagation d'ondes.

Ces trois grands types de méthode ne donnent pas tout à fait les mêmes résultats pour un même matériau car les méthodes dynamiques ne prennent pas en compte certains mouvements « visqueux » d'atomes ou de molécules et, de ce fait, donnent des rigidités un peu plus grandes.

1.3.1. *Méthodes statiques*

Ce sont celles qui sont conseillées pour les calculs de déformations et de résistance statique des structures.

La caractérisation des matériaux aux températures ambiante ou inférieures à 200 à 300 °C se fait par des essais de traction ou compression uniaxiales sur éprouvettes classiques, sur lesquelles la mesure des déformations axiale ε_{11} et transversales ε_{22}, ε_{33} est réalisée par jauges électriques.

Cas de l'élasticité isotrope

La contrainte axiale σ_{11} étant connue par la mesure de la force sollicitatrice de l'éprouvette (voir chap. 3), on obtient :

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}, \qquad \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}.$$

La précision relative généralement obtenue est de la classe de 1 %.

Cas de l'élasticité orthotrope

On peut obtenir les 9 coefficients caractéristiques par essais de traction ou compression sur des éprouvettes taillées dans les trois directions d'orthotropie et dans trois directions à $\pi/4$ (fig. 1).

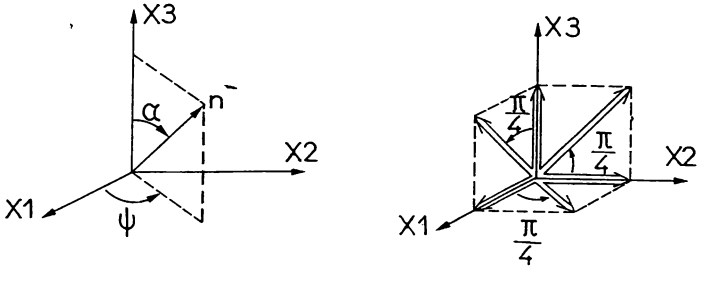


Fig. 1. Directions pour la caractérisation de l'élasticité orthotrope.

Pour cela il faut exprimer à l'aide de la loi de comportement orthotrope la relation entre la contrainte normale $\sigma^{(n)}$ et la déformation normale $\varepsilon^{(n)}$ dans une direction quelconque $\vec{n}$ par rapport aux axes d'orthotropie (fig. 1).

$$\vec{n} = \vec{x}_1 \sin\alpha \cos\Psi + \vec{x}_2 \sin\alpha \sin\Psi + \vec{x}_3 \cos\alpha .$$

La contrainte uniaxiale dans un repère dont $\vec{n}$ est vecteur de base a pour composantes dans le repère d'orthotropie $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

$$[\sigma] = \sigma^* \begin{bmatrix} \sin^2\alpha\cos^2\Psi & \sin^2\alpha\sin\Psi\cos\Psi & \sin\alpha\cos\alpha\cos\Psi \\ \sin^2\alpha\sin\Psi\cos\Psi & \sin^2\alpha\sin^2\Psi & \sin\alpha\cos\alpha\sin\Psi \\ \sin\alpha\cos\alpha\cos\Psi & \sin\alpha\cos\alpha\sin\Psi & \cos^2\alpha \end{bmatrix}.$$

La déformation correspondante $\boldsymbol{\varepsilon}$ s'en déduit par la loi de comportement orthotrope :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma} .$$

On en déduit les expressions suivantes en fonction des mesures effectuées : $\sigma^{(n)}$, $\varepsilon_{11}^{(n)}$, $\varepsilon_{22}^{(n)}$, $\varepsilon_{33}^{(n)}$, pour six essais de traction réalisés dans les six directions particulières :

$$\vec{n} = \vec{x}_1 \to E_1 = \frac{\sigma^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n)}}, \qquad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n)}}, \qquad \nu_{13} = -\frac{\varepsilon_{33}^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n)}}$$

$$\vec{n} = \vec{x}_2 \to E_2 = \frac{\sigma^{(n)}}{\varepsilon_{22}^{(n)}}, \qquad \nu_{21} = -\frac{\varepsilon_{11}^{(n)}}{\varepsilon_{22}^{(n)}}, \qquad \nu_{23} = -\frac{\varepsilon_{33}^{(n)}}{\varepsilon_{22}^{(n)}}$$

$$\vec{n} = \vec{x}_3 \to E_3 = \frac{\sigma^{(n)}}{\varepsilon_{33}^{(n)}}, \qquad \nu_{31} = -\frac{\varepsilon_{11}^{(n)}}{\varepsilon_{33}^{(n)}}, \qquad \nu_{32} = -\frac{\varepsilon_{22}^{(n)}}{\varepsilon_{33}^{(n)}}$$

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \to \frac{1}{G_{12}} = 4\frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1-\nu_{21}}{E_2} - \frac{1-\nu_{12}}{E_1}$$

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{x}_2 + \vec{x}_3) \to \frac{1}{G_{23}} = 4\frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1-\nu_{23}}{E_2} - \frac{1-\nu_{32}}{E_3}$$

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{x}_3 + \vec{x}_1) \to \frac{1}{G_{31}} = 4\frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1-\nu_{13}}{E_1} - \frac{1-\nu_{31}}{E_3}.$$

Des essais de cisaillement pur ou de cisaillement par torsion de tubes permettent des recoupements intéressants. La classe de précision relative obtenue est de l'ordre de 1 à 5 %.

1.3.2. *Méthodes dynamiques*

Dans le domaine des basses ou moyennes fréquences (10 à 100 Hz), on peut tirer le module d'Young de la mesure des premières fréquences propres d'une poutre en vibration de flexion.

Par exemple pour une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre, la première fréquence f s'exprime par :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3{,}515\,6}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E = \omega^2 \frac{\rho S L^4}{12{,}359\,6\,I}}$$

où S est la section (constante) de la poutre,
L est sa longueur,
I est son moment d'inertie de flexion,
ρ est la masse volumique du matériau,
ω est la première pulsation propre qui résulte de la mesure.

Dans le domaine des hautes fréquences (> 20 000 Hz), on peut utiliser la mesure du temps de parcours des ondes ultrasonores. Par exemple, dans un milieu élastique linéaire isotrope de constantes élastiques E et ν et de masse volumique ρ, les vitesses des ondes longitudinales v_L et transversales v_T s'expriment par :

$$v_L^2 = \frac{E}{\rho}\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad v_T^2 = \frac{E}{\rho}\frac{1}{2(1+\nu)}$$

d'où l'on tire :

$$\boxed{E = \rho v_T^2 \frac{3v_L^2 - 4v_T^2}{v_L^2 - v_T^2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\nu = \frac{1}{2}\frac{v_L^2 - 2v_T^2}{v_L^2 - v_T^2}}.$$

Les techniques ultrasonores permettent de mesurer des temps de parcours, et donc des vitesses, avec une précision relative de l'ordre de 10^{-4} ce qui conduit à une précision relative de 3.10^{-3} sur le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν.

1.4. Tableau de caractéristiques d'élasticité de matériaux usuels.

Matériau	Température °C	Module d'Young MPa	Coefficient de Poisson
Alliage d'aluminium AU4G	20 200 500	72 000 66 000 50 000	0,32 0,325 0,35
Alliage de titane Ti 4 Al 4 Mn	20 200 315	115 000 103 400 95 000	0,34
Acier XC 10	20 200 600	216 000 205 000 170 000	0,29 0,30 0,315
Fonte grise	20	100 000	0,29
Acier inoxydable A 316	20 200 700	196 000 170 000 131 000	0,3
Aluminium (A5)	20	68 000	0,33
Bronze	180 20	61 000 130 000	0,34
Plexiglass	20	2 900	0,4
Araldite	20	3 000	0,4
Caoutchouc	20	2	0,5
Composite unidirectionnel verre-époxy (sens long.)	20	19 000	0.30
Composite unidirectionnel carbone-époxy (sens long.)	20	87 600	0.32
Béton	20	30 000	0,2
Granit	20	60 000	0,27
Bois pin sylvestre { sens des fibres sens transversal	20 20	17 000 1 000	0,45 0,79

1.5. Notions sur la méthode des éléments finis

On donne ici les bases de la méthode des éléments finis, considérée comme méthode standard de résolution des problèmes de champ en élasticité. D'autres méthodes existent, en particulier la méthode des équations intégrales, mais nous n'en parlerons pas.

1.5.1. *Généralités*

Les méthodes numériques approchées de calcul des structures reviennent à trouver, dans une classe de champs de déplacements (ou de contraintes) « raisonnables », celui

— qui minimise l'énergie potentielle $\mathscr{V}$ pour les champs cinématiquement admissibles,

— ou qui maximise l'énergie potentielle complémentaire $\mathscr{V}^*$ pour les champs statiquement admissibles.

La méthode des éléments finis consiste à calculer l'énergie potentielle $\mathscr{V}$ ou $\mathscr{V}^*$ comme la somme des énergies de tous les éléments de la structure divisée en éléments finis (lignes, surfaces ou volumes selon la schématisation de la structure).

Dans chaque élément les champs inconnus (les déplacements) sont représentés par une combinaison linéaire de fonctions des coordonnées d'espace. Les coefficients de cette combinaison dépendent des déplacements des nœuds de l'élément (les sommets par exemple). Ce sont ces derniers qui constituent les inconnues du problème (inconnues nodales ou degrés de liberté). En pratique, il est équivalent d'utiliser le principe des travaux virtuels comme on le fait plus loin.

Après avoir écrit l'égalité des déplacements aux nœuds communs des éléments, la minimisation de l'énergie potentielle conduit à la résolution d'un système linéaire. On a ainsi remplacé un problème d'équations aux dérivées partielles par un problème d'équations algébriques linéaires. Le système résolu, on remonte aux déplacements dans les éléments puis aux déformations et aux contraintes.

1.5.2. *Formulation des caractéristiques d'un élément*

De nombreux types d'éléments peuvent être développés. Une méthodologie générale existe pour l'écriture de tels éléments comportant beaucoup de degrés de liberté. On se contente ici d'illustrer le principe de la méthode des éléments finis sur le cas le plus simple, l'élément plan triangulaire à trois nœuds (fig. 2).

Les déplacements d'un point M, repéré par ses coordonnées x_1, x_2, se met sous la forme d'un vecteur colonne * :

* Le symbole matriciel [ ] est omis pour toutes les variables de ce paragraphe.

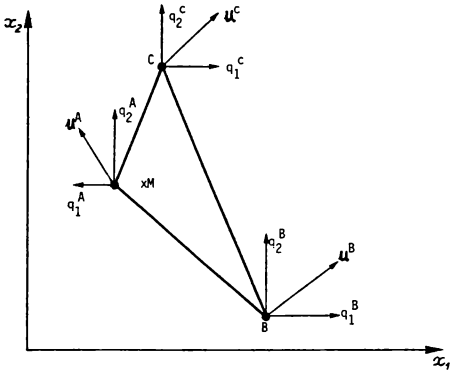


Fig. 2. Triangle à 3 nœuds.

$$U = \begin{bmatrix} U_1(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Les degrés de liberté de l'élément sont les six composantes des déplacements des nœuds A, B, C :

$$q = \begin{Bmatrix} q_1^A \\ q_2^A \\ q_1^B \\ q_2^B \\ q_1^C \\ q_2^C \end{Bmatrix}.$$

Les déplacements inconnus u sont représentés par une combinaison linéaire de fonctions de base :

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 + C_2 x_1 + C_3 x_2 \\ C_4 + C_5 x_1 + C_6 x_2 \end{Bmatrix}.$$

Les coefficients $C_1 \ldots C_6$ sont des fonctions linéaires des déplacements nodaux $\vec{q}$, fonctions que l'on obtient en écrivant l'identité entre u et q en chacun des nœuds. Le déplacement en tout point s'exprime par :

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^{BC}(x_1, x_2)\, q_1^A + N^{CA}(x_1, x_2)\, q_1^B + N^{AB}(x_1, x_2)\, q_1^C \\ N^{BC}(x_1, x_2)\, q_2^A + N^{CA}(x_1, x_2)\, q_2^B + N^{AB}(x_1, x_2)\, q_2^C \end{Bmatrix}.$$

Dans le cas présent, les fonctions $N(x_1, x_2)$ sont linéaires. Elles sont appelées fonctions de forme de l'élément. On écrira de façon abrégée

$$u = Nq\,.$$

Les déformations s'expriment par le vecteur colonne :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\,\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} = Bq$$

où B est la matrice 3×6 déduite de N par dérivation. La composante $2\,\varepsilon_{12}$ est utilisée afin que l'énergie de déformation puisse s'écrire simplement par le produit $\sigma^T\,\varepsilon$, où les contraintes σ sont représentées par le vecteur colonne * :

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\,\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = a\varepsilon$$

si l'on est en élasticité isotrope et dans le cas d'un élément traité en contraintes planes.

Pour écrire l'équilibre de l'élément on considère un champ de déplacement cinématiquement admissible $u'(M)$ auquel est associé le champ de déformation $\varepsilon'(M)$ et l'on écrit le principe des travaux virtuels (voir chap. 2).

$$\int_{\mathscr{D}} f^T u'\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathscr{D}} F^T u'\,\mathrm{d}S - \int_{\mathscr{D}} \sigma^T \varepsilon'\,\mathrm{d}V = 0 \qquad \forall u'$$

où f et F sont les efforts extérieurs appliqués dans le volume (ici la surface $\mathscr{D}$ de l'élément) et à la frontière $\hat{c}\mathscr{D}$. En tenant compte des relations portant sur les inconnues nodales on peut écrire :

$$\sigma^T \varepsilon' = \{\, a\varepsilon \,\}^T \varepsilon' = q^T B^T a B q'$$

où q' représente n'importe quel choix pour les valeurs des déplacements nodaux. En reportant on obtient facilement :

$$\left[\int_{\mathscr{D}} f^T N\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathscr{D}} F^T N\,\mathrm{d}S - q^T \int_{\mathscr{D}} B^T a B\,\mathrm{d}V\right] q' = 0$$

ou

$$[-\,q^T K + Q^T]\,q' = 0 \qquad \forall q'\,.$$

Cette égalité est vérifiée quel que soit q'. Elle entraîne donc :

$$Kq = Q$$

K est la matrice de rigidité de l'élément. Elle est symétrique

$$K = \int_{\mathscr{D}} B^T a B\,\mathrm{d}V$$

* Le symbole T désigne la transposition.

Q est la colonne des forces extérieures généralisées aux nœuds :

$$Q = \int_{\mathscr{D}} N^T f \, dV + \int_{\partial\mathscr{D}} N^T F \, dS .$$

Si l'on connaît ces efforts extérieurs, la résolution du système linéaire $Kq = Q$ fournit les déplacements nodaux q. On en déduit les déplacements $u = Nq$, les déformations $\varepsilon = Bq$ et les contraintes $\sigma = a\varepsilon$.

1.5.3. *Assemblage*

Pour résoudre le problème de la structure entière (calcul de q relatif à tous les éléments) il faut écrire le travail virtuel de toute la structure en sommant sur tous les éléments. En même temps on écrit que la structure est continue, c'est-à-dire que les déplacements aux nœuds communs à plusieurs éléments sont égaux. Notons que l'égalité aux nœuds assure l'égalité des déplacements en tout point de la frontière : on dit que les éléments sont conformes.

Dans la pratique cette opération d'assemblage revient à ajouter les contributions de rigidité (et d'efforts extérieurs) associées à chacun des éléments contenant un nœud donné. Plus précisément on peut appeler ${}^E q$ l'ensemble des degrés de liberté de tous les éléments sans tenir compte des liaisons et q l'ensemble de tous les degrés de liberté en tenant compte des liaisons ; on a :

$${}^E q = Aq$$

où A est une matrice rectangulaire puisque la dimension de q est inférieure à celle de ${}^E q$. De même, on appelle ${}^E K$ et ${}^E Q$ la matrice et la colonne obtenues par juxtaposition simple des matrices de rigidité et des efforts nodaux de chacun des éléments :

$${}^E K = \begin{bmatrix} {}^1K & & & \\ & {}^2K & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad {}^E Q = \begin{Bmatrix} {}^1Q \\ {}^2Q \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$[- {}^E q^T \, {}^E K + {}^E Q^T] \, {}^E q' = 0$$

quel que soit ${}^E q'$ cinématiquement admissible, c'est-à-dire vérifiant les liaisons : ${}^E q' = Aq'$. L'assemblage se fait par :

$$[- (Aq)^T \, {}^E K + {}^E Q^T] \, Aq' = 0 \qquad \forall q'$$

ce qui conduit à

$$- A^{T\,E}KAq + A^{T\,E}Q = 0$$

que l'on peut encore écrire :

$$Kq = Q$$

où K est la matrice de rigidité assemblée $K = A^{T\,E}KA$, Q et q respectivement la colonne des efforts extérieurs et la colonne des déplacements nodaux du système assemblé.

Résoudre un problème d'élasticité par la méthode des éléments finis nécessite donc l'établissement de la matrice K et du second membre Q et la résolution du système linéaire ci-dessus. Il est souvent nécessaire de décomposer une structure en un grand nombre d'éléments, avec de nombreux degrés de liberté (de 1 000 à 10 000 ou même plus). La matrice K peut donc être énorme ; elle présente cependant une structure en bande de coefficients situés autour de la diagonale principale, ce qui diminue le nombre de termes non nuls et facilite la résolution. La largeur de bande de la matrice de raideur assemblée dépend de la numérotation choisie pour les nœuds de la structure (si un élément contient des nœuds dont les numéros sont très éloignés les uns des autres il induit une largeur de bande élevée).

2. THERMOÉLASTICITÉ

La thermoélasticité fait intervenir une variable de plus par rapport à l'élasticité : la température, qui induit le phénomène supplémentaire de dilatation. La dissipation intrinsèque est toujours nulle mais la dissipation thermique intervient.

La théorie de la thermoélasticité doit être utilisée pour les matériaux élastiques à chaque fois que les sollicitations comprennent des variations de température. On n'aborde ici que les aspects liés à la loi de comportement elle-même et à la détermination des coefficients caractéristiques en fonction de la température.

2.1. Formulation

Soit T_0 une température de référence d'un élément de volume d'un matériau élastique et T sa température à un instant postérieur tel que l'écart de température : $\theta = T - T_0$ soit petit par rapport à T_0. Sous cette condition, les caractéristiques d'élasticité et la masse volumique ρ peuvent être considérées comme constantes.

La loi de thermoélasticité linéaire classique s'obtient en choisissant encore pour potentiel thermodynamique une forme quadratique définie positive des déformations, auxquelles il faut ajouter la variable température. En faisant

l'hypothèse d'isotropie des phénomènes de déformation et de dilatation, et pour respecter les écritures classiques, on est conduit à poser :

$$\Psi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}(\lambda\varepsilon_{\mathrm{I}}^2 + 4\,\mu\varepsilon_{\mathrm{II}}) - (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\alpha\theta\varepsilon_{\mathrm{I}}\right] - \frac{C_\varepsilon}{2\,T_0}\theta^2$$

α et C_ε sont deux coefficients dont la signification est précisée par les lois d'état dérivées de Ψ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\,\mathbf{1} + 2\,\mu\boldsymbol{\varepsilon} - (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\alpha\theta\mathbf{1}$$

ou $$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} + 2\,\mu\varepsilon_{ij} - (3\,\lambda + 2\,\mu)\,\alpha\theta\delta_{ij}$$

$$s = -\frac{\partial\Psi}{\partial T} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \frac{1}{\rho}(3\,\lambda + 2\,\mu)\,\alpha\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{C_\varepsilon}{T_0}\theta\,.$$

A l'aide de cette dernière équation, on peut calculer $\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\varepsilon=\mathrm{Cte}}$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\varepsilon=\mathrm{Cte}} = \left(\frac{\partial s}{\partial\theta}\right)_{\varepsilon=\mathrm{Cte}} = \frac{C_\varepsilon}{T_0}.$$

Ce qui montre que $C_\varepsilon = T_0\frac{\partial s}{\partial T}$ est la chaleur spécifique à déformation constante.

Par inversion de la première loi d'état ou en utilisant le potentiel dual $\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}, \theta)$, on peut exprimer les déformations en fonction des contraintes et de la température :

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathbf{1} + \alpha\theta\mathbf{1}}$$

ou $$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\,\delta_{ij} + \alpha\theta\delta_{ij}$$

ce qui constitue la loi de thermoélasticité linéaire isotrope. Si l'on considère une variation de température à contrainte nulle on obtient :

$$\varepsilon_{ij} = \alpha\theta\delta_{ij}$$

ce qui définit le coefficient de dilatation isotrope α.

Les coefficients introduits : λ, μ, α et C_ε sont considérés comme constants pour les petites variations de température considérées ($\theta/T_0 \ll 1$). En pratique ils varient avec la température, mais « faiblement », comme le montrent les graphes de la figure 5.

La loi de comportement thermoélastique permet de calculer les déformations et les contraintes avec effets thermiques dès lors que l'on connaît le champ de

température. Pour traiter un problème complet de thermoélasticité, dans lequel le flux (et non la température) est donné, il faut utiliser la loi de Fourier et l'équation de la chaleur, indiquées au chapitre 2.

2.2. Identification

La loi de comportement thermoélastique est écrite avec l'hypothèse des petites variations de température. Si tel n'est pas le cas, on l'utilise pas à pas avec les coefficients E, ν et α, variables : cela implique de connaître leur évolution en fonction de la température.

On est placé ainsi devant une difficulté expérimentale de taille : la quasi-impossibilité de mesurer avec une précision suffisante les déformations locales dès que la température dépasse la limite d'utilisation des jauges électriques : 200 à 300 °C. Le coefficient de dilatation s'obtient assez facilement en mesurant l'allongement de fils assez longs chauffés dans des fours. Des valeurs particulières sont données sur la figure 5.

Pour le module d'élasticité on peut utiliser aussi des fils assez longs et une extensométrie extérieure au four, mais il se pose le problème de la fiabilité de l'amarrage pour appliquer les efforts (glissements, mauvaise définition de la longueur utile...). Les deux méthodes évoquées ci-dessus sont des moyens d'accéder à des valeurs relativement bonnes sur des échantillons relativement courts.

2.2.1. *Méthode des raideurs comparées*

Il est possible de s'affranchir de mesures locales en utilisant deux éprouvettes de traction d'un même matériau, de têtes identiques et de parties utiles différentes. Les seules mesures à effectuer sont la force sollicitatrice F et un déplacement u, comprenant les déformations de la partie utile de l'éprouvette, de ses têtes et d'une partie de la ligne d'amarrage de la machine permettant de fixer le capteur de déplacement hors de la zone et du dispositif de chauffage (fig. 3).

Soient donc deux éprouvettes A et B dont les dimensions sont définies sur la figure 3.

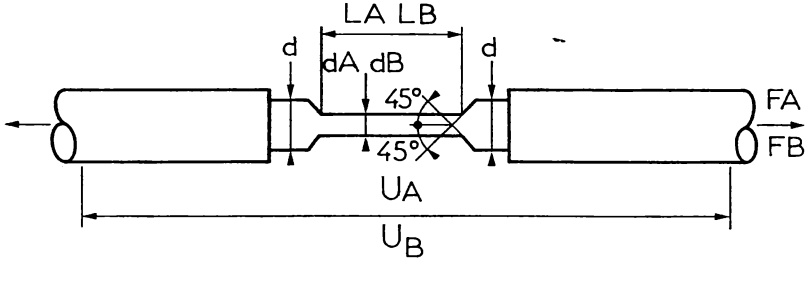


Fig. 3. Éprouvettes de traction pour la méthode des raideurs comparées.

Soient R_A et R_B les raideurs mesurées qui dépendent du module d'Young inconnu E et de la géométrie des éprouvettes :

$$R_A = \frac{\delta F}{\delta u_A}, \qquad R_B = \frac{\delta F}{\delta u_B}.$$

Les raideurs des parties utiles des deux éprouvettes sont :

$$R_A^u = \frac{ES_A}{L_A}, \qquad R_B^u = \frac{ES_B}{L_B} \quad \text{avec} \quad S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

La deuxième inconnue est la raideur R_m des têtes identiques des deux éprouvettes et de la ligne d'amarrage, prise en compte par l'extensomètre. En première approximation on peut considérer qu'elle contient la contribution des cônes de raccordement (différence très minime entre les deux cônes). De plus on néglige les effets de concentration de contrainte. On a donc deux équations à deux inconnues :

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{R_A^u} + \frac{1}{R_m}$$

$$\frac{1}{R_B} = \frac{1}{R_B^u} + \frac{1}{R_m} \quad .$$

desquelles il est aisé de tirer E :

$$\boxed{E = \frac{(L_A/S_A) - (L_B/S_B)}{(1/R_A) - (1/R_B)}} \quad .$$

La précision dépend de l'ordre de grandeur relatif des termes qui interviennent par différence dans l'expression de E.

$L_A/S_A = 2$ à $4\ L_B/S_B$ constitue un bon compromis entre cet aspect numérique de la précision et l'aspect expérimental qui impose de travailler dans la même gamme d'efforts de la machine sans dépasser la limite d'élasticité du matériau pour l'éprouvette A. Cette méthode donne une précision relative de l'ordre de $\pm\ 2\ \%$. Le même principe utilisé pour des essais de torsion donne accès au module de cisaillement G et, connaissant E, au coefficient de Poisson ν. R^* étant cette fois la raideur en torsion, rapport du couple à l'angle de torsion, on trouve :

$$\boxed{G = \frac{32}{\pi} \frac{(L_A/d_A^4) - (L_B/d_B^4)}{(1/R_A^*) - (1/R_B^*)}} \quad .$$

2.2.2. *Méthode de la contrainte d'origine thermique*

Une autre méthode donne directement accès aux évolutions du module d'Young E et du coefficient de dilatation α en fonction de la température, sans mesure de déplacement. La sollicitation est une compression, ce qui est intéressant pour les applications puisque les parties les plus chaudes des structures sont le plus souvent sollicitées en compression. Elle n'utilise qu'une seule éprouvette mais elle nécessite une machine très raide, ou mieux un montage spécial.

Une éprouvette de compression cylindrique ($L/d \simeq 1{,}5$), en série avec un dynamomètre, est placée entre deux plateaux assujettis à un déplacement nul ou quasi nul (fig. 4). Le chauffage de l'éprouvette, à l'aide d'un chauffage à induction par exemple, induit dans l'éprouvette une force qui est mesurée par le dynamomètre. Son expression, donnée par l'équation de thermoélasticité, contient les deux inconnues E et α. La deuxième information est fournie par l'existence d'une précharge à la température de référence.

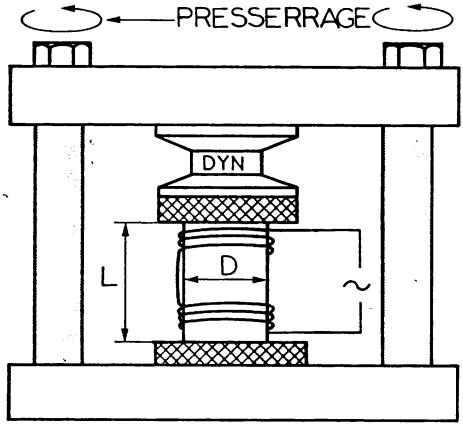


Fig. 4. Dispositif de compression thermique à déplacement nul (d'après S. Tichkiewitch).

— L'éprouvette de section S et de longueur L est portée à une température T_1 qui est l'état de référence pour la déformation.

— Par mouvement de l'un des plateaux (indiqué schématiquement par un préserrage), une force de compression F_1 est appliquée à l'éprouvette. Si E_1 est le module d'Young, supposé connu à la température T_1, la déformation de l'éprouvette vaut :

$$\varepsilon_1 = \frac{F_1}{E_1 S}.$$

— Elle est ensuite portée à la température T_2 sans mouvement important des plateaux (la raideur des éléments de serrage est très grande). En notant R_m

la raideur de l'ensemble montage-dynamomètre, la déformation de l'éprouvette est donnée par :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \frac{F_2 - F_1}{R_m L}.$$

La loi de thermoélasticité linéaire $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\theta$ appliquée entre les états $(T_1, F = 0)$ et (T_2, F_2) donne :

$$\varepsilon_2 = \frac{F_2}{E_2 S} + \alpha_{21}(T_2 - T_1)$$

où E_2 et α_{21} désignent le module d'élasticité à la température T_2 et le coefficient de dilatation « sécant » entre les températures T_1 et T_2. En égalant les deux expressions de ε_2 on obtient :

$$F_2 = F_1 \frac{(1/E_1 S) + (1/R_m L)}{(1/E_2 S) + (1/R_m L)} - \alpha_{21} \frac{T_2 - T_1}{(1/E_2 S) + (1/R_m L)}$$

expression qui montre que F_2 est linéaire en F_1 et de la forme :

$$F_2 = aF_1 + b.$$

— En répétant plusieurs fois la même opération avec des forces F_1 différentes et les mêmes températures T_1 et T_2, a et b sont des constantes que l'on peut identifier d'après les mesures de F_1 et F_2 et desquelles on peut tirer :

$$\boxed{E_2 = \frac{E_1 R_m L a}{R_m L + E_1 S(1 - a)}}$$

$$\boxed{\alpha_{21} = -\frac{b(E_2 S + R_m L)}{E_2 S R_m L(T_2 - T_1)}}.$$

— E étant connu à une température T_1 (T ambiante par exemple), une première expérimentation donne E_2 à T_2 et α_{12}. Connaissant E_2 à T_2 une deuxième expérimentation donne E_3 à T_3 et α_{23} et ainsi de suite. La raideur R_m du montage est déterminée au préalable en remplaçant l'éprouvette par un barreau de raideur beaucoup plus importante.

On peut ainsi opérer de 100 en 100 °C ou de 50 en 50 °C avec une précision qui évidemment décroît par effets cumulatifs mais qui reste de la classe des 2 % jusqu'à plus de 1 000 °C. Il faut bien entendu s'assurer que la limite d'élasticité n'est pas dépassée à la force F_2 pour la température T_2 et que les effets de relaxation des contraintes sont négligeables. Les caractéristiques de l'acier

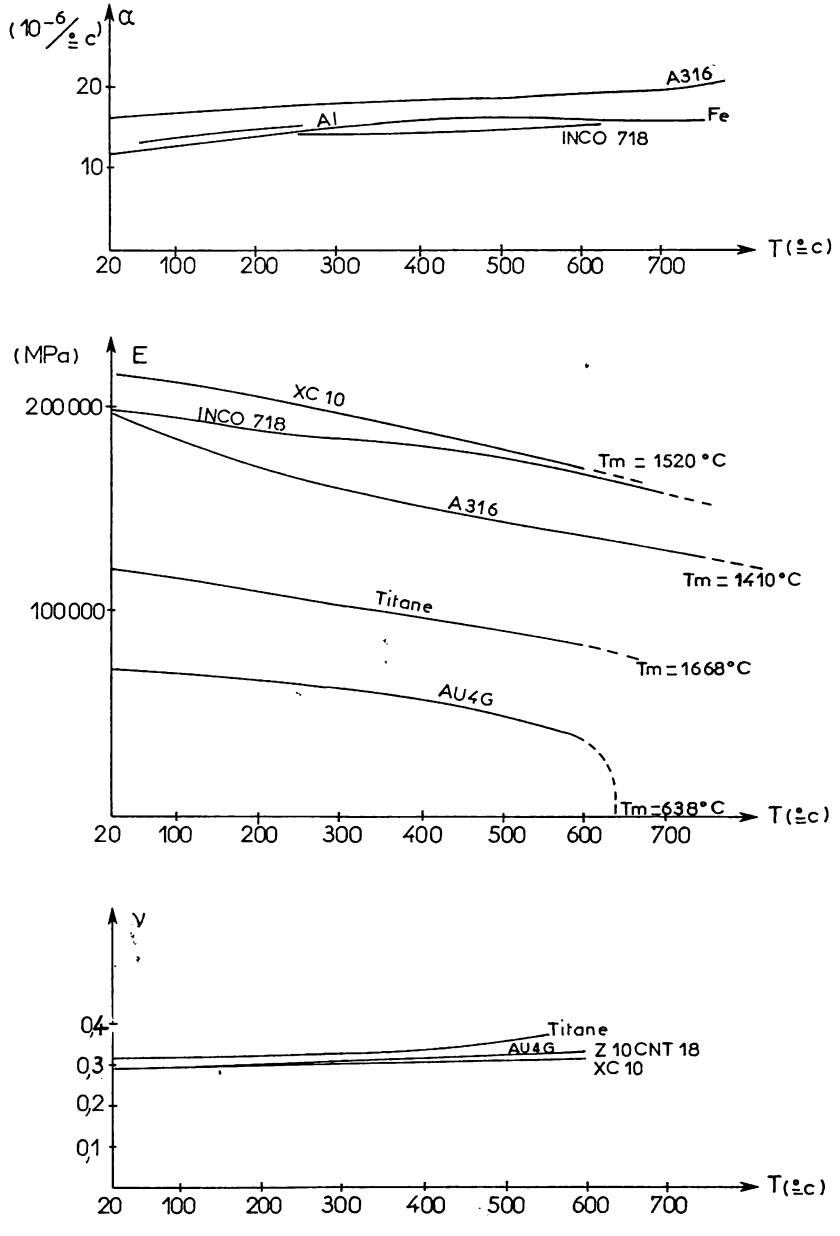


Fig. 5. Evolution du coefficient de dilatation α, du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν en fonction de la température T (d'après A. Ben Cheikh).

inoxydable A 316 données au paragraphe 2.3 ont été obtenues par cette méthode.

2.3. Caractéristiques de thermoélasticité de matériaux usuels

Les évolutions du coefficient de dilatation α, du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν sont données sur les trois graphes de la figure 5, en fonction de la température T et pour différents matériaux.

3. VISCOÉLASTICITÉ

3.1. Domaine de validité et d'emploi

Les polymères et, dans une moindre mesure, le béton et le bois, on l'a vu au chapitre 1, présentent des phénomènes dissipatifs associés à l'élasticité que l'on peut traduire globalement par une viscosité. Si l'on se restreint à la viscoélasticité isotherme, la dissipation thermique est nulle mais la dissipation intrinsèque ne l'est pas. La vitesse de déformation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ intervient comme une variable thermodynamique indépendante.

La théorie de la viscoélasticité permet de rendre compte des évolutions réversibles mais fonction du temps, des solides viscoélastiques tels que définis au chapitre 3. En dynamique cela se traduit par un amortissement extrêmement faible pour les métaux (10^{-4}) à température ambiante mais qui peut atteindre 10^{-2} à 1 pour les polymères.

Les modèles de Kelvin-Voigt et de Maxwell sont décrits ici au titre d'applications directes de la thermodynamique avec variables internes car, dans le cas particulier de la viscoélasticité linéaire, l'approche fonctionnelle est plus simple à formuler et plus simple d'emploi. Notons que ces formulations ne sont valables que pour des matériaux stables. Le vieillissement des bétons ou des polymères exige des traitements spécifiques non décrits ici.

3.2. Formulation thermodynamique

3.2.1. *Solide de Kelvin-Voigt*

Il correspond au choix des variables suivantes :

— la variable observable est la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$, sa variable associée est la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$;

— pour définir la puissance réversible et la puissance dissipée il y a lieu de faire une partition des contraintes en contrainte « élastique » $\boldsymbol{\sigma}^e$ et contrainte anélastique $\boldsymbol{\sigma}^{an}$ qui correspond d'ailleurs au modèle analogique de Kelvin-Voigt, ressort et amortisseur en parallèle, indiqué au chapitre 3.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{e} + \boldsymbol{\sigma}^{an}$$

$\boldsymbol{\sigma}^{e}$: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est la puissance volumique réversible,
$\boldsymbol{\sigma}^{an}$: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est la dissipation volumique intrinsèque.

La théorie linéaire isotrope s'obtient en choisissant le même potentiel thermodynamique que pour l'élasticité linéaire :

$$\Psi = \frac{1}{2\rho}(\lambda \varepsilon_{\mathrm{I}}^{2} + 4\,\mu \varepsilon_{\mathrm{II}}) .$$

Pour exprimer la contrainte anélastique $\boldsymbol{\sigma}^{an}$ (et non la vitesse $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$) afin de l'additionner à la contrainte élastique $\boldsymbol{\sigma}^{e}$, il faut utiliser le potentiel de dissipation $\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$. Pour les mêmes raisons que précédemment on choisit une forme quadratique définie positive des vitesses de déformation :

$$\varphi = \frac{1}{2}(\lambda \theta_{\lambda}\, \dot{\varepsilon}_{\mathrm{I}}^{2} + 4\,\mu \theta_{\mu}\, \dot{\varepsilon}_{\mathrm{II}})$$

expression dans laquelle $\dot{\varepsilon}_{\mathrm{I}}$ et $\dot{\varepsilon}_{\mathrm{II}}$ sont les premier et second invariants du tenseur des vitesses des déformations $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et où θ_{λ} et θ_{μ} sont deux coefficients supplémentaires caractéristiques de la viscosité du matériau.

Conformément à la méthode de l'état local du chapitre 2, la loi d'état s'obtient par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{e} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\, \mathbf{1} + 2\,\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

et la loi complémentaire par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{an} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \lambda \theta_{\lambda} \operatorname{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})\, \mathbf{1} + 2\,\mu \theta_{\mu}\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} .$$

Le modèle mécanique de Kelvin-Voigt s'obtient par addition de ces deux contraintes :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \lambda\,[\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \theta_{\lambda} \operatorname{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})]\, \mathbf{1} + 2\,\mu[\boldsymbol{\varepsilon} + \theta_{\mu}\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]}$$

ou $$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{kk} + \theta_{\lambda}\, \dot{\varepsilon}_{kk})\, \delta_{ij} + 2\,\mu(\varepsilon_{ij} + \theta_{\mu}\, \dot{\varepsilon}_{ij})$$

θ_{λ} et θ_{μ} sont des temps caractéristiques du retard à la déformation dont l'identification peut se faire d'après des résultats d'essais unidimensionnels de traction et de cisaillement (par torsion de tubes par exemple).

L'essai de cisaillement est régi par

$$\sigma_{12} = 2\,\mu(\varepsilon_{12} + \theta_{\mu}\, \dot{\varepsilon}_{12}) .$$

La réponse $\varepsilon_{12}(t)$ à une expérience de fluage en cisaillement $\sigma_{12} = \text{Cte}$ est donnée par la solution de cette équation différentielle. Avec la condition initiale $t = 0 \rightarrow \varepsilon = 0$:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta_\mu}\right)\right]$$

ce qui permet d'identifier les deux coefficients μ et θ_μ.

ν étant le coefficient de contraction, l'essai de traction est régi par :

$$\sigma_{11} = [\lambda(1 - 2\nu) + 2\mu]\,\varepsilon_{11} + [\lambda(1 - 2\nu)\,\theta_\lambda + 2\mu\theta_\mu]\,\dot{\varepsilon}_{11}\,.$$

En posant $E = \lambda(1 - 2\nu) + 2\mu$ comme en élasticité et

$$\eta = \lambda(1 - 2\nu)\,\theta_\lambda + 2\mu\theta_\mu\,,$$

on trouve :

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \eta\dot{\varepsilon}_{11}\,.$$

La réponse à une expérience de fluage (avec $t = 0 \rightarrow \varepsilon = 0$) est :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right)\right]$$

ce qui permet d'identifier les coefficients E et η puis λ et θ_λ après avoir déterminé μ et θ_μ, ν étant mesuré par la déformation transversale : $\varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11}$.

3.2.2. *Corps de Maxwell*

Il correspond au choix des variables suivantes :

— la variable observable est toujours la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ à laquelle est associée la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$,

— pour définir la puissance réversible et la puissance dissipée, on opère cette fois une partition des déformations en

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{an}$$

$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ définit la puissance réversible,

$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{an}$ est la dissipation intrinsèque.

Conformément à la méthode de l'état local, la loi d'état dérive du potentiel thermodynamique $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{an})$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

et la loi complémentaire, du potentiel de dissipation dual $\varphi^*(\boldsymbol{\sigma})$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{an} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.$$

Afin d'exprimer la vitesse de déformation totale par addition de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{an}$, il vaut mieux travailler avec le potentiel thermodynamique dual $\Psi^*(\boldsymbol{\sigma})$ et, pour obtenir une théorie linéaire, on choisit le même potentiel que pour l'élasticité :

$$\Psi^* = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{1+\nu}{E}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) - \frac{\nu}{E}[\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma})]^2\right)$$

avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \rho\frac{\partial \Psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}.$$

De même, le potentiel de dissipation est défini par une forme quadratique définie positive faisant intervenir deux nouveaux coefficients τ_1 et τ_2, caractéristiques de la viscosité et qui peuvent être identifiés d'après des essais unidimensionnels de traction et cisaillement :

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\nu}{E\tau_1}\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) - \frac{\nu}{E\tau_2}[\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma})]^2\right).$$

En écrivant $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{an} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dfrac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ on obtient le modèle mécanique de Maxwell :

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left[\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\tau_1}\right] - \frac{\nu}{E}\left[\operatorname{Tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{\operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{\tau_2}\right]\mathbf{1}}$$

ou $$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\left(\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{\tau_1}\right) - \frac{\nu}{E}\left(\dot{\sigma}_{kk} + \frac{\sigma_{kk}}{\tau_2}\right)\delta_{ij}.$$

Appliqué au cas unidimensionnel, il correspond au modèle analogique du ressort en série avec l'amortisseur, décrit au chapitre 3 :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \left[\frac{1+\nu}{E\tau_1} - \frac{\nu}{E\tau_2}\right]\sigma$$

ou en posant $\dfrac{1+\nu}{E\tau_1} - \dfrac{\nu}{E\tau_2} = \dfrac{1}{\eta}$:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}.$$

C'est un modèle de fluide puisque la possibilité d'équilibre à contrainte constante non nulle n'existe pas.

Modèle de Maxwell généralisé pour les solides

Cette possibilité d'équilibre peut être obtenue par addition d'un ressort en parallèle et l'on peut aussi rendre compte de comportements plus complexes en ajoutant d'autres éléments simples de Maxwell également en parallèle (fig. 6). Ceci constitue aussi une généralisation du modèle de Kelvin-Voigt.

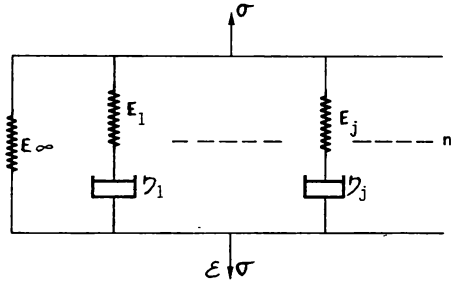


Fig. 6. Modèle de Maxwell généralisé.

La loi de comportement unidimensionnelle d'un tel modèle s'écrit :

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_j + \cdots$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_\infty}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + \frac{\sigma_1}{\eta_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_j}{E_j} + \frac{\sigma_j}{\eta_j}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On peut aussi faire apparaître les déformations internes au modèle :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_j^e + \dot{\varepsilon}_j^{an}.$$

En écrivant l'égalité de la contrainte dans le ressort et l'amortisseur d'un modèle élémentaire, on obtient la loi d'évolution des déformations anélastiques internes :

$$\dot{\varepsilon}_j^{an} = \frac{E_j}{\eta_j}(\varepsilon - \varepsilon_j^{an}).$$

La loi de comportement du modèle peut alors se mettre sous une autre forme :

$$\sigma = E_\infty \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} \eta_j \dot{\varepsilon}_j^{an}$$

$$\dot{\varepsilon}_1^{an} = \frac{E_1}{\eta_1}(\varepsilon - \varepsilon_1^{an})$$

. . . . . .

$$\dot{\varepsilon}_j^{an} = \frac{E_j}{\eta_j}(\varepsilon - \varepsilon_j^{an}) .$$

. . . . . .

Les déformations ε_j^{an} jouent le rôle de variables internes au sens de la thermodynamique $\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \dot{\varepsilon}_j^{an}\right.$ est la dissipation intrinsèque$\left.\right)$. La loi de comportement est formée d'une relation constitutive contenant les variables internes et autant d'équations différentielles d'évolution que de variables internes introduites. Notons que cette formulation peut aussi être considérée comme un cas particulier de la viscoplasticité (viscosité linéaire, sans seuil) que l'on étudie au chapitre 6.

Pour représenter des comportements viscoélastiques complexes, on peut généraliser ainsi l'association de ressorts et d'amortisseurs mais les problèmes d'identification deviennent rapidement insolubles puisqu'il faut déterminer autant de coefficients au moins que d'éléments introduits. Le passage au nombre de modèles infini ou au continu se fait par la notion de spectres de fluage ou de relaxation mais, pour la viscoélasticité linéaire, l'approche fonctionnelle ou héréditaire présente des avantages incontestables sur l'approche par variables d'état discrètes.

3.3. Formulation fonctionnelle

3.3.1. *Fonction fluage*

Cherchons à établir formellement la réponse $\varepsilon(t)$ à une sollicitation unidimensionnelle $\sigma(t)$ d'un matériau viscoélastique, à l'aide des hypothèses suivantes :

— la déformation $\varepsilon(t)$ est une fonctionnelle de toute l'histoire de la contrainte

$$\varepsilon(t) = \mathscr{F}(\sigma(\tau)), \quad -\infty < \tau \leqslant t ;$$

— le matériau est non vieillissant, il obéit au principe d'objectivité ;

— la fonctionnelle $\mathscr{F}$ est linéaire.

Considérons une sollicitation de fluage :

$$\sigma = \sigma_0 H(t - \tau)$$

où σ_0 est une constante, τ un instant de référence et H la fonction échelon d'Heaviside : $H = 0$ si $t - \tau < 0$

$$H = 1 \quad \text{si} \quad t - \tau \geqslant 0 .$$

Compte tenu des hypothèses la réponse en déformation est

$$\varepsilon = J(t - \tau)\, \sigma_0 .$$

Par définition $J(t - \tau)$ est la fonction fluage caractéristique de la visco-élasticité unidimensionnelle du matériau (fig. 7). Elle est indépendante de l'instant initial τ.

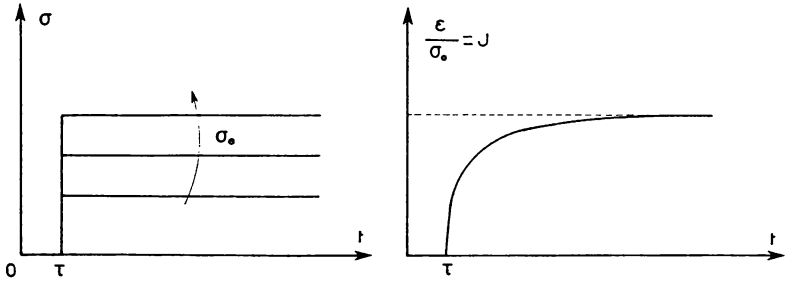


Fig. 7. Fonction fluage.

Considérons maintenant une sollicitation représentée par une fonction étagée (fig. 8).

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} \Delta\sigma_j \, H(t - t_j) .$$

La linéarité ou le principe de superposition de Boltzman permettent d'écrire la réponse en déformation sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^{n} J(t - t_j)\, \Delta\sigma_j .$$

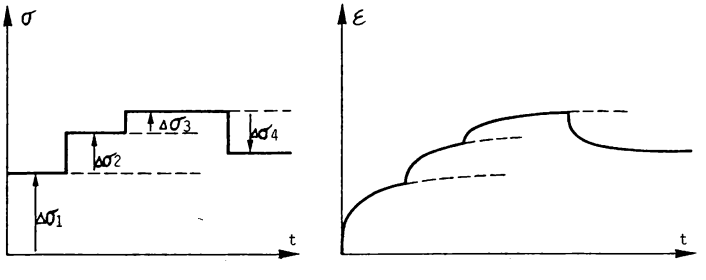


Fig. 8. Fonction étagée.

Considérons enfin une sollicitation représentée par une fonction continue ou continue par morceaux et dérivable. Une telle fonction peut être considérée comme la limite d'une fonction étagée, la réponse $\varepsilon(t)$ s'exprime sous la forme d'une intégrale de Riemann à laquelle il faut ajouter les discontinuités éventuelles :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^{n} J(t-t_j)\,\Delta\sigma_j \,.$$

Expression que l'on peut écrire avec la notation du produit de convolution et avec la définition de la dérivée au sens des distributions $D\sigma/D\tau$ pour les discontinuités :

$$\varepsilon(t) = J \otimes \frac{D\sigma}{D\tau}.$$

3.3.2. *Fonction relaxation*

La formulation duale pour la recherche de la réponse $\sigma(t)$ à une sollicitation unidimensionnelle en déformation $\varepsilon(t)$ conduit sous les mêmes hypothèses :

— à la définition d'une fonction relaxation $R(t-\tau)$, réponse

$$\sigma(t) = R(t-\tau)\,\varepsilon_0$$

à une sollicitation de relaxation $\varepsilon = \varepsilon_0\,H(t-\tau)$ (figure 9) ;

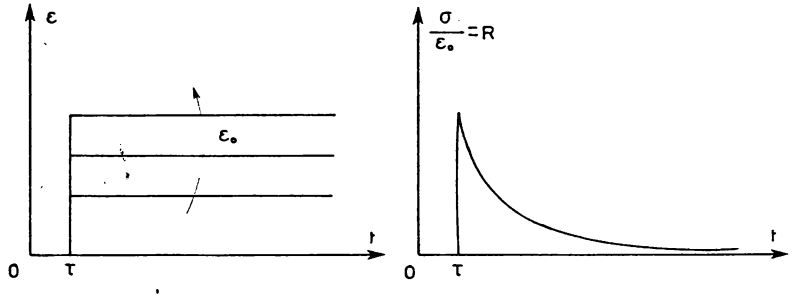


Fig. 9. Fonction relaxation.

— à la réponse $\sigma(t)$ à une sollicitation quelconque $\varepsilon(t)$

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\tau}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{j=1}^{n} R(t-t_j)\,\Delta\varepsilon_j$$

ou $\sigma(t) = R \otimes \frac{D\varepsilon}{D\tau}$.

Pour les sollicitations unidimensionnelles, le matériau est caractérisé par la fonction fluage ou la fonction relaxation qui peuvent d'ailleurs se déduire l'une de l'autre. Pour l'essai de fluage on a :

$$\sigma = \sigma_0 \, H \rightarrow \varepsilon = J . \sigma_0$$

mais $\sigma = \sigma_0 \, H = R \otimes \frac{d\varepsilon}{d\tau} = R \otimes \frac{dJ}{d\tau} \sigma_0$

de même pour l'essai de relaxation :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \, H = J \otimes \frac{dR}{d\tau} \varepsilon_0$$

d'où

$$R \otimes \frac{dJ}{d\tau} = J \otimes \frac{dR}{d\tau} = H .$$

3.3.3. *Loi de comportement tridimensionnelle*

Les hypothèses énoncées à propos de la définition de la fonction fluage et appliquées à un cas de sollicitation tridimensionnelle amènent à définir :

— une matrice de fonctions fluage $[J]$ telle que

$$\sigma_{ij} = \text{Cte} = \sigma^0_{ij} \rightarrow \varepsilon_{ij} = J_{ijkl}(t - \tau) \, \sigma^0_{kl}$$

— une matrice de fonctions relaxation $[R]$ telle que

$$\varepsilon_{ij} = \text{Cte} = \varepsilon^0_{ij} \rightarrow \sigma_{ij} = R_{ijkl}(t - \tau) \, \varepsilon^0_{kl}$$

— les réponses à des sollicitations quelconques

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

$$\varepsilon_{ij}(t) = J_{ijkl} \otimes \frac{D\sigma_{kl}}{D\tau} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij}(t) = R_{ijkl} \otimes \frac{D\varepsilon_{kl}}{D\tau} .$$

Si l'on fait l'hypothèse d'isotropie, le même raisonnement que celui utilisé pour l'élasticité au paragraphe 1.2.2 permet de ramener à 2 le nombre de fonctions indépendantes définissant les composantes de chacune des matrices $[J]$ et $[R]$.

On peut choisir :

— deux fonctions $I(\tau)$ et $K(\tau)$ qui jouent un rôle équivalent aux coefficients $\frac{1}{E}$ et $\frac{\nu}{E}$ dans la loi d'élasticité linéaire isotrope :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (I + K) \otimes \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{D\tau} - K \otimes \frac{D(\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}))}{D\tau}\mathbf{1}$$

— ou bien deux fonctions $L(\tau)$ et $M(\tau)$ qui jouent un rôle équivalent aux coefficients de Lame :

$$\boldsymbol{\sigma} = L \otimes \frac{D(\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}))}{D\tau}\mathbf{1} + 2\,M \otimes \frac{D\boldsymbol{\varepsilon}}{D\tau}\,.$$

3.3.4. *Identification*

L'identification des fonctions I et K ou L et M par des essais simples repose sur des essais de fluage ou relaxation en traction et cisaillement.

— Identification des fonctions I et K :

. essais de fluage en traction simple $\sigma_{11} = \mathrm{Cte}$

$$\varepsilon_{11} = [I(\tau) + K(\tau)]\,\sigma_{11} - K(\tau)\,\sigma_{11}$$

$$I(\tau) = \frac{\varepsilon_{11}(\tau)}{\sigma_{11}} = J(\tau)$$

. essais de fluage en cisaillement $\sigma_{12} = \mathrm{Cte}$

$$\varepsilon_{12} = [I(\tau) + K(\tau)]\,\sigma_{12}$$

$$K(\tau) = \frac{\varepsilon_{12}(\tau)}{\sigma_{12}} - I(\tau)$$

— Identification des fonctions L et M :

. essai de relaxation en cisaillement $\varepsilon_{12} = \mathrm{Cte}$

$$\sigma_{12} = 2\,M(\tau)\,\varepsilon_{12}$$

$$M(\tau) = \frac{\sigma_{12}}{2\,\varepsilon_{12}}$$

. essais de relaxation en traction simple $\varepsilon_{11} = \mathrm{Cte}$

$$\sigma_{11} = L(\tau)\,\varepsilon_{11}(1 - 2\,\nu) + 2\,M(\tau)\,\varepsilon_{11}\,.$$

La contraction ν s'exprime en fonction de L et M en écrivant la relation entre la composante nulle de la contrainte $\sigma_{22} = 0$ et la déformation correspondante $\varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11}$

$$0 = L(\tau)\,\varepsilon_{11}(1 - 2\,\nu) - 2\,M\nu\varepsilon_{11}$$

$$\nu = \frac{L}{2(L + M)}.$$

Après mesure de $\sigma_{11} = R(\tau)\,\varepsilon_{11}$ on obtient :

$$L(\tau) = \frac{M(R - 2\,M)}{3\,M - R}$$

on voit que l'identification peut se faire par les mêmes types d'essais que pour une loi d'élasticité, en tenant compte de l'évolution temporelle des propriétés au travers des fonctions de fluage ou de relaxation.

3.4. Caractéristiques de viscoélasticité de matériaux usuels

Les figures 10 (*a* et *b*) et 11 (*a* et *b*) donnent respectivement les graphes de fonctions fluage et de fonctions relaxation pour des polymères types, repérés de la façon suivante :

I. Un polymère amorphe de faible poids moléculaire (11 000) le polyisobutylène à 25 °C.

Fonctions fluage et relaxation en cisaillement

$$\varepsilon_{12} = J_c(t)\,\sigma_{12}^0, \quad \sigma_{12} = R(t)\,\varepsilon_{12}^0, \quad (A = -3).$$

II. Un polymère amorphe de poids moléculaire élevé (300 000) un polyvinylacétate à 75 °C.

Fonctions fluage et relaxation en cisaillement $(A = -1)$.

III. Un polymère amorphe de poids moléculaire encore plus élevé (3 620 000) un poly-*n*-octyl méthacrylate.

Fonctions fluage et relaxation en cisaillement $(A = 0)$.

IV. Un polymère amorphe de poids moléculaire élevé en dessous de sa température de transition vitreuse, un polyméthyl méthacrylate à − 22 °C.

Fonctions fluage et relaxation en cisaillement $(A = -7)$.

V. Un polymère amorphe faiblement réticulé, un caoutchouc vulcanisé Hévéa à 25 °C.

Fonctions fluage et relaxation en traction

$$\varepsilon = J(t)\,\sigma_0, \quad \sigma = R(t)\,\varepsilon_0 \quad (A = 0).$$

VI. Un gel réticulé dilué, un gel à 10 % de polyvinyl chloride dans un diméthyl thianthrène à 25 °C.

Fonctions fluage et relaxation en cisaillement $(A = 0)$.

VII. Un polymère fortement cristallisé, un polyéthylène linéaire de densité 0,965 g/ml à 20 °C.

Fonctions fluage et relaxation en traction ($A = 2$).

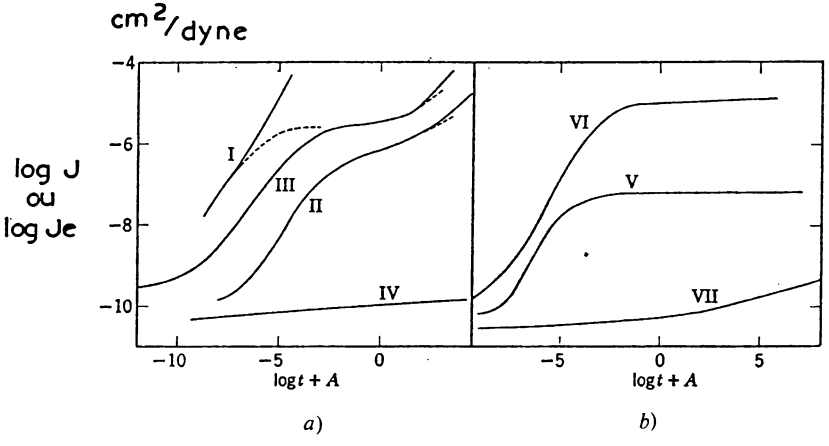


Fig. 10. Fonctions fluage pour différents polymères
(d'après « Viscoelastic properties of polymers » communiqué par F. X. de Charentenay).

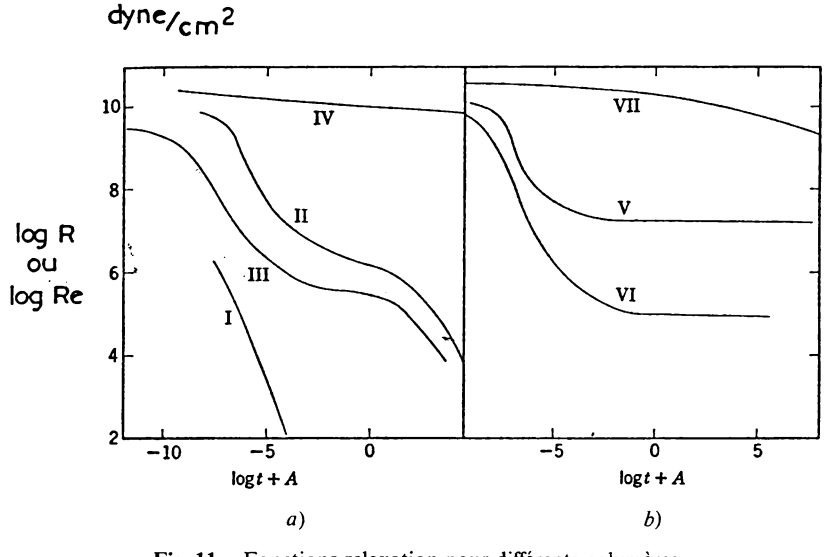


Fig. 11. Fonctions relaxation pour différents polymères
(d'après « Viscoelastic properties of polymers » communiqué par F. X. de Charentenay).

3.5. Eléments sur le calcul des structures viscoélastiques

Le calcul des déplacements, contraintes et déformations dans les structures viscoélastiques linéaires peut se ramener à la résolution de problèmes d'élasticité classique grâce au calcul symbolique : l'écriture d'un problème de viscoélasticité linéaire en transformée de Laplace-Carson est identique à celle du problème d'élasticité correspondant.

3.5.1. *Transformée de Laplace-Carson*

Pour les besoins de la viscoélasticité, il suffit de considérer les fonctions $f(t)$ de la variable t à valeurs réelles ou complexes indéfiniment dérivables par morceaux et identiquement nulles pour $t \leqslant 0$.

A toute fonction $f(t)$, la transformée de Laplace-Carson fait correspondre la fonction $f^+(p)$ de la variable p définie par :

$$f^+(p) = \mathscr{L}(f(t)) = p \int_0^\infty f(t) \exp(-pt)\, dt .$$

La propriété importante de la transformée de Laplace-Carson est de transformer le produit de convolution en un produit ordinaire. Montrons-le pour deux fonctions continues ε et R :

$$\varepsilon^+ = p \int_0^\infty \varepsilon(\tau) \exp(-p\tau)\, d\tau$$

$$R^+ = p \int_0^\infty R(t) \exp(-pt)\, dt = p \int_\tau^\infty R(t-\tau) \exp(-p[t-\tau])\, dt$$

en employant la fonction d'Heaviside $H(t-\tau)$ on obtient :

$$R^+ \exp(-p\tau) = p \int_0^\infty R(t-\tau)\, H(t-\tau) \exp(-pt)\, dt .$$

Puisque $\varepsilon(0) = 0$ on montre facilement, en intégrant par parties, que :

$$\varepsilon^+ = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{d\tau}(\tau) \exp(-p\tau)\, d\tau .$$

Le produit des transformées se met donc sous la forme :

$$\varepsilon^+ R^+ = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{d\tau} R^+(p) \exp(-p\tau)\, d\tau$$

$$\varepsilon^+ R^+ = p \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{d\tau} R(t-\tau)\, H(t-\tau) \exp(-pt)\, dt$$

$$= p \int_0^\infty \left[\int_0^t \frac{d\varepsilon}{d\tau}(\tau)\, R(t-\tau)\, d\tau \right] \exp(-pt)\, dt = \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \otimes R \right)^+ .$$

Cette démonstration s'étend aux fonctions continues par morceaux en écrivant les dérivées au sens des distributions.

D'une manière générale on écrira donc :

$$\left(\frac{D\varepsilon}{Dt}(t) \otimes R(t) \right)^+ = \varepsilon^+(p)\, R^+(p)$$

ou, pour le tenseur σ_{ij} :

$$\left(\frac{D\sigma_{ij}}{Dt} \otimes A \right)^+ = \sigma_{ij}^+ A^+ .$$

Le tableau 12 donne les transformées les plus utiles :

Fonction	Transformée	Fonction	Transformée
$f(t)$	$f^+(p)$	t	$1/p$
$C.f(t)$	$C.f^+(p)$	t^n	$\frac{n!}{p^n}$
$\frac{d}{dt}$	p	$\exp(-at)$	$\frac{p}{p+a}$
$H(t)$	1	$1 - \exp(-at)$	$\frac{a}{p+a}$
$H(t-\tau)$	$\exp(-\tau p)$	$\cos \omega t$	$\frac{p^2}{p^2+\omega^2}$
$f(t-\tau)$	$\exp(-\tau p)\, f^+(p)$	$\sin \omega t$	$\frac{p\omega}{p^2+\omega^2}$
si $f(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$		$f(t) \exp(-at)$	$\frac{p}{p+a} f^+(a+p)$
$f'(t)$	$pf^+(p)$		
$\frac{df}{dt}(t) \otimes g(t)$	$f^+(p)\, g^+(p)$	$(-t)^m f(t)$	$p \frac{d^m}{dp^m} \left(\frac{f^+(p)}{p} \right)$

Tableau 12. Transformées de Laplace-Carson.

3.5.2. *Equations des problèmes de viscoélasticité*

Loi de comportement

La propriété de la transformée de Laplace-Carson relative au produit de convolution permet d'écrire la loi de comportement viscoélastique linéaire sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \lambda^+ \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})^+ \mathbf{1} + 2\mu^+ \boldsymbol{\varepsilon}^+$$

avec

$$\lambda^+(p) = \mathscr{L}(L(t)), \qquad \mu^+(p) = \mathscr{L}(M(t)).$$

Cette écriture similaire à celle des lois de comportement de l'élasticité linéaire suggère d'examiner l'ensemble des équations du problème en transformée de Laplace-Carson.

Données et inconnues

Exprimons les données et inconnues avec la transformée de Laplace-Carson dans le cas d'un problème avec conditions aux limites mixtes. Les données du problème transformé sont :

$\vec{f}^+$ dans le solide $\mathscr{S}$,
$\vec{u}^+$ sur la frontière ∂S_u,
$\vec{F}^+$ sur la frontière ∂S_F ;

les champs inconnus sont : $\vec{u}^+(x)$, $\boldsymbol{\sigma}^+(x)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^+(x)$.

Equations

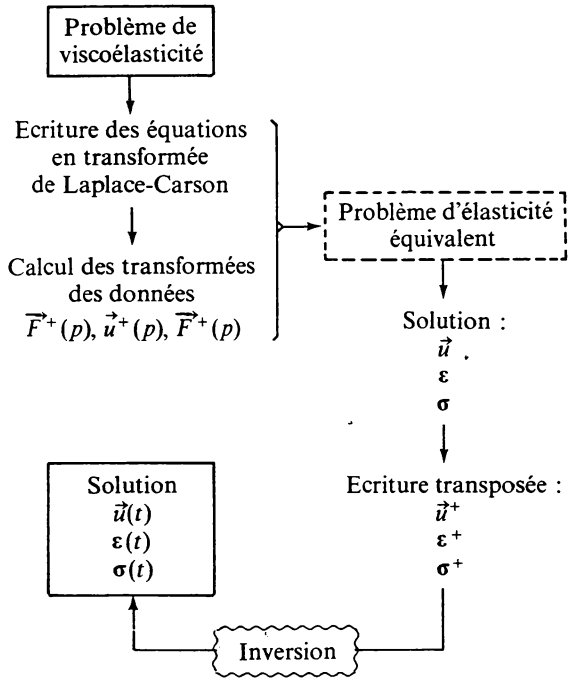
Dans le cas des problèmes quasi statiques les équations sont :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^+ + \vec{f}^+ = 0$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^+ = \tfrac{1}{2}[\operatorname{grad} \vec{u} + (\operatorname{grad} \vec{u})^T]$$
$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \lambda^+ \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^+) \mathbf{1} + 2\mu^+ \boldsymbol{\varepsilon}^+$$
$$\boldsymbol{\sigma}^+ . \vec{n} = \vec{F}^+ \quad \text{sur} \quad \partial S_F$$

équations tout à fait similaires à celles d'un problème d'élasticité linéaire si le type de conditions limites aux frontières ne varie pas au cours du temps.

3.5.3. *Méthode de résolution*

L'analogie formelle entre le problème transformé et le problème d'élasticité conduit à la méthode de résolution schématisée ci-dessous, dans laquelle on a à résoudre un problème d'élasticité classique et une inversion ou déconvolution.



Les solutions dans l'espace transformé sont des champs qui dépendent de p et de coefficients définissant les sollicitations extérieures.

La difficulté est rejetée sur l'inversion : le calcul des fonctions du temps originales des fonctions de la variable p, solutions du problème d'élasticité. Les calculs de transformée inverse sont délicats, en particulier si le problème d'élasticité associé n'a de solution que numérique approchée, mais il existe des programmes de déconvolution utilisables sur ordinateurs.

4. BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE 4

SOLOMON L. *Elasticité linéaire*. Masson (1966).

SCHREIBER E., ANDERSON O. *Elastic constants and their measurements*. Mac Graw Hill (1973).

TSAI S. W., THOMAS HAN. *Introduction to composite materials*. Technomic (1980).

MASSONET C., CESCOTTO S. *Mécanique des matériaux*. Sciences et lettres, Liège (1982).

COURBON J. *Calcul des structures*. Dunod (1972).

ZIENKIEWICZ O. C. *La méthode des éléments finis*. Ediscience, Paris (1973).

DHATT G., TOUZOT G. *Une présentation de la méthode des éléments finis.* Maloine (1981).

SALENÇON J. *Viscoélasticité.* Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (1983).

FINDLEY W. N., LAI J. S., ONARAN K. *Creep and relaxation of non linear visco-elastic materials.* North Holland publishing company (1976).

Chapitre 5

PLASTICITÉ

« *Un modèle devient une loi ... ou, sombre dans l'oubli* ! »

Ce chapitre est consacré à la modélisation phénoménologique et mathématique des solides plastiques tels qu'ils ont été schématisés dans la classification du chapitre 3 : solide rigide parfaitement plastique, solide parfaitement élastoplastique, solide élastoplastique écrouissable.

On peut considérer que les premiers travaux scientifiques relatifs à la plasticité remontent à 1864 avec le mémoire de Tresca sur le critère de la contrainte de cisaillement maximal. La loi d'écoulement isotrope était formulée dès 1871 par Saint-Venant et Levy mais il a fallu attendre les années 1950 ... pour en voir une utilisation dans les problèmes de structures grâce aux théorèmes limites, puis les années 1970 pour en voir des applications pratiques grâce à l'avènement des ordinateurs rapides et de grande capacité. Le cas du chargement radial (invariance des directions principales du tenseur des contraintes en chaque point d'une structure) fournit un vaste champ d'applications aux théories fondées sur l'écrouissage isotrope.

L'écrouissage, on l'a vu au chapitre 1, est presque toujours anisotrope ; cette propriété doit être introduite dans les modèles dès que le chargement n'est plus radial et en particulier lorsqu'il est cyclique. C'est Prager qui vers 1950 en a donné la première formulation simple : l'écrouissage cinématique sur lequel sont fondées la plupart des théories actuelles.

1. DOMAINE DE VALIDITÉ ET D'EMPLOI

La théorie de la plasticité est la théorie mathématique des déformations irréversibles indépendantes du temps dont le chapitre 1 donne quelques éléments sur leur nature physique.

— Pour les métaux et alliages il s'agit essentiellement des mouvements de dislocations sans influence de phénomènes visqueux ni présence de déco-

hésions endommageant la matière. Ces deux limitations restreignent le domaine de validité :

- aux faibles températures d'emploi : une convention très schématique est de limiter la température au quart de la température absolue de fusion du matériau considéré ;
- aux sollicitations non endommageantes : pour les chargements monotones, les déformations doivent rester inférieures à environ la moitié ou les trois quarts de la déformation de rupture. Pour les chargements alternés la limite est donnée par les conditions de stabilisation. La plasticité cyclique s'applique sans modifications tant que le nombre de cycles est inférieur ou égal au nombre de cycles correspondant à la stabilisation.

— Pour les sols, la limitation est essentiellement constituée par l'apparition des surfaces de glissements par instabilité.

— Pour les polymères et les bois, les déformations irréversibles, sont plutôt justiciables de la viscoplasticité.

— Pour les bétons, les déformations irréversibles étant essentiellement dues à des microfissures, c'est plutôt sur la théorie du couplage élasticité-endommagement qu'est fondée leur modélisation.

Ces limitations ne sont bien sûr qu'indicatives. Dans un problème de viscoplasticité par exemple, si l'on sait, à priori, que le processus de déformation intervient par un champ de vitesse $\dot{\varepsilon}(M)$ quasi uniforme, il est possible de résoudre ce problème par la théorie de la plasticité à la condition d'identifier la loi de comportement par des expériences d'écrouissage réalisées à la vitesse $\dot{\varepsilon}$ considérée (et à la température considérée). A l'inverse, la relaxation des aciers à température ambiante (évolution en fonction du temps) ne peut être traitée que par une théorie d'élastoviscoplasticité.

La théorie de la plasticité est utilisée pour le calcul des déformations permanentes dans les structures, pour les calculs prévisionnels de ruine plastique des structures, pour les calculs de stabilité (des remblais de terre par exemple), pour les calculs des efforts mis en jeu dans les opérations de mise en forme etc...

On peut aussi utiliser le schéma de la plasticité indépendante du temps dans les métaux à température élevée pour rechercher des états asymptotiques correspondant à des chargements fixés ou à des vitesses très élevées.

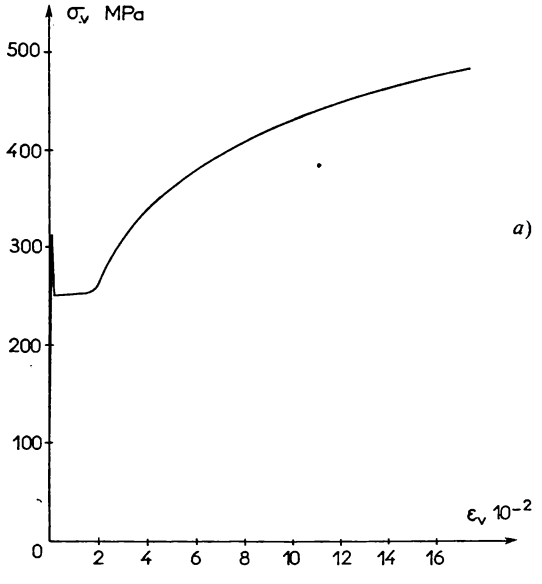
Un autre aspect de la plasticité est celui de son couplage avec l'endommagement, il est étudié au chapitre 7.

2. ASPECTS PHÉNOMÉNOLOGIQUES

Dans ce paragraphe sont rassemblés les principaux résultats qui découlent directement des expériences supposées réalisées sur le matériau considéré dans l'état de référence de son utilisation. L'interprétation de ces expériences fait appel à des modèles élémentaires. Par ailleurs des résultats expérimentaux portant sur des effets particuliers (durcissement ou adoucissement cycliques, rochet, relaxation de la contrainte moyenne) sont mentionnés au chapitre 3.

2.1. Comportement unidimensionnel

La courbe d'écrouissage en traction-compression caractérise complètement le comportement unidimensionnel. Les deux types de courbe possibles (à palier et à module tangent continu) sont donnés sur la figure 1.



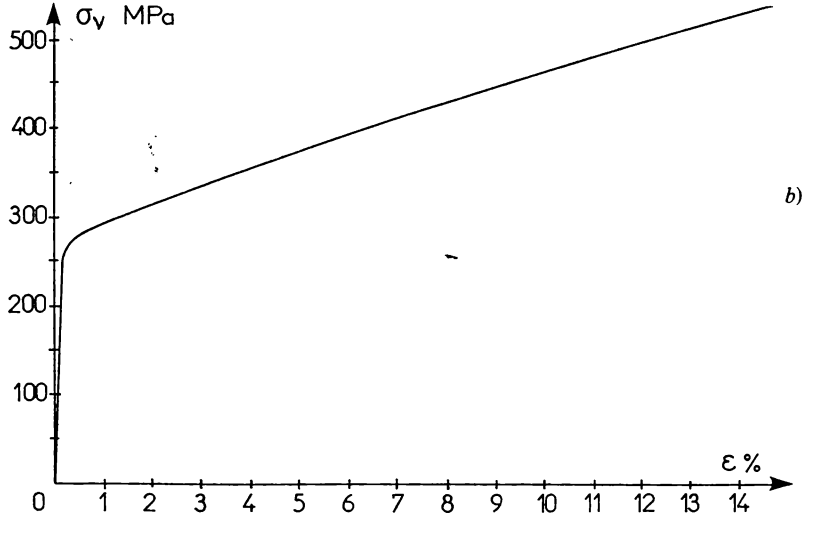


Fig. 1. Courbes d'écrouissage
(*a*) Acier XC 38.
(*b*) Acier inoxydable A 316.

2.1.1. *Limite d'élasticité*

C'est la contrainte au-dessus de laquelle apparaissent des déformations irréversibles. Déceler cette limite est un problème expérimental difficile puisqu'elle dépend de la précision du capteur de déformation utilisé. Pour avoir une mesure objective, on adopte une définition conventionnelle.

La limite d'élasticité conventionnelle est la contrainte qui correspond à une déformation irréversible donnée :

— Pour les contrôles de qualité des matériaux on utilise une valeur conventionnelle de déformation permanente égale à 0,2 %.

— Cette valeur de déformation irréversible étant très élevée, puisque du même ordre de grandeur que la déformation élastique simultanée, une convention plus précise est parfois adoptée : la contrainte pour laquelle la déformation permanente est égale à 0,02 %.

— Une autre méthode conventionnelle consiste à faire porter la convention sur la valeur relative de la déformation permanente tolérée, rapportée à la déformation élastique. Par exemple :

$$\sigma_{Y0,1\acute{e}} = \sigma_Y\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e} = 10\,\%\right)$$

correspond à une déformation permanente dix fois plus faible que la déformation élastique.

Sauf pour les aciers à paliers, l'obtention pratique de la limite d'élasticité reste toujours conventionnelle. Même si la notion de domaine d'élasticité est parfaitement justifiée sur le plan théorique, il faut être bien conscient que sa mesure dépend d'une convention.

2.1.2. *Ecoulement plastique, écrouissage et seuil*

La physique et la chimie des solides, la thermodynamique, les expériences phénoménologiques justifient le découplage des effets élastique et plastique c'est-à-dire :

— la partition des déformations ou séparation entre déformation réversible ou élastique ε_e et déformation irréversible ou inélastique ε_p, sans préjuger de la nature de cette dernière qui peut éventuellement être séparée en déformation anélastique, plastique, viscoplastique... etc. Cette partition est justifiée par la physique des phénomènes (cf. chap. 3) puisque la déformation élastique correspond schématiquement à une variation des distances interatomiques sans modification des sites, alors que la déformation plastique (ou inélastique) implique des mouvements par « glissements » avec modification des liaisons interatomiques. Dans le cadre de l'élastoplasticité on écrira :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

— l'existence de relations de comportement découplées pour ε_e et ε_p

$$\begin{cases} \varepsilon_e = A(\sigma) & \forall\sigma \\ \varepsilon_p = g(\sigma) & \text{pour} \quad |\sigma| \geqslant \sigma_Y \\ \varepsilon_p = 0 & \text{si} \quad |\sigma| < \sigma_Y \end{cases}$$

la dernière relation n'étant valable que dans le cas de l'écoulement plastique continu (sans décharge). La figure 2 illustre ces deux propriétés et montre en particulier que dans un large domaine de déformation plastique, le module d'élasticité peut être considéré comme non modifié par l'écoulement plastique.

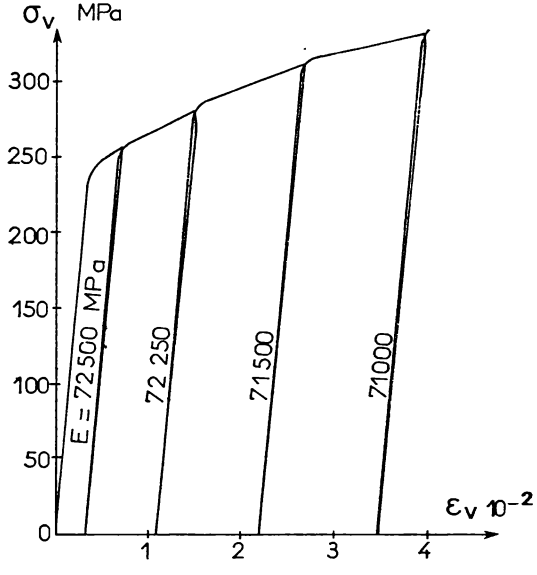


Fig. 2. Courbe d'écrouissage avec décharges. Alliage léger AU4G trempé vieilli (2 024) $T = 20$ °C.

L'écoulement plastique parfait sans écrouissage, correspond au cas où la contrainte reste constante au cours de l'écoulement : c'est le cas de l'acier doux dans la zone de palier. L'effet d'écrouissage dû à l'écoulement plastique se manifeste de deux façons :

— l'écoulement ne peut se produire que si la contrainte augmente,

— la limite d'élasticité augmente pendant l'écoulement, ce qui se vérifie par des décharges puis recharges comme sur l'exemple de la figure 2.

Sur le plan physique, cet écrouissage est dû à l'augmentation de la densité des dislocations qui ont tendance à s'enchevêtrer, à se bloquer les unes les autres. En première approximation l'augmentation de la limite d'élasticité suit l'augmentation de la contrainte : c'est cette approximation qui constitue la base de la théorie de la plasticité classique. Ainsi, dans le cas du chargement

monotone, la limite actuelle d'élasticité, que l'on appelle aussi le seuil de plasticité σ_s, est égale à la plus grande valeur de la contrainte atteinte au préalable.

Pour les matériaux à écrouissage positif $\frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} > 0$, la limite d'élasticité « naturelle » σ_Y est la plus petite valeur du seuil de plasticité (qui est une fonction de l'histoire des déformations plastiques).

Tout point d'une courbe d'écrouissage monotone peut donc être considéré comme le point représentatif du seuil de plasticité, si bien que la loi caractéristique de l'écrouissage s'écrit :

$$\sigma_s = g^{-1}(\varepsilon_p) .$$

L'écoulement plastique n'a lieu que si $\sigma = \sigma_s$

$$\sigma < \sigma_s \rightarrow \dot{\varepsilon}_p = 0$$
$$\sigma = \sigma_s \rightarrow \exists \dot{\varepsilon}_p \neq 0 .$$

De nombreuses expressions analytiques ont été proposées pour modéliser la fonction d'écrouissage g ; nous retenons celle qui résulte d'un calcul faisant appel à la théorie des dislocations et qui montre que la contrainte seuil est proportionnelle à la racine carrée de la densité de dislocations ρ_d :

$$\sigma_s = \kappa b \rho_d^{1/2} .$$

En pratique la densité de dislocations n'est jamais nulle dans l'état initial ρ_{d_0} étant la densité des dislocations correspondant à la limite d'élasticité σ_Y on écrit :

$$\sigma_s = \sigma_Y + \kappa b(\rho_d - \rho_{d_0})^{1/2} .$$

En termes de déformation macroscopique, par analogie avec la relation précédente, on écrit :

$$\sigma_s = \sigma_Y + K_Y \varepsilon_p^{1/M_Y} .$$

Cette dernière relation, généralement appelée équation de Ramberg-Osgood s'inverse facilement pour donner :

$$\boxed{\varepsilon_p = g(\sigma_s) = \left\langle \frac{\sigma_s - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y}} \quad *$$

* Les crochets indiquent la partie positive ;

$$\langle x \rangle = x \quad \text{si} \quad x > 0$$
$$\langle x \rangle = 0 \quad \text{si} \quad x \leqslant 0 .$$

σ_Y est la limite d'élasticité
K_Y est le coefficient de résistance plastique
M_Y est l'exposant d'écrouissage.

L'identification de cette expression, c'est-à-dire la détermination des coefficients σ_Y, K_Y et M_Y pour un matériau particulier s'effectue d'après les résultats d'un essai d'écrouissage.

σ_Y étant déterminé sur la courbe d'écrouissage, la meilleure droite lissant les points expérimentaux dans le graphe $(\ln(\sigma_s - \sigma_Y), \varepsilon_p)$ donne K_Y et M_Y d'après :

$$\ln(\sigma_s - \sigma_Y) = \ln K_Y + \frac{1}{M_Y} \ln \varepsilon_p .$$

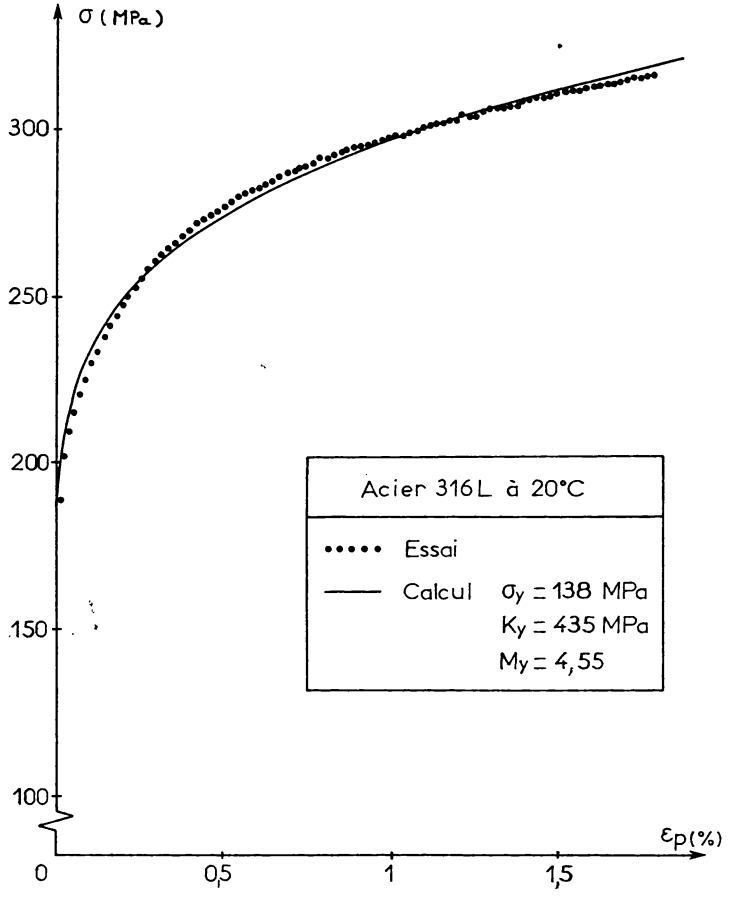


Fig. 3. Identification des coefficients caractéristiques d'écrouissage
Acier 316 L, température ambiante.

Un exemple est donné sur la figure 3. Le chapitre 3 donne des indications sur des méthodes numériques d'identification d'équations non linéaires telles que celle-ci.

La loi d'écrouissage $\varepsilon_p = g(\sigma_s)$ est écrite en grandeurs apparentes si elle doit être utilisée avec la théorie des petites déformations, mais elle doit être écrite en grandeurs vraies ($\sigma_v = \sigma(1 + \varepsilon)$, $\varepsilon_v = \ln(1 + \varepsilon)$) si elle est utilisée « en grandes déformations ».

2.1.3. *Relations de comportement*

2.1.3.1. *Cas des solides parfaitement plastiques*

Le seuil σ_s est constant et égal en traction et compression. Selon que le modèle doit être utilisé pour un calcul de borne inférieure ou de borne supérieure (voir § 6.2.2), le seuil sera pris égal à la limite d'élasticité conventionnelle σ_Y ou à la contrainte ultime σ_u, c'est-à-dire la contrainte maximale atteinte dans l'essai d'écrouissage (fig. 4).

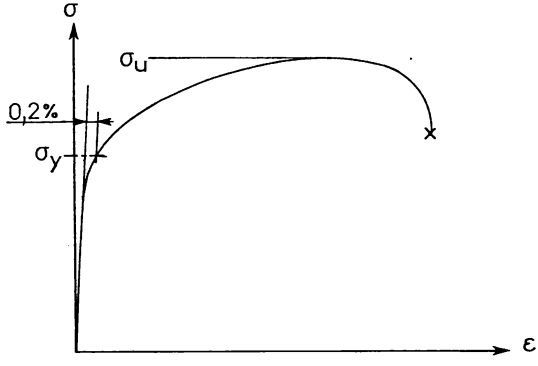


Fig. 4. Limite d'élasticité et contrainte ultime.

Le modèle de comportement est le suivant :

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \begin{cases} 0 \text{ (cas du corps rigide)} \\ \dfrac{\sigma}{E} \text{ (cas du corps élastique parfait)} \end{cases}$$

$$|\sigma| = \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \text{ arbitraire, du signe de } \sigma$$

2.1.3.2. *Cas des solides plastiques écrouissables*

Le modèle de comportement unidimensionnel complet du solide élasto-plastique écrouissable initialement isotrope, en chargement monotone unidirectionnel, est le suivant :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = \left\langle \frac{|\sigma| - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y} \mathrm{Sgn}(\sigma) \quad \text{avec} \quad \sigma = \sigma_s$$

Dans le cas du solide rigide plastique écrouissable, négliger la déformation élastique et considérer comme nulle la limite d'élasticité sont deux hypothèses cohérentes. Le modèle se réduit alors à :

$$\varepsilon = \varepsilon_p = \left(\frac{|\sigma|}{K}\right)^M \mathrm{Sgn}(\sigma)$$

Les expressions ci-dessus constituent des moyens pratiques de représenter la loi d'écrouissage, mais d'autres expressions, ou la courbe de traction elle-même, définie point par point, peuvent être utilisées. Des valeurs typiques des coefficients σ_Y, K_Y, M_Y et K, M sont indiquées dans le tableau 10 du paragraphe 2.1.3.4 pour différents matériaux, avec leur domaine de validité.

2.1.3.3. *Cas des chargements cycliques*

Il est intéressant de relier directement l'amplitude (crête-crête) de déformation $\Delta\varepsilon$ à l'amplitude (crête-crête) de contrainte $\Delta\sigma$ au cycle stabilisé tel qu'il a été défini au chapitre 3 pour les chargements périodiques.

Sur l'exemple d'un cycle symétrique par rapport à l'origine, tel que celui de la figure 5, il est facile d'exprimer $\Delta\varepsilon_p$ en fonction de $\Delta\sigma$ d'après la loi d'écrouissage monotone $\varepsilon_p = g(\sigma)$:

$$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = g\left(\frac{\Delta\sigma}{2}\right).$$

Ceci correspond à la règle de Masing qui suppose une homothétie de rapport 2 entre la courbe de traction initiale OA et la demi-alternance BA correspondant à l'écoulement positif (homothétie de rapport -2 pour l'alternance AB).

Dans les faits la fonction d'écrouissage qui intervient dans le comportement cyclique est différente de la fonction g à cause des effets de consolidation

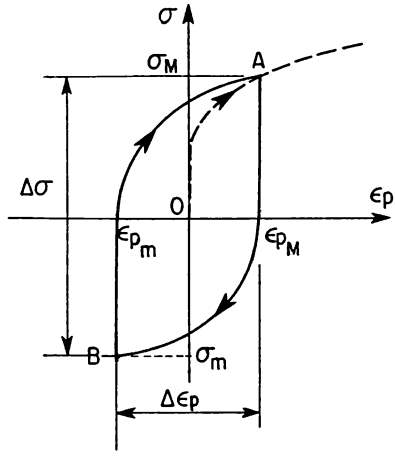


Fig. 5. Cycle stabilisé.

cyclique. Il est donc préférable d'identifier directement cette relation sur les amplitudes mesurées d'après des expériences de traction-compression cyclique à amplitudes différentes :

$$\Delta\varepsilon_p = g_c(\Delta\sigma)$$

la fonction g_c pouvant être modélisée par :

$$\boxed{\Delta\varepsilon_p = \left(\frac{\Delta\sigma}{K_c}\right)^{M_c}}.$$

Cette expression définit la « courbe d'écrouissage cyclique stabilisée », lieu des sommets des cycles stabilisés (σ_M, ε_{pM}) dans le graphe (σ, ε_p) pour des cycles centrés tels que ceux des figures 6*a* et 6*b*.

Cette courbe d'écrouissage cyclique peut se situer « au-dessus » (durcissement cyclique) ou en dessous (adoucissement cyclique) de la courbe d'écrouissage monotone. L'identification de son expression pose un problème lié à l'effet de l'histoire des déformations. En effet, la courbe peut ne pas être strictement la même si elle est obtenue par variation continue ou par paliers de l'amplitude de contrainte ou de déformation, et si une ou plusieurs éprouvettes sont utilisées.

Pour identifier la relation simple sur les amplitudes et vérifier l'unicité de la courbe d'écrouissage cyclique, plusieurs moyens peuvent être employés.

— On peut comparer la courbe des amplitudes ($\Delta\sigma$, $\Delta\varepsilon$) avec chacune des boucles d'hystérésis ajustées au sommet inférieur ($\sigma - \sigma_m$, $\varepsilon - \varepsilon_m$). Si l'en-

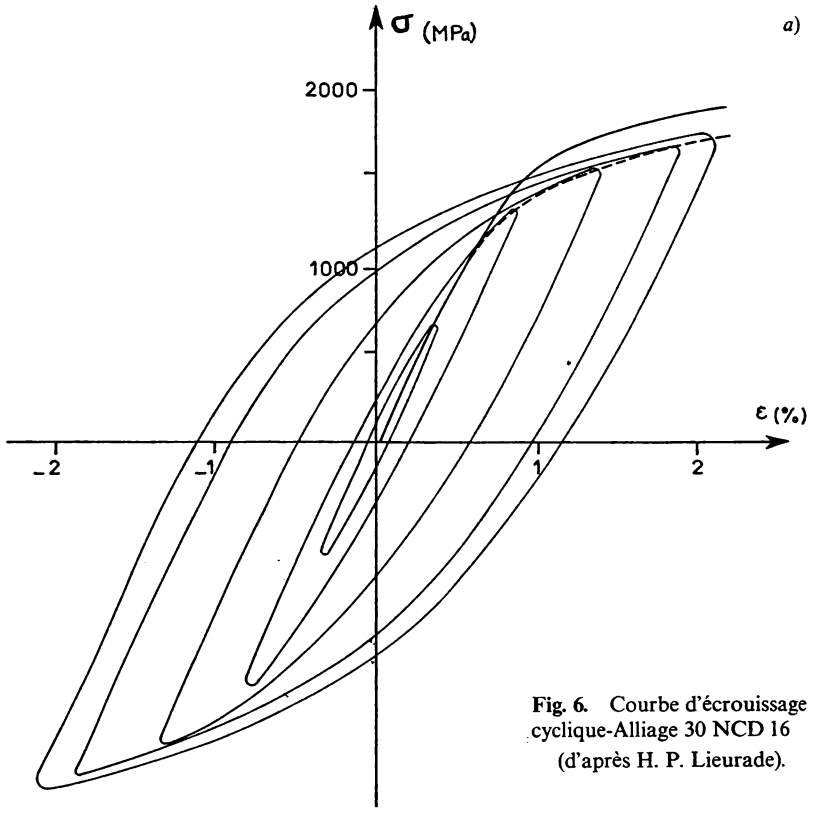
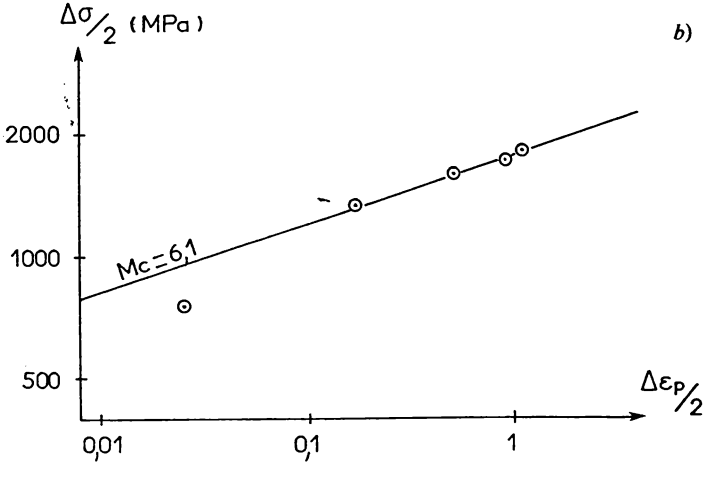


Fig. 6. Courbe d'écrouissage cyclique-Alliage 30 NCD 16 (d'après H. P. Lieurade).



semble de ces courbes coïncide approximativement (règle de Masing), on peut considérer qu'il n'y a pas d'effet parasite (exemple : fig. 7) :

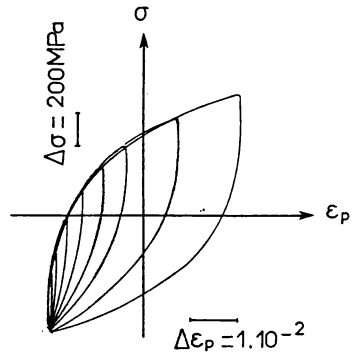


Fig. 7. Vérification de la règle de Masing. Alliage $TiAl_6V_4$

— On peut comparer les courbes d'écrouissage cyclique obtenues en utilisant une éprouvette par niveau et celles obtenues par la méthode des essais incrémentaux qui consiste à appliquer sur une seule éprouvette des cycles de déformation d'amplitude successivement croissante, puis décroissante, jusqu'à stabilisation. La courbe cyclique est alors définie par le lieu des sommets des boucles dans ce régime stabilisé (exemple : fig. 8).

— On peut effectuer des essais à paliers de déformation croissants puis décroissants (exemple fig. 9 pour l'acier 316 L à 20 °C). Après stabilisation du durcissement au niveau le plus bas, un regain de durcissement au niveau supérieur est un indice de dépendance entre l'écrouissage cyclique et l'amplitude de déformation. Lors des niveaux décroissants l'effet de mémoire du chargement antérieur est nettement établi par comparaison des boucles obtenues pour un même niveau de déformation ($\pm$ 1 % et $\pm$ 1,5 % dans l'exemple considéré).

Pour l'identification de la courbe d'écrouissage cyclique nous conseillons ce dernier type d'essai à palier de déformation qui donne avec une seule éprouvette un ensemble d'indications suffisamment riche pour établir l'unicité de cette courbe ou, dans le cas contraire, pour définir une modélisation plus complexe tenant compte de l'influence du trajet de déformation, telle que celle qui est développée au paragraphe 4.4.4.2 du présent chapitre. Cinq paliers croissants et trois paliers décroissants d'une vingtaine de cycles chacun sont généralement suffisants.

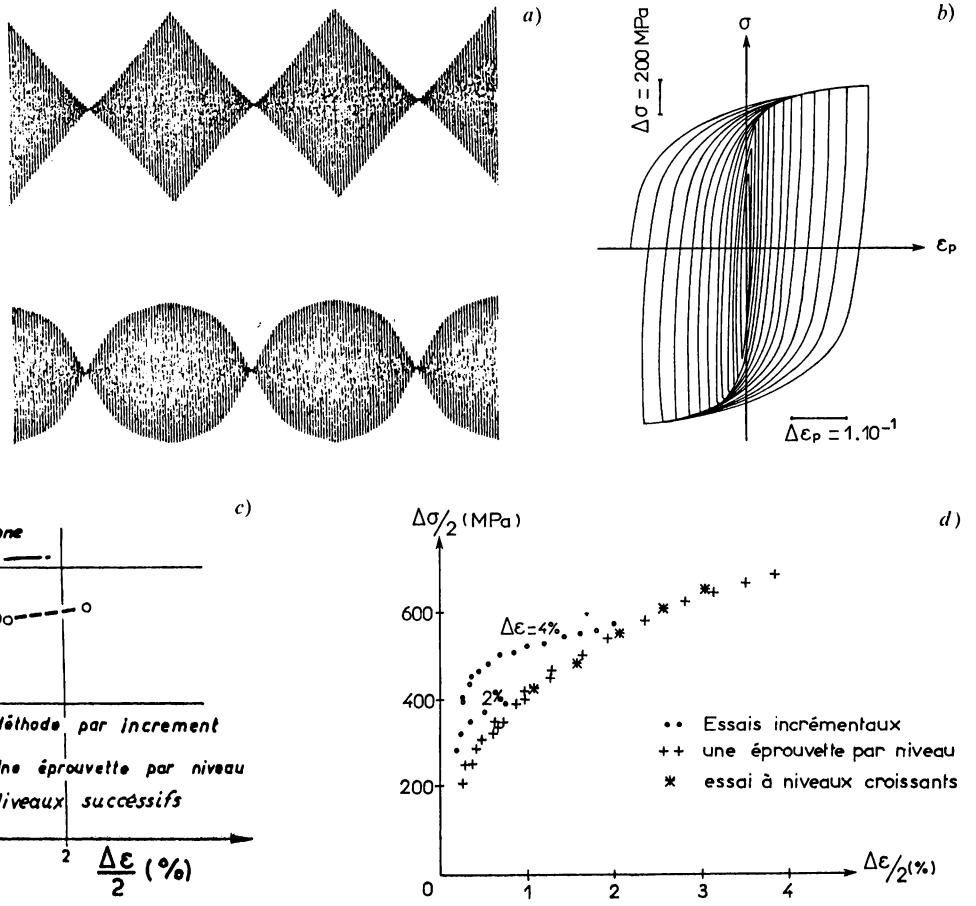
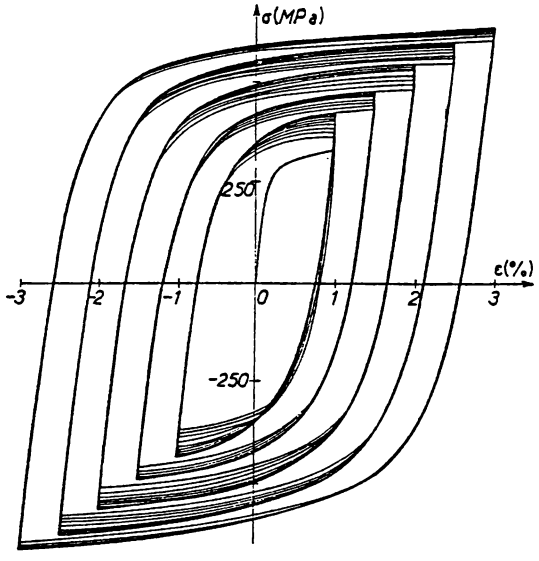


Fig. 8. Courbes d'écrouissage cyclique obtenues par différentes méthodes (d'après H. P. Lieurade).

(*a*) Evolution de la contrainte et de la déformation imposées.
(*b*) Alliage NIMONIC 90.
(*c*) Acier 35 CD 4.
(*d*) Acier 316.



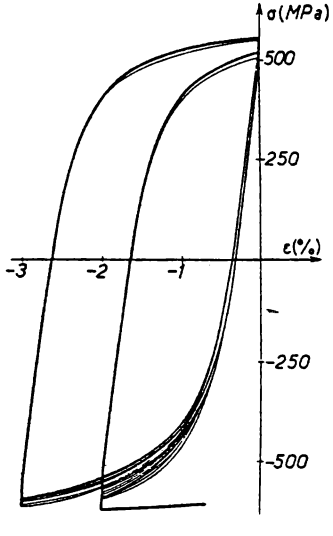


Fig. 9. Essai à paliers croissants puis décroissants. Acier 316 L. Amplitudes successives (2 ‰, 3 ‰, 4 ‰, 5 ‰, 6 ‰, 2 ‰, 3 ‰).

2.1.3.4. *Tableau de caractéristiques de plasticité de matériaux usuels*

Les valeurs des coefficients indiquées dans le tableau 10 se rapportent aux modèles simples étudiés au paragraphe 2.1.3.

Matériau	T °C	Chargement monotone						Chargement cyclique	
		σ_Y MPa	σ_u MPa	M	K	M_Y	K_Y	M_c	K_c
Acier 35 NCD 16	20	1 200	2 000	10,5	2 990	3,1	3 340	6,8	6 230
Alliage IN 100	20	650	875	33	960	5,6	655		
»	700	600	925	18	1 150	6,8	354	3,25	9 925
Acier 316 L	20	133				4,5	435	10,50	811
Alliage UDIMET 700	20	700	1 250	17	1 374	4,8	900		
Alliage TA 6 V	350	300	690	10,2	940	4,3	884	11,00	1 583
Alliage INCO 718	550	500	1 180	12,2	1 657	5,2	1 658	11,7	2 585
COTAC 744	1 000			4,2	2 206				
X 20.CrV 12.1	350			9,6	853			7,25	951
»	600							7,9	554
IMI 550	20			28,2	1 176			11,8	1 366
COBALT VO 795	20							2,4	5 850
Acier de construction (0,14 % C-0,35 Si; 1,36 Mn-0,24 Cr)	20							5,7	2 360
NIMONIC 90	20							7,3	3 940

Tableau 10. Tableau de caractéristiques de Plasticité

2.2. Critères tridimensionnels de plasticité

Le seuil de plasticité unidimensionnel définit le domaine d'élasticité dans l'espace de la contrainte à une dimension (fig. 11).

La généralisation de cette notion au cas tridimensionnel est le critère de plasticité. Il définit le domaine, dans l'espace des contraintes à 3 ou 6 dimensions, à l'intérieur duquel toute variation de contrainte n'engendre que des variations de déformation élastique.

Le moyen le plus simple de mettre en évidence ce domaine dans un espace à deux dimensions est d'utiliser des essais de traction (ou compression)-torsion sur des tubes minces. On applique à l'éprouvette une succession de chargements radiaux définis par la force axiale $\vec{F}$ et le couple $\vec{C} = \alpha \vec{F}$. A chaque chargement correspondant à une valeur constante du scalaire α $(-\infty < \alpha < +\infty)$ on note les valeurs de $\vec{F}$ et $\vec{C}$ pour lesquelles des déformations plastiques sensibles apparaissent : déformations comprises entre 10^{-6} et 10^{-4} suivant la précision de l'appareillage.

La courbe obtenue dans le graphe des contraintes normales σ_{11} et tangentielle σ_{12} est la frontière du domaine d'élasticité. La figure 12 donne des allures

typiques pour un même matériau à l'état non écroui isotrope (A) et pré-écroui par une sollicitation de traction (B) puis par une sollicitation de traction-cisaillement (C).

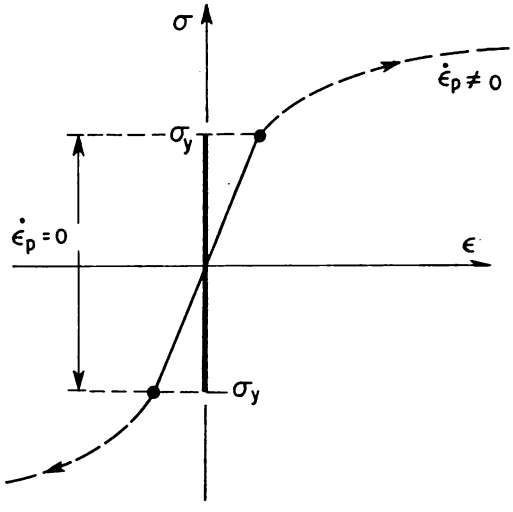


Fig. 11. Domaine d'élasticité unidimensionnel.

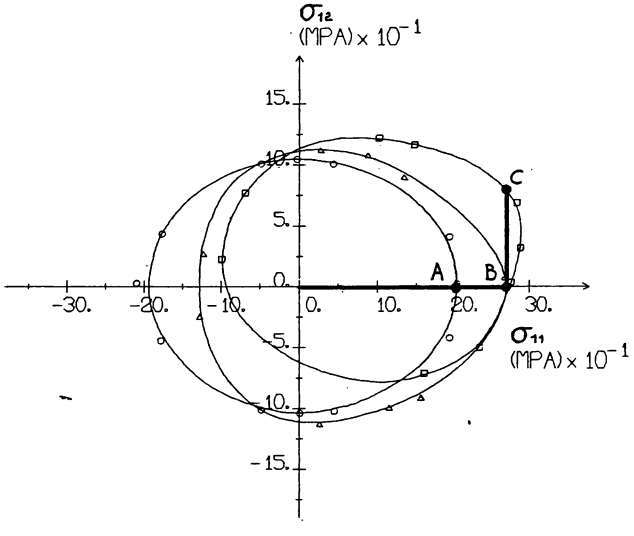


Fig. 12. Domaines d'élasticité en contraintes normale et tangentielle. Expériences de traction-torsion sur éprouvette tubulaire. Alliage d'aluminium 2024 (d'après M. Rousset).

La modélisation mathématique de ces domaines et de leur évolution a fait l'objet de nombreuses propositions. On trouvera au paragraphe 4 une discussion plus détaillée du comportement tridimensionnel ; nous nous limitons ici aux notions essentielles les plus couramment utilisées.

Une remarque préliminaire s'impose sur la terminologie concernant l'isotropie ou l'anisotropie du critère de limite d'élasticité et de l'écrouissage.

Dans le premier contexte, les termes de critère isotrope ou anisotrope s'appliquent à un état figé (sans modification de l'écrouissage). Au contraire, l'écrouissage implique l'idée de transformation : on parle ainsi d'écrouissage isotrope lorsque la transformation se fait par homothétie (dilatation du critère), d'écrouissage cinématique pour une translation, d'écrouissage isotrope-cinématique combinés, d'écrouissage anisotrope, enfin, lorsque la transformation est quelconque. On peut ainsi parler d'écrouissage « isotrope » pour un matériau initialement anisotrope.

2.2.1. *Critères isotropes*

Ce sont ceux qui correspondent à des états d'écrouissage isotrope. L'équation de la frontière du domaine fait intervenir à priori toutes les composantes du tenseur des contraintes et la variable d'écrouissage, qui se réduit à une variable scalaire dans le cas de l'écrouissage isotrope, on l'a vu au chapitre 3 ; choisissons la variable seuil de plasticité en traction simple σ_s

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_s) = 0 .$$

L'isotropie impose que la frontière du domaine soit invariante par changement de repère, la fonction f ne dépend donc que des trois invariants du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ (invariants définis au chapitre 2) :

$$f(\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}}, \sigma_{\mathrm{III}}, \sigma_s) = 0 .$$

Dans les matériaux métalliques on observe généralement l'incompressibilité plastique et l'indépendance du comportement vis-à-vis de la contrainte hydrostatique. Il suffit alors de faire intervenir le tenseur déviateur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\sigma_{\mathrm{I}}\mathbf{1} .$$

Dans le cas isotrope, il est suffisant d'utiliser les invariants $s_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}'^2)$, et $s_{\mathrm{III}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}'^3)$. La relation

$$f(s_{\mathrm{II}}, s_{\mathrm{III}}, \sigma_s) = 0$$

est l'expression générale des critères isotropes de plasticité incompressible. Dans l'espace des contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3, la frontière est représentée par un cylindre dont l'axe est la trissectrice du repère. Notons qu'à la place des

invariants s_{II} et s_{III} du déviateur on peut utiliser les invariants homogènes associés :

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = (3\, s_{II})^{1/2} = (\tfrac{3}{2}\, \sigma'_{ij}\, \sigma'_{ij})^{1/2}$$
$$J_3(\boldsymbol{\sigma}) = (\tfrac{27}{2}\, s_{III})^{1/3} = (\tfrac{9}{2}\, \sigma'_{ij}\, \sigma'_{jk}\, \sigma'_{ki})^{1/3}.$$

2.2.1.1. *Critère de Von Mises*

Les déformations plastiques des métaux sont les résultats de glissements, de cisaillements intracristallins gouvernés par les contraintes tangentielles. Dans le critère de Von Mises, on considère que le seuil de plasticité est lié à l'énergie élastique de cisaillement. Cela revient à négliger l'influence du troisième invariant et à prendre une expression linéaire pour la fonction f.

L'énergie de déformation élastique

$$w_e = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^e} \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e$$

peut s'écrire comme la somme d'une énergie de cisaillement w_d et d'une énergie de déformation volumique :

$$w_e = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^e} [\boldsymbol{\sigma}' + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathbf{1}] : [\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{e'} + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e)\,\mathbf{1}]$$
$$w_e = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^e} \boldsymbol{\sigma}' : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{e'} + \int_0^{\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\varepsilon}^e)} \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e).$$

En introduisant la loi de l'élasticité linéaire :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{e'} = \frac{1}{2\,\mu}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'$$

dans l'énergie de cisaillement $w_d = \displaystyle\int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^e} \boldsymbol{\sigma}' : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{e'}$, on obtient :

$$w_d = \int_0^{\boldsymbol{\sigma}'} \frac{1}{2\,\mu}\,\boldsymbol{\sigma}' : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{4\,\mu}\,\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'.$$

Ecrivons que cette énergie d'un état tridimensionnel est égale à celle d'un état unidimensionnel de traction pure équivalent de seuil $\sigma = \sigma_s$.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\,\sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\,\sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\,\sigma_s \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4\mu}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{6\mu}\sigma_s^2$$

soit

$$\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}' - \tfrac{1}{3}\sigma_s^2 = 0\,.$$

La fonction $f(s_{II}, \sigma_s) = 0$ s'exprime donc par

$$s_{II} - \tfrac{1}{3}\sigma_s^2 = 0$$

ou avec la contrainte équivalente $\sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3\,s_{II}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}\,\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}$

$$\boxed{f = \sigma_{eq} - \sigma_s = 0}\,.$$

Tout état de contrainte tridimensionnel tel que $\sigma_{eq} = \sigma_s$ est un état de contrainte complexe équivalent, au sens de Von Mises, à l'état unidimensionnel défini par le seuil de plasticité σ_s. En particulier, le critère de limite d'élasticité initial s'exprime par :

$$\sigma_{eq} - \sigma_Y = 0\,.$$

Les expressions développées du critère de Von Mises sont :

— dans l'espace des contraintes à 6 dimensions

$$\tfrac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)] - \sigma_s^2 = 0$$

— dans l'espace des contraintes principales à 3 dimensions :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_s}\,.$$

C'est l'équation d'un cylindre à base circulaire axé sur la trissectrice du repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et de rayon $R = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\sigma_s$ (fig. 13).

Le plan du déviateur est le plan passant par l'origine et perpendiculaire à la trissectrice du système principal. La projection orthogonale sur ce plan du point de coordonnées $(\sigma_s, 0, 0)$ donne le point de la figure tel que : $\sigma'_1 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\sigma_s$, $\sigma'_2 = \sigma'_3 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\sigma_s$. Inversement, les coordonnées de ce point représentatif du déviateur du tenseur uniaxial sont, dans le repère principal : $\tfrac{2}{3}\,\sigma_s$, $-\tfrac{1}{3}\,\sigma_s$, et $-\tfrac{1}{3}\,\sigma_s$.

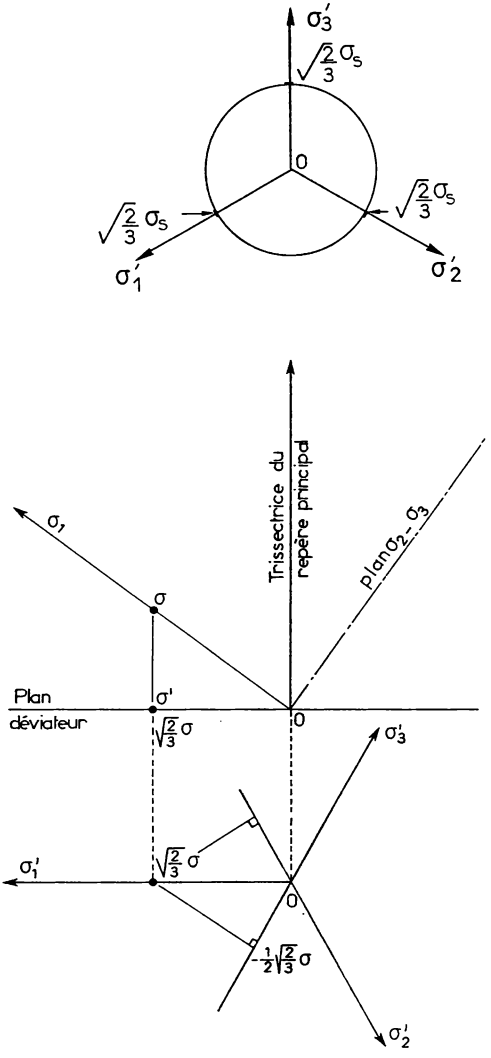


Fig. 13. Représentations géométriques du critère de Von Mises dans le plan du déviateur.

2.2.1.2. *Critère de Tresca*

Le seuil de plasticité n'est plus lié à l'énergie mais à la contrainte de cisaillement : la contrainte tangentielle maximale.

Elle s'exprime par : $\frac{1}{2} \underset{i \neq j}{\text{Sup}} (| \sigma_i - \sigma_j |)$.

En l'égalant à sa valeur pour l'état unidimensionnel équivalent correspondant au seuil σ_s, on obtient l'expression du critère :

$$\frac{1}{2} \operatorname*{Sup}_{i \neq j} (| \sigma_i - \sigma_j |) = \frac{\sigma_s}{2}$$

ou

$$\boxed{f = \operatorname*{Sup}_{i \neq j} (| \sigma_i - \sigma_j |) - \sigma_s = 0} \,.$$

Cette fonction peut s'exprimer à partir des invariants du déviateur, s_{II} et s_{III}. L'égalité ci-dessous définit l'ensemble des six plans du critère de Tresca :

$$f(s_{II}, s_{III}) = 4\, s_{II}^3 - 27\, s_{III}^2 - 9\, \sigma_s^2\, s_{II}^2 + 6\, \sigma_s^4\, s_{II} - \sigma_s^6 = 0 \,.$$

La limite d'élasticité initiale selon Tresca s'exprime par :

$$\operatorname*{Sup}_{i \neq j} (| \sigma_i - \sigma_j |) - \sigma_Y = 0 \,.$$

Dans l'espace des contraintes principales le critère de Tresca est représenté par un prisme droit à base hexagonale dont l'axe est la trissectrice du repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (fig. 14). Il est inscrit dans le cylindre de Von Mises.

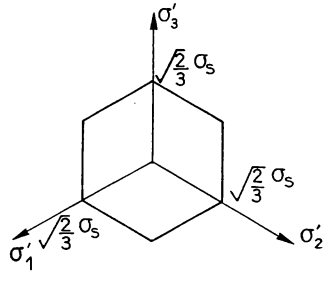


Fig. 14. Représentation géométrique du critère de Tresca dans le plan du déviateur.

2.2.1.3. *Validité expérimentale*

Il n'y a guère qu'au voisinage du seuil de limite d'élasticité que les métaux sont isotropes. Dans ce cas, les points expérimentaux se situent entre le critère de Von Mises et le critère de Tresca, les métaux très ductiles étant plus proches du critère de Tresca. Un exemple de frontière de limite d'élasticité déterminée en traction (ou compression)-torsion est donné sur la figure 15.

Un critère intermédiaire entre ceux de Von Mises et de Tresca permet de mieux décrire ces résultats expérimentaux. Proposé par Edelman et Drucker, il introduit une combinaison des deuxième et troisième invariants du dévia-

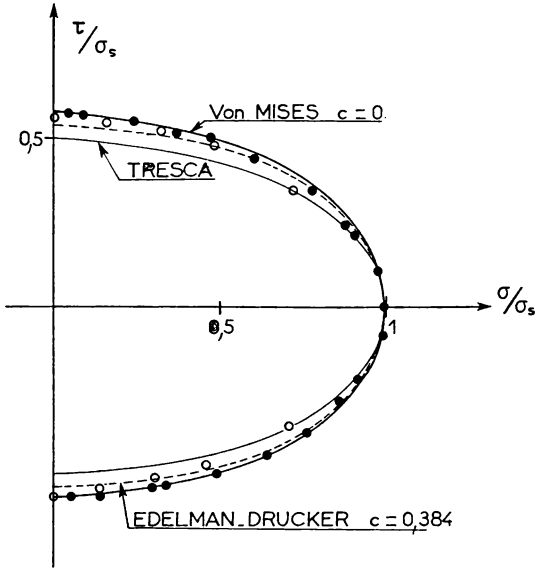


Fig. 15. Frontière de la limite d'élasticité.
○ Alliage Alu. 195 (d'après Ivey).
● Alliage Alu. 24 S-T 4 (d'après Naghdi et al.).

teur des contraintes J_2 et J_3 dans laquelle intervient un coefficient C dépendant du matériau. Ce critère revient à exprimer le domaine d'élasticité sous la forme :

$$f = 4\, s_{II}^3 - 27\, C s_{III}^2 - C\sigma_s^2 (3\, s_{II} - \sigma_s^2)^2 - \frac{4}{27}(1 - C)\, \sigma_s^6 = 0\,.$$

En fonction de J_2 et J_3 ce critère s'exprime encore par :

$$J_2^6 - \sigma_s^6 - C\left[J_3^6 - \sigma_s^6 + \frac{27}{4}\sigma_s^2\,(J_2^2 - \sigma_s^2)^2\right] = 0\,.$$

On retrouve le critère de Von Mises pour $C = 0$ et le critère de Tresca pour $C = 1$. Un exemple de confrontation à l'expérience est donné sur la figure 15 où $C = 0{,}384$.

Dans les applications c'est cependant le critère de Von Mises qui reste le plus utilisé en raison de sa plus grande facilité d'emploi dans les calculs numériques. Le critère de Tresca est plus délicat d'utilisation en raison des discontinuités de normale à la surface (voir § 3.3).

2.2.2. *Critères anisotropes*

Ce sont ceux dont l'expression ne peut se réduire à une fonction des seuls invariants. Des directions privilégiées d'anisotropie interviennent. Dans le cas du matériau plastiquement incompressible les critères anisotropes clas-

siques font intervenir une rotation dans l'espace des contraintes ; la généralisation du critère de Von Mises s'exprime ainsi sous la forme :

$$(\mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}') : \boldsymbol{\sigma}' = 1$$

où C est un tenseur d'ordre 4 dépendant du matériau et respectant les symétries

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}.$$

Le même critère peut s'écrire avec le tenseur des contraintes :

$$(\mathbf{C}' : \boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} = 1$$

avec $C'_{ijkk} = C'_{iikl} = 0$.

2.2.2.1. *Critère de Hill*

Il correspond à une anisotropie particulière qui conserve trois plans de symétrie dans l'état d'écrouissage du matériau. Les intersections de ces trois plans sont les axes principaux d'anisotropie qui sont pris comme repère pour l'écriture du critère, soit $(0, x_1\ x_2\ x_3)$. Ce critère se déduit de l'expression générale ci-dessus avec :

$$\begin{array}{lll} C_{1111} = F + H & C_{2222} = F + G & C_{3333} = G + H \\ C_{1122} = -F & C_{2233} = -G & C_{3311} = -H \\ C_{1212} = L/2 & C_{2323} = M/2 & C_{3131} = N/2 \end{array}$$

et les valeurs obtenues par symétrie, ce qui donne :

$$F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{13}^2 = 1$$

F, G, H, L, M, N sont les six paramètres scalaires qui caractérisent l'état d'écrouissage anisotrope. On peut les déterminer à l'aide de trois expériences de traction simple et trois expériences de cisaillement simple.

— Seuil de traction σ_{s_1} dans la direction $x_1 \rightarrow F + H = 1/\sigma_{s_1}^2$.
— Seuil de traction σ_{s_2} dans la direction $x_2 \rightarrow F + G = 1/\sigma_{s_2}^2$.
— Seuil de traction σ_{s_3} dans la direction $x_3 \rightarrow G + H = 1/\sigma_{s_3}^2$.
— Seuil de cisaillement $\sigma_{s_{12}}$ dans le plan $(0, x_1, x_2) \rightarrow L = 1/2\ \sigma_{s_{12}}^2$.
— Seuil de cisaillement $\sigma_{s_{23}}$ dans le plan $(0, x_2, x_3) \rightarrow M = 1/2\ \sigma_{s_{23}}^2$.
— Seuil de cisaillement $\sigma_{s_{31}}$ dans le plan $(0, x_3, x_1) \rightarrow N = 1/2\ \sigma_{s_{31}}^2$.

Bien qu'anisotrope ce critère ne rend pas compte de l'effet Bauschinger : les seuils sont identiques en traction et en compression. Cependant il rend compte

approximativement de l'état d'écrouissage initial des tôles laminées. Un exemple est donné sur la figure 16.

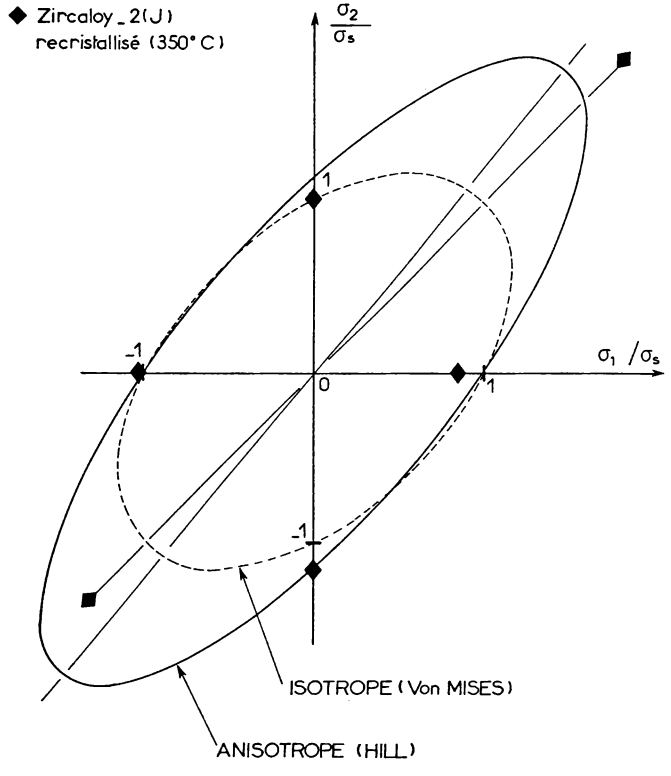


Fig. 16. Exemple de matériau plastiquement anisotrope. Critère de Hill (d'après Lee et Zaverl).

2.2.2.2. *Critère de Tsai*

Le critère de Tsai permet justement de prendre en compte les différences éventuelles d'état d'écrouissage en traction et compression. Sous sa forme la plus générale il s'exprime comme la somme d'une forme linéaire et d'une forme quadratique des 6 composantes des contraintes notées ici σ_α ($\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$, $\sigma_3 = \sigma_{33}$, $\sigma_4 = \sigma_{23}$, $\sigma_5 = \sigma_{31}$, $\sigma_6 = \sigma_{12}$)

$$F_\alpha \sigma_\alpha + F_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta = 1 .$$

Les hypothèses d'orthotropie et d'incompressibilité plastique (non-influence de la contrainte hydrostatique) entraînent une réduction de 27 à 8 du nombre

des coefficients F_α et $F_{\alpha\beta}$ caractéristiques du matériau. On peut alors écrire le critère sous une forme similaire à celle utilisée pour le critère de Hill.

$$F'(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G'(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H'(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \\ + 2L'\sigma_{12}^2 + 2M'\sigma_{23}^2 + 2N'\sigma_{31}^2 + \\ + P\sigma_{11} + Q\sigma_{22} - (P + Q)\sigma_{33} = 1 .$$

La détermination expérimentale des huit coefficients pour un matériau particulier est délicate et nécessite des essais de traction, des essais de compression et des essais de cisaillement dans différentes directions.

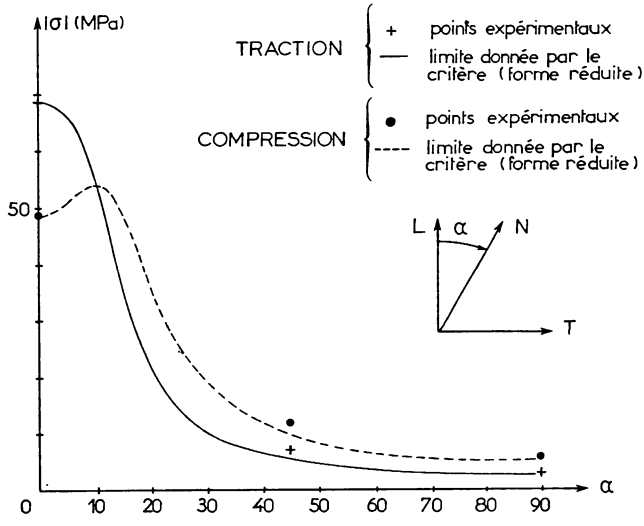


Fig. 17. Critère de Tsai pour le bois « Wana-Kouali » (d'après M. T. Gautherin).

Ce critère est assez représentatif de la limite d'élasticité des matériaux composites fibre-résine et des bois. A titre d'exemple, la figure 17 donne le graphe du critère en traction-compression dans le plan L (direction des fibres), T (direction tangente aux cercles de croissance) pour le cas du bois feuillu tropical massif « Wana-Kouali ».

3. FORMULATION GÉNÉRALE DES LOIS DE COMPORTEMENT

3.1. Hypothèse de partition

La partition des déformations en déformation élastique et déformation plastique, déjà évoquée au paragraphe précédent, est justifiée par la nature des phénomènes physiques.

Cette hypothèse, qui sera appliquée tout au long de ce chapitre, n'est pas strictement nécessaire à la formulation des lois de plasticité puisque les théories héréditaires fondées sur la thermodynamique des processus à mémoire ne l'utilisent pas, mais elle simplifie beaucoup les problèmes d'identification expérimentale et de calculs numériques.

Dans le cadre d'une théorie générale faisant intervenir les grandes déformations, l'hypothèse de partition des déformations est liée à l'existence d'une configuration intermédiaire relâchée, dont la définition a été donnée au chapitre 2. Les développements du présent chapitre sont restreints au cas des petites transformations et au comportement élastique linéaire. Leur généralisation au cas des grandes transformations ne pose pas de problème majeur lorsque les déformations élastiques sont petites. On suppose de plus, ici, le découplage entre comportement élastique et comportement plastique (module d'Young et coefficient de Poisson, par exemple, sont supposés indépendants de l'écrouissage).

La déformation plastique se définit comme la différence :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^e ,$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la déformation totale et où $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ est la déformation élastique, reliée linéairement à la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ par la loi d'élasticité. On rappelle ici que, dans le cadre d'une théorie en petite transformation, la déformation totale est la partie symétrique de l'opérateur gradient du déplacement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{grad} \vec{u} + (\operatorname{grad} \vec{u})^T\right] .$$

3.2. Choix des variables thermodynamiques

Comme indiqué au chapitre 2, les variables d'état ou variables indépendantes, sont les variables observables : la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la température T, et les variables internes $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, V_k. L'hypothèse de partition et l'application de l'inégalité de Clausius-Duhem au cas des déformations élastoplastiques indépendantes du temps permettent d'écrire les variables thermodynamiques associées à $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et T, respectivement le tenseur des contraintes et l'entropie spécifique, sous la forme (voir chap. 2) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \quad s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}$$

ou ρ est la masse volumique et où Ψ est l'énergie libre spécifique, dépendant des variables observables et des variables internes ;

$$\Psi = \Psi(\varepsilon - \varepsilon^p, T, V_k) = \Psi(\varepsilon^e, T, V_k).$$

L'inégalité de Clausius-Duhem se réduit alors à :

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{1}{T} \vec{q} . \overrightarrow{\text{grad}\, T} \geqslant 0 .$$

Les variables internes V_k de nature scalaire ou tensorielles représentent l'état actuel de la matière, c'est-à-dire ici l'état d'écrouissage ; on utilise classiquement une variable scalaire (variable d'écrouissage isotrope) :

— soit la déformation plastique cumulée qui s'exprime par :

$$p = \int_0^t \left[\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p(\tau) : \dot{\varepsilon}^p(\tau) \right]^{1/2} d\tau$$

— soit le travail plastique dissipé :

$$w_p = \int_0^t \sigma(\tau) : \dot{\varepsilon}^p(\tau)\, d\tau$$

et une ou plusieurs variables tensorielles ou variables d'écrouissage cinématique. Dans la suite, sauf mention contraire, nous n'employons qu'une seule variable cinématique, notée α. La définition des variables p et w_p est illustrée sur la figure 18*a* pour le cas de la traction-compression.

Très schématiquement, les variables scalaires sont associées à l'état actuel de la densité de dislocation tandis que les variables cinématiques correspondent aux incompatibilités des déformations plastiques au sein du polycristal. Généralement, sauf intervention de processus de restauration de la structure cristalline, gouvernés de façon essentielle par le temps, les variables p et w_p sont croissantes : elles ne permettent donc pas de traduire les effets d'écrouissage alternés observés sous chargement cyclique. Au contraire, les variables cinématiques sont plus directement liées à l'état actuel de déformation. En cas de chargement cyclique, elles peuvent traduire les comportements réels à cause de leur évolution au cours de chaque cycle, même en régime stabilisé.

Une variable cinématique souvent utilisée est la déformation plastique elle-même ($\alpha = \varepsilon^p$) comme dans les modèles d'écrouissage de Prager (écrouissage cinématique linéaire).

Le découplage entre comportement élastique et écrouissage impose d'écrire l'énergie libre sous la forme :

$$\Psi = \Psi_e(\varepsilon^e, T) + \Psi_p(p, \alpha, T).$$

Les variables forces thermodynamiques associées s'en déduisent par :

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p}, \qquad \mathbf{X} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}.$$

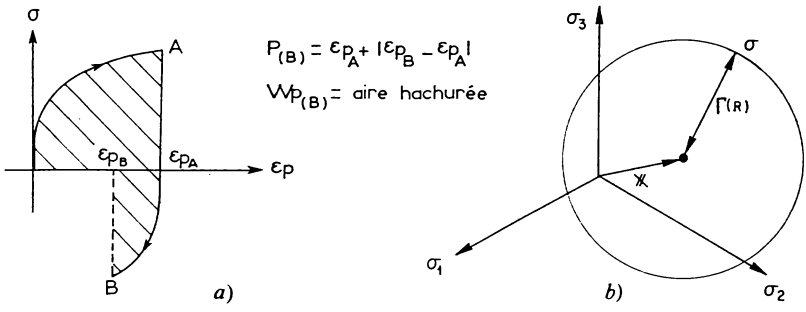


Fig. 18.

(*a*) Définitions de la déformation plastique cumulée p et du travail plastique dissipé w_p.
(*b*) Domaine actuel d'élasticité défini par les variables R et $\mathbf{X}$.

La figure 18*b* montre schématiquement les rôles de ces deux variables dans la description de l'état d'écrouissage, par l'évolution du domaine d'élasticité; la taille du domaine est une fonction de la variable isotrope R tandis que son centre est repéré par la variable cinématique $\mathbf{X}$.

Dans le cadre du découplage entre dissipations intrinsèque et thermique (qui n'implique pas le découplage des effets), et avec ces variables, l'inégalité de Clausius-Duhem exprime le caractère positif de ces deux dissipations :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - R\dot{p} - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geqslant 0 \qquad -\frac{1}{T}\vec{q}.\overrightarrow{\text{grad}}\, T \geqslant 0 .$$

La dissipation intrinsèque représente la différence entre l'énergie dissipée plastiquement et les énergies bloquées dans l'élément de volume, par les réseaux de dislocations par exemple.

3.3. Surface de charge et potentiel de dissipation

3.3.1. *Surface de charge, critère de charge-décharge*

Le comportement de plasticité indépendante du temps doit être considéré comme un cas particulier du schéma plus général de la viscoplasticité qui est étudié au chapitre 6. Très schématiquement, on peut imaginer que, dans l'espace des contraintes, les surfaces équipotentielles de l'écoulement, ou surfaces d'égale dissipation (fig. 19), constituent une famille de surfaces emboitables. Pour un état d'écrouissage fixé, représenté par exemple par le centre et la dimension de la surface intérieure Ω, la vitesse d'écoulement est d'autant plus élevée que l'état de contrainte est plus éloigné du centre X.

Sur la surface la plus proche du centre, $\Omega = 0$, on a une vitesse d'écoulement nulle, sur la surface extérieure une vitesse d'écoulement infinie. Entre les deux

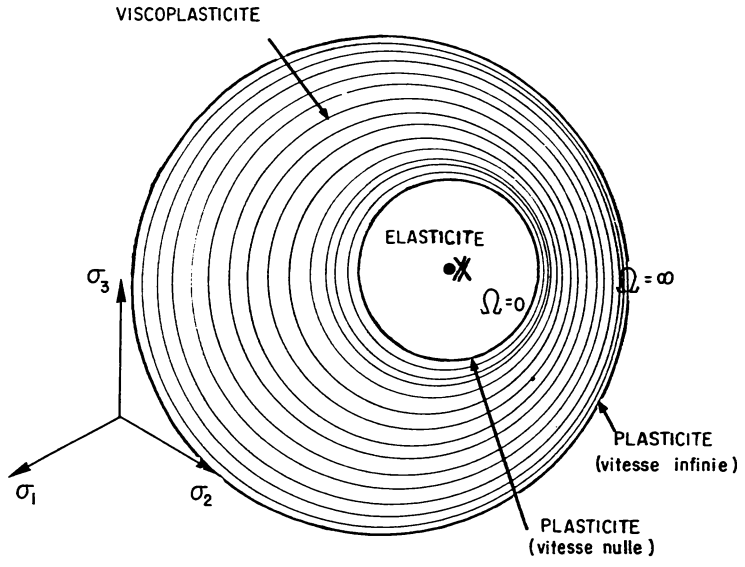


Fig. 19. Surfaces équipotentielles de l'écoulement (cas limites de la plasticité indépendante du temps).

se situe le domaine de la viscoplasticité, le domaine de l'élasticité étant bien sûr représenté par $\Omega < 0$.

Le schéma de la plasticité indépendante du temps s'applique ainsi :

— soit au cas des chargements infiniment lents ou de la recherche d'états asymptotiques sous chargement fixé ;

— soit au cas des chargements extrêmement rapides.

Les réponses dans ces deux cas extrêmes peuvent être plus ou moins éloignées : pour les métaux sollicités aux températures inférieures au quart de la température absolue de fusion ils sont très proches, ce qui justifie l'analyse plastique indépendante du temps.

Dans le second cas des vitesses infiniment grandes, les déformations visqueuses sont considérées comme négligeables (elles n'ont pas le temps de se produire !) : ainsi, quelque soit le cas considéré, il existe une surface définie dans l'espace des contraintes à partir de laquelle l'écoulement plastique peut se produire. Pour les états de contrainte contenus à l'intérieur de cette surface le comportement est entièrement élastique. Cette surface $f = 0$ est appelée surface de charge ou surface d'écoulement. Dans les conditions initiales elle est identique au graphe du critère de limite d'élasticité (voir § 2.2).

Afin de décrire complètement la possibilité d'écoulement plastique il faut encore introduire un critère de charge-décharge. L'écoulement se produit si deux conditions sont réunies simultanément (voir fig. 20).

1) Le point représentatif de l'état de contrainte σ^* est situé sur la surface de charge :

$$f(\sigma^*, V_k) = 0 .$$

2) Le schéma de la plasticité classique impose que le point représentatif de l'état de contrainte ne puisse sortir de la surface ($f > 0$ est impossible). Pendant l'écoulement continu on introduit donc la condition de consistance :

$$df(\sigma^*) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma^* + \frac{\partial f}{\partial V_k} dV_k = 0$$

qui implique que le point représentatif de l'état $(\sigma^* + d\sigma^*)$ reste sur la surface de charge.

Par contre la variation de contrainte peut entraîner le point représentatif de l'état de chargement vers l'intérieur. C'est le cas de la décharge, caractérisée par :

$$df(\sigma^*) < 0 .$$

Dans ce schéma, aucun écoulement ne peut se produire pendant la décharge : le comportement devient élastique dès son début. En résumé :

$f < 0$	⟶	comportement élastique
$f = 0$ et $df = 0$	→	écoulement plastique
$f = 0$ et $df < 0$	→	décharge élastique

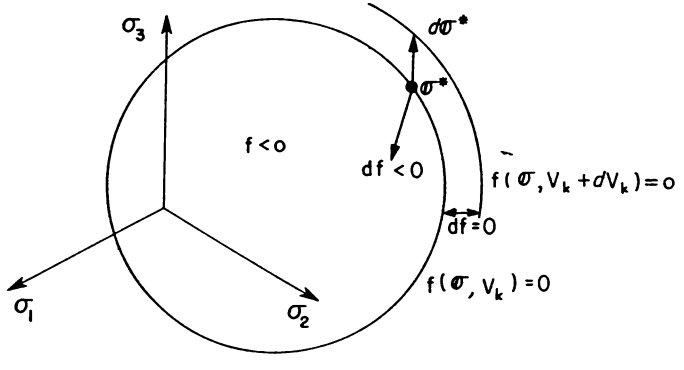


Fig. 20. Critère de charge-décharge dans le cas d'un écrouissage positif.

Pour les matériaux à écrouissage positif, la surface de charge s'exprime en fonction des composantes du tenseur des contraintes et dépend de l'état d'écrouissage par l'intermédiaire des variables internes, généralement les forces thermodynamiques $\mathbf{X}$ et R définies ci-dessus. Eventuellement elle dépend aussi de la température ;

$$f = f(\sigma, R, \mathbf{X}, T).$$

Pour les matériaux à écrouissage négatif il peut être plus intéressant d'utiliser une formulation plus générale, en déformation par exemple :

$$f' = f'(\varepsilon, p, \alpha, T).$$

La figure 21 montre, dans le cas de la traction simple, que la condition de charge $\dot{\sigma} > 0$ ne peut être utilisée lorsque l'écrouissage est négatif $\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} < 0\right)$.

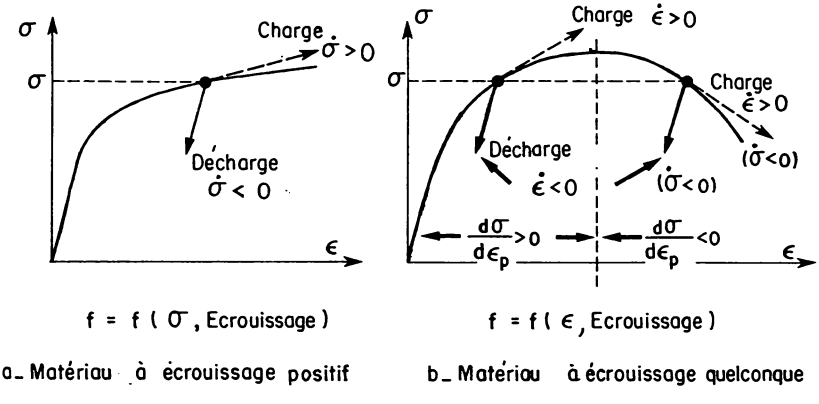


Fig. 21. Critère de charge-décharge en traction dans les cas d'écrouissage positif ou négatif.

3.3.2. *Plasticité non associée*

Dans le cadre général de la thermodynamique on a postulé l'existence d'un potentiel de dissipation dont la connaissance fournit les lois d'évolution de la déformation plastique et des variables internes. Pour la plasticité, l'emploi de ce potentiel conduit, comme on le verra au paragraphe 3.3.4, au schéma de la « plasticité associée », c'est-à-dire à un schéma dans lequel on confond la surface limite d'élasticité (ou surface de charge ou surface d'écoulement) avec une « surface équipotentielle ». Un cas plus général est celui de la « plasticité non associée », utile pour décrire certains matériaux ou phénomènes,

et pratiquement indispensable en mécanique des sols. Ce schéma n'entre pas directement dans le formalisme des « matériaux standard généralisés » introduit au chapitre I.

Le schéma de la plasticité non associée nécessite l'emploi de trois potentiels : l'énergie libre Ψ, la surface limite d'élasticité $f = 0$, une surface potentielle $F = \text{Cte}$ qui donne la direction de l'écoulement dans l'espace des variables forces généralisées (elle dépend éventuellement des variables d'état, en particulier de la température) :

$$F = F(\boldsymbol{\sigma}, R, \mathbf{X}, T).$$

L'hypothèse de normalité généralisée associée aux phénomènes dissipatifs instantanés décrite au § 4.3.5 du chapitre II, permet d'écrire :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$-\dot{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R}$$

$$-\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}}$$

$\dot{\lambda}$ est le multiplicateur de plasticité indépendante du temps, déterminé plus loin ; il est nul lorsqu'il n'y a pas d'écoulement, c'est-à-dire si

$$f < 0 \quad \text{ou} \quad f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \leqslant 0.$$

Remarquons que ce concept, bien que ne satisfaisant pas exactement aux hypothèses des matériaux standard généralisés, permet de vérifier à priori le second principe. L'inégalité de Clausius-Duhem devient :

$$\Phi = \left[\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + R \frac{\partial F}{\partial R} + \mathbf{X} : \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \right] \dot{\lambda} \geqslant 0.$$

Pour assurer cette condition il suffit que F soit convexe, positive dès qu'il y a écoulement et contienne l'origine ($F \geqslant f = 0$, $F(0, 0, 0 ; T) = 0 \, \forall T$). On démontre alors facilement que

$$\Phi \geqslant F\dot{\lambda} \geqslant 0.$$

3.3.3. *Condition de consistance — expression du multiplicateur plastique*

On a vu que le critère de charge-décharge nécessitait d'imposer $f = 0$ et $\dot{f} = 0$ au cours de l'écoulement plastique. Cette dernière condition implique :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} = 0.$$

En utilisant les relations entre variables internes et variables thermodynamiques associées on a :

$$\dot{R} = L_{pp}\,\dot{p} + \mathbf{L}_{\alpha p} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + L_{pT}\,\dot{T}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{L}_{\alpha p}\,\dot{p} + \mathbf{L}_{\alpha\alpha} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{L}_{\alpha T}\,\dot{T}$$

où l'opérateur $\mathbf{L}$ se déduit de l'énergie libre Ψ par :

$$L_{pp} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2} \quad \mathbf{L}_{\alpha T} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}\,\partial T} \quad L_{pT} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p\,\partial T}$$

$$\mathbf{L}_{\alpha p} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}\,\partial p} \quad \mathbf{L}_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}\,\partial \boldsymbol{\alpha}}.$$

Remplaçant dans $\dot{f} = 0$ et employant les relations de normalité on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{L}_{\alpha T} + \frac{\partial f}{\partial R} L_{pT}\right) \dot{T} -$$

$$- \dot{\lambda} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{L}_{\alpha\alpha} : \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial F}{\partial R} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}}\right) : \mathbf{L}_{\alpha p} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial F}{\partial R} L_{pp}\right] = 0$$

d'où l'on tire $\dot{\lambda}$ en fonction des différents potentiels et des vitesses de contrainte et de température.

Seuls les matériaux à écrouissage positif peuvent être traités dans le cadre du présent formalisme. Dans le cas contraire, il faudrait développer une théorie d'écoulement à partir d'une fonction de charge exprimée en déformation. Dire que l'écrouissage est positif revient à considérer que le module d'écrouissage est positif :

$$h = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{L}_{\alpha\alpha} : \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial F}{\partial R} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}}\right) : \mathbf{L}_{\alpha p} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial F}{\partial R} L_{pp} \geqslant 0\,.$$

Dans le cadre présent, si h est positif, l'expression du multiplicateur plastique devient :

$$\dot{\lambda} = \frac{H(f)}{h} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{L}_{\alpha T} + \frac{\partial f}{\partial R} L_{pT}\right) \dot{T} \right\rangle$$

où H désigne la fonction d'Heaviside : $H(f) = 0$ si $f < 0$, $H(f) = 1$ si $f = 0$, tandis que le symbole $\langle \cdot \rangle$ est tel que $\langle u \rangle = 0$ si $u < 0$, $\langle u \rangle = u$ si $u \geqslant 0$. L'introduction de ces deux symboles permet d'assurer directement $\dot{\lambda} = 0$ lorsque $f < 0$ ou lorsqu'il y a décharge ($\dot{f} < 0$).

3.3.4. *Plasticité associée. Matériau standard généralisé*

La théorie de plasticité associée est celle développée en identifiant la fonction F avec la fonction de charge f. φ^* joue alors le rôle de fonction indicatrice du convexe $f = 0$. Le potentiel

$$\varphi^* = \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, R, \mathbf{X}; T)$$

est obtenu par transformée de Legendre-Fenchel appliquée au potentiel des dissipations :

$$\varphi = \varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \dot{p}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}; T).$$

En plasticité indépendante du temps le potentiel φ^* est nul à l'intérieur du domaine élastique $f < 0$, infini à l'extérieur. On voit bien alors comment la plasticité peut être considérée comme un cas particulier de la viscoplasticité (voir § 3.3.1 et fig. 19).

De nombreuses lois classiques découlent de cette particularisation des matériaux standard généralisés. L'expression du module d'écrouissage devient :

$$h = \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 L_{pp} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{L}_{\alpha\alpha} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} + 2\,\frac{\partial f}{\partial R}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{L}_{\alpha p}$$

et la loi d'écoulement s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$-\dot{p} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial R}$$

$$-\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}.$$

L'expression du multiplicateur plastique est la même que ci-dessus, en remplaçant F par f.

4. LOIS D'ÉCOULEMENT PARTICULIÈRES

4.1. Les différents types de critères et de lois d'écoulement

Avant d'aborder les modèles particuliers, il est bon de fixer définitivement la signification des termes isotrope, cinématique, anisotrope. On distingue deux aspects : celui qui est lié au critère d'écoulement et celui qui est lié à l'écrouissage, c'est-à-dire à l'évolution du critère. Les mots isotrope et anisotrope

s'appliquent aux deux aspects alors que le terme cinématique n'intervient qu'avec l'idée d'évolution. Schématiquement on peut faire intervenir six niveaux de théorie, illustrés ci-dessous où l'on s'est limité à l'utilisation du second invariant.

1) *Critère isotrope - Ecrouissage isotrope* : l'invariant $J(\sigma)$ et une variable scalaire p sont suffisants (J est par exemple le second invariant $J = J_2$).

2) *Critère isotrope - Ecrouissage cinématique* : on fait intervenir la translation du critère par un tenseur $\mathbf{X}$.

3) *Critère anisotrope - Ecrouissage isotrope* : le critère s'exprime sous une forme plus complexe, par exemple avec $(\mathbf{C} : \sigma') : \sigma'$ où $\mathbf{C}$ dépend du matériau, mais cette forme se conserve au cours du processus d'écrouissage, par dilatation simple, donc une variable scalaire p.

4) *Critère anisotrope - Ecrouissage cinématique* : la forme du critère se conserve au cours de l'écrouissage mais la surface subit une translation représentée par le tenseur $\mathbf{X}$.

5) *Critère isotrope - Ecrouissage anisotrope* (non cinématique) : l'invariant $J_2(\sigma)$ est transformé en une expression complexe, comportant éventuellement un effet cinématique, dans laquelle $\mathbf{C}^*(\varepsilon_p)$ exprime une anisotropie dépendant de l'état actuel de déformation plastique.

6) *Critère anisotrope - Ecrouissage anisotrope* : c'est la généralisation immédiate du cas précédent, $\mathbf{C}$ décrit l'anisotropie initiale, sous un état de déformation plastique nulle.

Cas N°	Critère initial	Variables d'écrouissage	Critère transformé par l'écrouissage
1	$f(J(\sigma))$ isotrope	p	$f(J(\sigma)) - R(p)$ isotrope
2	$f(J(\sigma))$ isotrope	$\mathbf{X}$	$f(J(\sigma - \mathbf{X}))$ cinématique
3	$f(\mathbf{C} : \sigma' : \sigma')$ anisotrope	p	$f(\mathbf{C} : \sigma' : \sigma') - R(p)$ isotrope
4	$f(\mathbf{C} : \sigma' : \sigma')$ anisotrope	$\mathbf{X}$	$f(\mathbf{C} : (\sigma' - \mathbf{X}') : (\sigma' - \mathbf{X}'))$ cinématique
5	$f(J(\sigma))$ isotrope	p, $\mathbf{X}$, ε^p	$f(\mathbf{C}^* : (\sigma' - \mathbf{X}') : (\sigma' - \mathbf{X}')) - R(p)$ isotrope + cinématique + anisotrope
6	$f(\mathbf{C} : \sigma' : \sigma')$ anisotrope	p, $\mathbf{X}$, ε^p	$f(\mathbf{C}^* : (\sigma' - \mathbf{X}') : (\sigma' - \mathbf{X}')) - R(p)$ isotrope + cinématique + anisotrope

Notons que la distinction entre état « initial » et état « écroui » est subtile puisque tout état écroui peut éventuellement être à nouveau considéré comme état initial.

L'anisotropie introduite par l'opérateur **C** n'est pas la plus générale, elle implique seulement la rotation du critère : dans le plan principal (σ_1, σ_2) par exemple elle se traduit par un changement de l'excentricité de l'ellipse de Von Mises ou par une rotation des axes de cette ellipse (exemples fig. 16 et 22).

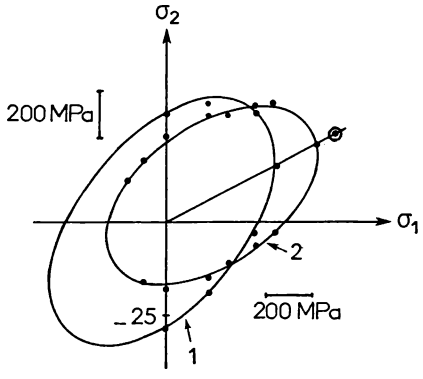


Fig. 22. Ecrouissage anisotrope (rotation de la surface) superposé à l'écrouissage cinématique (translation) et à un adoucissement isotrope (rapetissement) pour l'acier 1 Cr-$\frac{1}{2}$ Mo-$\frac{1}{4}$ V (d'après Moreton *et al.*).

L'expérience montre qu'en plus d'une rotation et d'une dilatation de la surface il peut exister une déformation de cette surface avec apparition de « coins » mais la modélisation de cette anisotropie est très complexe. On se limitera dans ce qui suit aux cas d'écrouissages isotrope et cinématique (cas 1 à 4).

4.2. Lois à écrouissage isotrope

Ce sont celles dans lesquelles l'évolution de la surface de charge est gouvernée par une seule variable scalaire : soit le travail plastique dissipé, soit la déformation plastique cumulée p, soit toute variable associée telle que la force thermodynamique R.

Ces lois s'écrivent facilement dans le contexte général de la plasticité associée et on se limite donc à l'identité entre potentiel de dissipation et fonction de charge. Pour simplifier l'écriture, ces lois sont développées en supposant la température constante, ou tout au moins en utilisant des critères indépendants de la température. La généralisation au cas non isotherme ne pose pas de problème particulier en suivant le formalisme du paragraphe 3.3.3 :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, R)\,.$$

L'hypothèse d'isotropie de l'écrouissage facilite grandement l'écriture des lois d'écoulement : que l'on utilise la déformation plastique cumulée ou le travail plastique cumulé, il est facile d'identifier le modèle d'écrouissage avec toute expression de la courbe de traction monotone. Les seules différences por-

teront soit sur le critère choisi pour la fonction de charge, soit sur l'expression de la dissipation.

La fonction de charge s'exprime sous la forme :

$$f = f_Y(\sigma) - \Gamma(R)$$

où la fonction f_Y indique la forme du critère de limite d'élasticité et la fonction Γ introduit l'écrouissage, par l'intermédiaire de la relation entre la force thermodynamique R et la variable d'écrouissage choisie (p ou w_p). Dans le cas du matériau isotrope (domaine d'élasticité initialement isotrope) la fonction f_Y fait intervenir des invariants du tenseur des contraintes.

L'écrouissage isotrope correspond à une dilatation simple du critère initial. La figure 23 indique schématiquement l'évolution du critère dans l'espace des contraintes et la courbe contrainte-déformation plastique en traction-compression. Elle montre aussi pourquoi la déformation plastique cumulée peut être employée comme variable de l'écrouissage isotrope : les points M et M' ont même état et même déformation plastique cumulée $OI + IP = OI + IP'$.

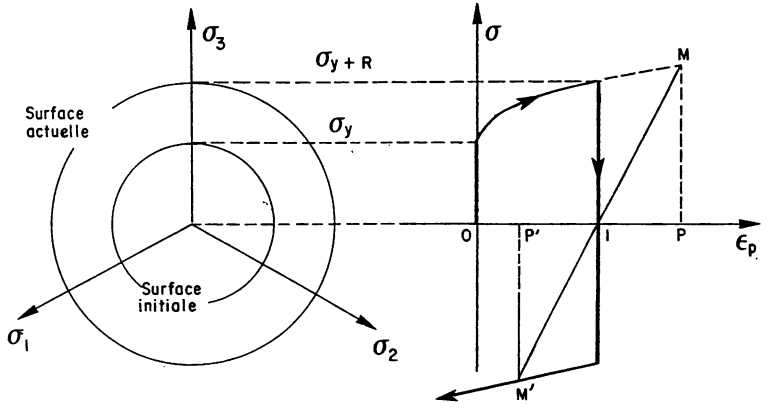


Fig. 23. Ecrouissage isotrope : représentation dans l'espace des contraintes et en traction-compression.

4.2.1. *Loi de Prandtl-Reuss*

4.2.1.1. *Formulation*

C'est une loi d'écoulement en régime élastoplastique à écrouissage isotrope ; elle est fondée sur les hypothèses suivantes :

1) Hypothèse d'incompressibilité plastique : la déformation plastique se fait à volume constant et l'écoulement ne dépend pas de la contrainte hydro-

statique $\sigma_H = \frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})$. La fonction de charge ne dépend que du déviateur des contraintes et des variables internes

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_H} = 0\,.$$

2) Hypothèse d'isotropie initiale et d'écrouissage isotrope : la fonction de charge ne dépend que des invariants J_2 et J_3 du déviateur des contraintes :

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2}\,\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'\right)^{1/2}$$
$$J_3(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{9}{2}\,\boldsymbol{\sigma}'.\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'\right)^{1/3}.$$

3) Plasticité associée et hypothèse de normalité :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\mathrm{d}p = -\,\mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial f}{\partial R}\,.$$

4) Choix de la fonction de charge de Von Mises, indépendante du troisième invariant, sous la forme :

$$f = \sigma_{eq} - R - \sigma_Y = 0$$

où σ_Y est la limite d'élasticité initiale en traction.

La loi de comportement, en fait la courbe d'écrouissage, s'exprime par la relation :

$$R = k(p) = \rho\,\frac{\partial \Psi}{\partial p}$$

avec $R(0) = k(0) = 0$.

Le traitement général décrit au paragraphe 3.3 s'applique facilement. On écrit d'abord :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2}\,\mathrm{d}\lambda\,\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}}$$

$$\mathrm{d}p = -\,\mathrm{d}\lambda\,\frac{\partial f}{\partial R} = \mathrm{d}\lambda = \left(\frac{2}{3}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p\right)^{1/2}$$

on retrouve la définition de la déformation plastique cumulée. La condition de consistance lorsqu'il y a écoulement ($\mathrm{d}f = 0$ lorsque $f = 0$) donne :

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}\sigma_{eq} - k'(p)\,\mathrm{d}p = 0$$

d'où l'on tire l'expression du multiplicateur plastique :

$$d\lambda = dp = H(f)\frac{d\sigma_{eq}}{k'(p)}$$

Pour un matériau à écrouissage positif, c'est-à-dire pour $k'(p) > 0$, il n'y a écoulement que lorsque $d\sigma_{eq}$ est positif (la contrainte équivalente augmente). Dans le cas contraire ($d\sigma_{eq} < 0$) le multiplicateur plastique doit être nul et l'on utilise le symbole $\langle \times \rangle$:

$$d\lambda = dp = H(f)\frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{k'(p)}.$$

et la loi d'écoulement s'écrit :

$$d\varepsilon^p = \frac{3}{2}H(f)\frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{k'(p)}\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}}$$

que l'on peut encore écrire en ne faisant intervenir que les contraintes avec :

$$p = k^{-1}(R) = k^{-1}(\sigma_{eq} - \sigma_Y)$$

et

$$g'(\sigma_{eq}) = [k'(k^{-1}(\sigma_{eq} - \sigma_Y))]^{-1}.$$

En tenant compte de la partition des déformations et de la loi d'élasticité isotrope la loi de Prandtl-Reuss s'écrit :

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon} &= d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ d\boldsymbol{\varepsilon}^e &= \frac{1+\nu}{E}d\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}d(\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}))\,\mathbf{1} \\ d\boldsymbol{\varepsilon}^p &= \frac{3}{2}H(f)\,g'(\sigma_{eq})\frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}}\boldsymbol{\sigma}' \end{aligned}$$

ou $$d\varepsilon^p_{ij} = \frac{3}{2}H(f)\,g'(\sigma_{eq})\frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}}\sigma'_{ij}$$

rappelons que cette expression ne s'applique que si $f = 0$, c'est-à-dire si $\sigma_{eq} - R - \sigma_Y = 0$. Si l'on néglige les déformations élastiques la relation

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{3}{2}H(f)\,g'(\sigma_{eq})\frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}}\boldsymbol{\sigma}'$$

porte le nom de relation de Levy-Mises.

4.2.1.2. *Identification*

L'expérience d'écrouissage en traction simple donne la signification des variables R, p et permet l'identification de la fonction $g(\sigma_{eq})$ de la loi de Prandtl-Reuss. Dans ce cas la seule composante non nulle du tenseur des contraintes est $\sigma_1 = \sigma$, les composantes non nulles du déviateur sont $\sigma'_{11} = \frac{2}{3}\sigma$, $\sigma'_{22} = \sigma'_{33} = -\frac{1}{3}\sigma$ et l'on retrouve $p = \varepsilon_p$ et $J_2 = \sigma_{eq} = \sigma$. La loi d'écoulement devient donc :

$$d\varepsilon^p_{11} = d\varepsilon_p = g'(\sigma)\, d\sigma .$$

La fonction $(g'(\sigma))^{-1}$ joue le rôle de module tangent de la courbe d'écrouissage :

$$\frac{1}{g'(\sigma)} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p}$$

on retrouve bien la signification de la variable R :

$$R = k(p) = \int_0^{\varepsilon} k'(\varepsilon_p)\, d\varepsilon_p = \int_{\sigma_Y}^{\sigma} \frac{1}{g'(\sigma)}\, d\varepsilon_p(\sigma) = \int_{\sigma_Y}^{\sigma} d\sigma = \sigma - \sigma_Y$$

cohérente avec l'expression de la fonction de charge en traction simple :

$$f = |\sigma| - R - \sigma_Y = 0 .$$

La figure 24 illustre cette identification, très simple dans le cas présent.

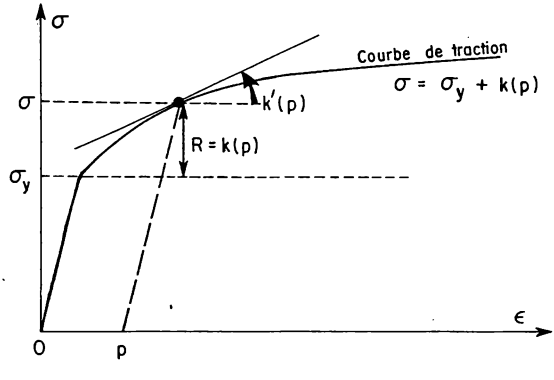


Fig. 24. Schématisation de la courbe de traction et interprétation par l'écrouissage isotrope.

Dans le cas particulier où l'on choisit pour la courbe d'écrouissage l'expression utiiisée au paragraphe 2.1.3.2 la variable R s'écrit :

$$R = \sigma_{eq} - \sigma_Y = K_Y p^{1/M_Y} = k(p)$$

soit, en dérivant :

$$k'(p) = \frac{K_Y}{M_Y} p^{\frac{1-M_Y}{M_Y}} = \frac{K_Y}{M_Y} \left(\frac{\sigma_{eq} - \sigma_Y}{K_Y} \right)^{1-M_Y} .$$

La loi de Prandtl-Reuss s'écrit alors sous l'une des deux formes suivantes :

$$d\varepsilon^p = \frac{3}{2} \frac{M_Y}{K_Y} p^{\frac{M_Y-1}{M_Y}} \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \boldsymbol{\sigma}'$$

$$\boxed{d\varepsilon^p = \frac{3}{2} \frac{M_Y}{K_Y} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y-1} \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \boldsymbol{\sigma}'}$$

ou $$d\varepsilon^p_{ij} = \frac{3}{2} \frac{M_Y}{K_Y} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y-1} \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \sigma'_{ij} .$$

Dans le cas de la traction simple, la deuxième relation par exemple redonne bien :

$$d\varepsilon_p = \frac{M_Y}{K_Y} \left\langle \frac{\sigma - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y-1} d\sigma$$

soit, en intégrant pour $\sigma \geqslant \sigma_Y$

$$\varepsilon_p = \left\langle \frac{\sigma - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y} .$$

4.2.1.3. *Cas de la plasticité parfaite*

C'est celui où il n'y a pas d'écrouissage, la variable R est nulle :

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_Y = 0 .$$

La condition de consistance $df = d\sigma_{eq} = 0$ ne permet plus d'obtenir l'expression du multiplicateur plastique $d\lambda$. On voit alors pourquoi les déformations plastiques sont indéterminées :

$$\boxed{d\varepsilon^p = \frac{3}{2} d\lambda \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} \qquad d\lambda \text{ arbitraire positif}} .$$

4.2.2. *Autres lois à écrouissage isotrope*

En utilisant toujours le moule de la « plasticité associée » combinée avec l'hypothèse de normalité généralisée, il est possible de formuler des lois

d'écrouissage isotrope plus générales que la loi de Prandtl-Reuss, en utilisant des fonctions de charge correspondant au critère de Tresca ou aux critères anisotropes décrits au paragraphe 2.2.2.

4.2.2.1. *Loi de plasticité-isotrope utilisant le critère de Tresca*

Reprenons la loi de normalité

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

et pour simplifier, étudions les composantes de $d\varepsilon^p$ dans le repère principal pour

$$\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 .$$

C'est le cas d'un régime dit de face où le point de chargement est situé sur l'une des faces du prisme à base hexagonale du critère de Tresca qui s'exprime par :

$$f = \text{Sup}\,(|\,\sigma_i - \sigma_j\,|) - \sigma_s = 0$$
$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_s = 0 .$$

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = 1 , \qquad \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0 , \qquad \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = -1$$

d'où

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda$$
$$d\varepsilon_2^p = 0$$
$$d\varepsilon_3^p = -d\lambda .$$

Dans le cas où deux composantes sont égales (par exemple $\sigma_1 = \sigma_2$), le point de chargement est sur une arête. Ce régime d'arête demande un traitement spécial pour pallier la non-unicité de la normale à la surface de charge.

On identifie le multiplicateur $d\lambda$ d'après la courbe d'écrouissage en traction simple comme pour la loi de Prandtl-Reuss :

$$d\lambda = d\dot{\varepsilon}_1^p = g'(\sigma_s)\, d\sigma_s$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_1^p &= g'(\sigma_1 - \sigma_3)\, d(\sigma_1 - \sigma_3) \\ d\varepsilon_2^p &= 0 \\ d\varepsilon_3^p &= -g'(\sigma_1 - \sigma_3)\, d(\sigma_1 - \sigma_3) \end{aligned}\right\} \text{si} \quad \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_s = 0 \quad (\text{avec } \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1) .$$

Si la courbe d'écrouissage est exprimée par $\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma}{K}\right)^M$, alors

$$g'(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{M}{K}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{K}\right)^{M-1}$$

4.2.2.2. *Loi d'écoulement isotrope utilisant des critères anisotropes*

Si le critère est exprimé sous la forme :

$$f = (\mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}') : \boldsymbol{\sigma}' - R - \sigma_Y = 0$$

on obtient la loi d'écoulement :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{H(f)}{k'(p)} \langle\, \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}' : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' \,\rangle \frac{\mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}'}{R + \sigma_Y}$$

ou, avec les notations indicielles :

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p = \frac{H(f)}{k'(p)} \langle\, C_{pqrs}\, \sigma'_{pq}\, \mathrm{d}\sigma'_{rs} \,\rangle \frac{C_{ijkl}\, \sigma'_{kl}}{R + \sigma_Y}.$$

Un tel type d'écrouissage peut être utilisé pour décrire des matériaux fortement anisotropes dans l'état initial : anisotropie d'élaboration, texture de mise en forme, matériaux composites... etc.

Comme on l'a vu au paragraphe 2.2.2.1 le critère peut être particularisé en ne faisant intervenir que six constantes qui décrivent l'état d'anisotropie du matériau. Celui-ci reste fixe au cours de l'écoulement : les directions principales d'anisotropie sont fixées.

4.3. Lois à écrouissage cinématique linéaire

4.3.1. *Ecrouissage cinématique de Prager*

4.3.1.1. *Forme générale*

L'écrouissage cinématique correspond à la translation de la surface de charge. La variable d'écrouissage $\mathbf{X}$ est de nature tensorielle : elle indique la position actuelle de la surface de charge :

$$f = f_Y(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - k\,.$$

La figure 25 montre schématiquement le mouvement de cette surface dans l'espace des contraintes et la modélisation correspondante en traction-compression dans le diagramme contrainte déformation. La valeur de la limite d'élasticité k est généralement différente de celle de σ_Y utilisé précédemment.

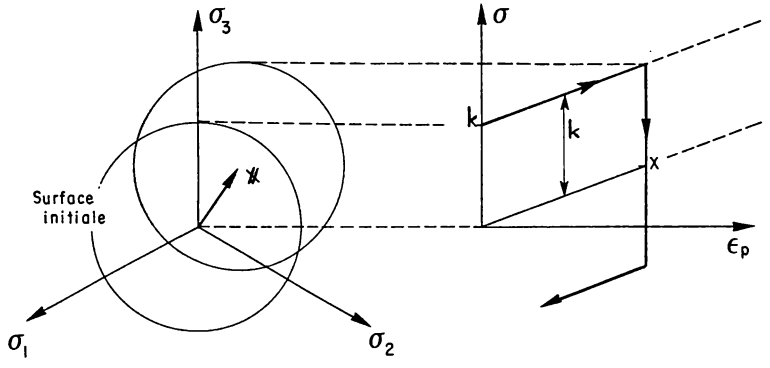


Fig. 25. Ecrouissage cinématique : représentation dans l'espace des contraintes et en traction-compression. Les échelles coïncident sur les axes σ, σ_1, σ_2, σ_3 (mais pas avec les axes du plan déviateur σ'_1, σ'_2, σ'_3).

On considère généralement l'isotropie autour de l'état neutre représenté par **X** et on suppose que les déformations plastiques s'effectuent à volume constant : dans la fonction f_Y n'interviennent que les invariants $J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})$ et $J_3(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})$ des déviateurs de $\boldsymbol{\sigma}$ et **X**. De nombreux matériaux vérifient ces hypothèses : la figure 26 montre l'exemple de l'acier 2 $\frac{1}{4}$ Cr-1 Mo.

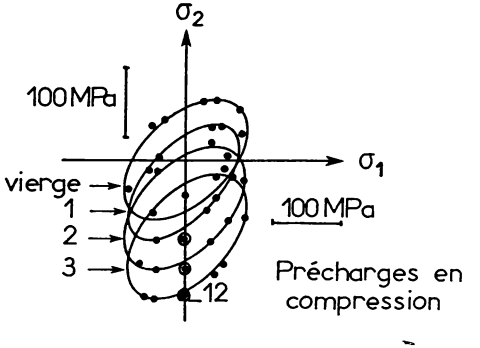


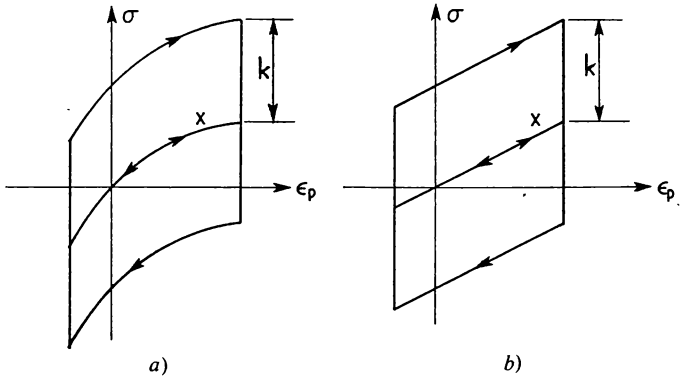
Fig. 26. Exemple d'écrouissage cinématique. Acier au 2 $\frac{1}{4}$ Cr-1 Mo (d'après Moreton *et al.*).

L'hypothèse de normalité généralisée implique l'écrouissage cinématique linéaire (la variable d'écrouissage $\boldsymbol{\alpha}$ est identique à la déformation plastique actuelle) :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$d\boldsymbol{\alpha} = - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\boldsymbol{\varepsilon}^p .$$

Il est difficile, voire impossible, d'introduire une relation non linéaire entre **X** et α elle conduirait à une non-linéarité biunivoque qui ne serait pas conforme aux observations expérimentales sous chargement cyclique (la figure 27*a* indique schématiquement quel effet de non-linéarité on obtiendrait sur un cycle de traction-compression par exemple).



a) *b*)

Fig. 27. Ecrouissage cinématique.
(*a*) Relation non linéaire entre α et **X**.
(*b*) Relation linéaire entre α et **X**.

On est donc amené à utiliser l'énergie libre spécifique sous une forme quadratique en α, ce qui donne :

$$\mathbf{X} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = C_0 \, \boldsymbol{\alpha} \, .$$

La loi d'écrouissage cinématique de Prager utilise cette schématisation :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p &= \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \mathrm{d}\mathbf{X} &= C_0 \, d\boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned}} \, .$$

La condition de consistance dans le cas où il y a écoulement plastique permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \mathrm{d}\mathbf{X} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} - C_0 \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} - C_0 \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathrm{d}\lambda = 0 \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'expression du multiplicateur plastique :

$$d\dot{\lambda} = \frac{H(f)}{C_0} \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} \right\rangle}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

L'incrément de déformation plastique s'écrit :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{H(f)}{C_0} \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} \right\rangle}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

On remarque que $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est égal à la projection de l'incrément $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{C_0}$ sur la normale à la surface de charge. En effet :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{C_0} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} \right\rangle .$$

4.3.1.2. *Cas du critère de Von Mises*

En particulier, si la surface de charge est décrite par le critère de Von Mises, la fonction f_Y ne dépend que du second invariant :

$$J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) = \left[\frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') \right]^{1/2}$$

et il est alors indifférent de prendre pour f_Y la fonction identité. On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})}$$

dont le module (norme usuelle) vaut $\sqrt{3/2}$, si bien que la normale extérieure unitaire s'exprime par :

$$\mathbf{n} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} .$$

Dans ce cas particulier, on exprime la loi d'écrouissage cinématique sous la forme :

$$d\mathbf{X} = \frac{2}{3} C \, d\boldsymbol{\varepsilon}^p$$

le multiplicateur plastique devient :

$$d\lambda = \frac{3\,H(f)}{2\,C}\,\frac{\langle (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') : d\boldsymbol{\sigma} \rangle}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})}$$

et l'incrément de déformation plastique :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{9\,H(f)}{4\,C}\left\langle \frac{(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') : d\boldsymbol{\sigma}}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} \right\rangle \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})}.$$

On peut remplacer $J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})$ par k en tenant compte à nouveau de $f = 0$. La loi complète s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{aligned} f &= J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - k \leqslant 0 \\ d\boldsymbol{\varepsilon}^p &= \frac{9\,H(f)}{4\,Ck^2} \langle (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') : d\boldsymbol{\sigma} \rangle (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') \\ d\mathbf{X} &= \frac{2}{3}\,C\,d\boldsymbol{\varepsilon}^p \end{aligned}}$$

avec les notations indicielles, on peut écrire :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{9\,H(f)}{4\,Ck^2} \langle (\sigma'_{kl} - X'_{kl})\,d\sigma_{kl} \rangle (\sigma'_{ij} - X'_{ij}).$$

4.3.1.3. *Identification*

Elle se fait à partir de la traction simple. La matrice des déformations plastiques s'écrit de façon habituelle tandis que, par homogénéité avec le déviateur des contraintes, on note la matrice des contraintes internes sous la forme :

$$[\dot{X}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}X & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}X \end{bmatrix}.$$

Le critère et les équations d'écoulement se mettent sous la forme :

$$f = |\,\sigma - X\,| - k = 0$$

$$d\varepsilon_{11}^p = d\varepsilon_p = \frac{1}{C}\langle d\sigma \rangle$$

ce qui permet de vérifier que le module d'écrouissage est constant et égal à C,

comme pourrait le montrer directement la relation $dX = C\,d\varepsilon_p$ illustrée sur la figure 27*b*. A chaque instant on peut évidemment écrire :

$$\sigma = X \pm k = C\varepsilon_p \pm k$$

+ ou − selon le sens de l'écoulement.

Dans son principe, la détermination de la loi d'écrouissage cinématique d'un matériau donné est particulièrement simple. Dans la pratique, le choix de la meilleure droite permettant de décrire correctement la courbe de traction dépend du domaine d'application envisagé et donc du domaine de déformation concerné (fig. 28). Une règle simple, permettant la définition d'une loi à partir de caractéristiques généralement connues pour chaque matériau, consiste à utiliser la limite d'élasticité à 0,2 ‰, la contrainte de rupture et l'allongement à rupture :

$$C \simeq \frac{\sigma_u - \sigma_Y}{\varepsilon_u}.$$

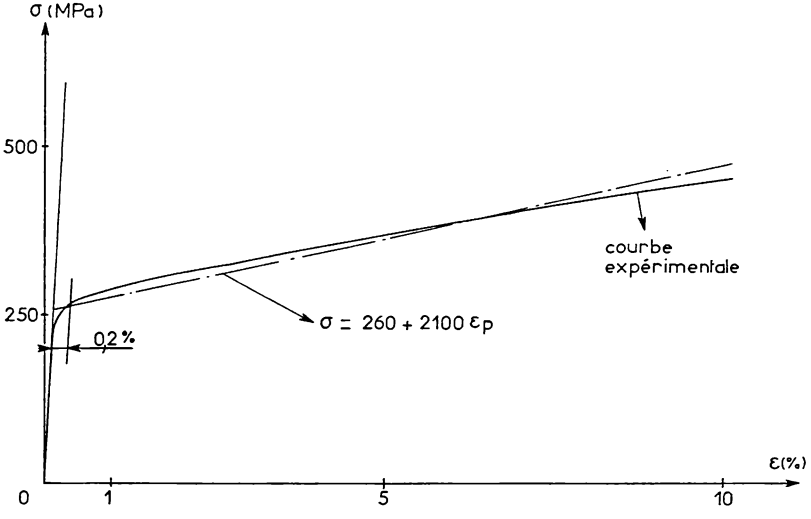


Fig. 28. Identification de l'écrouissage cinématique linéaire en traction. Acier inoxydable A316.

La linéarité de la loi d'écrouissage présente l'avantage de rendre les algorithmes de calculs numériques de structures plus stables et moins coûteux. Par contre, si dans le cas de chargements cycliques l'effet Bauschinger est qualitativement représenté, les effets de rochet ne sont pas décrits. Pour tout chargement cyclique il existe un cycle stabilisé sans déformation progressive comme l'indiquent schématiquement la figure 29 pour la traction-compression et la figure 30 pour la torsion cyclique sous traction constante. Dans ce dernier

cas, tant que la déformation plastique $\varepsilon_{p_{11}}$ augmente, il y a déplacement de la surface dans la direction de σ_{11}. La stabilisation intervient lorsque $X_{11} = \sigma_{11}$, c'est-à-dire lorsque la normale à la surface est dirigée suivant σ_{12}.

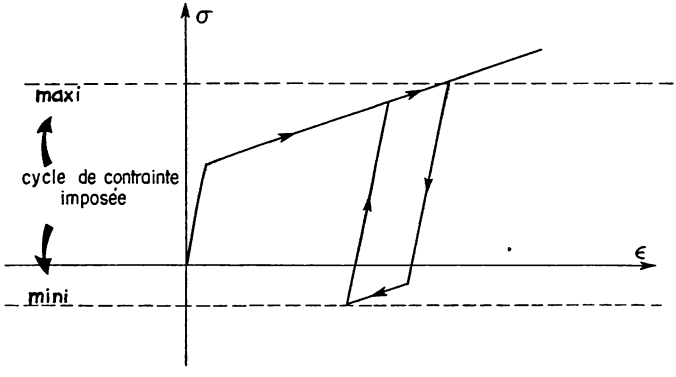


Fig. 29. Accommodation immédiate du modèle cinématique linéaire en traction-compression.

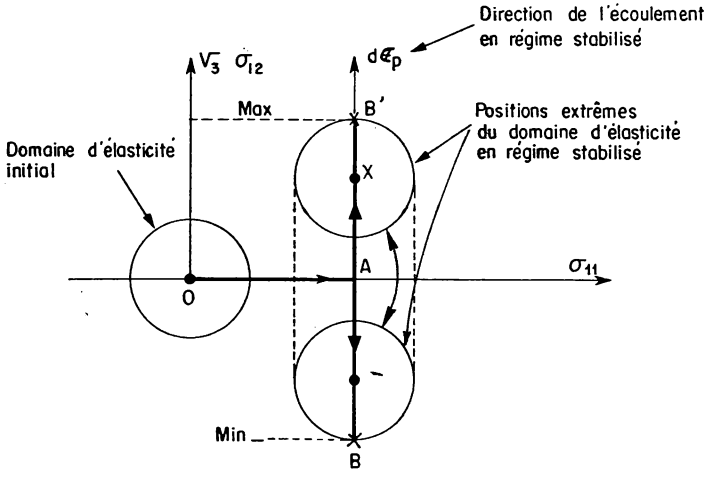


Fig. 30. Accommodation progressive du modèle cinématique linéaire en torsion cyclique sous traction constante.

4.3.2. *Loi de Prager-Ziegler et formulations plus générales*

La modification de Ziegler n'entre pas dans le cadre de l'hypothèse de normalité généralisée et consiste à remplacer la loi d'écrouissage par :

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})\,\mathrm{d}\mu\,.$$

L'emploi du tenseur $(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})$ à la place de son déviateur permet de rendre compte de l'influence d'une contrainte hydrostatique sur l'évolution de la variable interne cinématique. Sous chargement complexe on obtient donc des écoulements différents de ceux du modèle de Prager mais les deux formulations sont identiques dans le cas de l'incompressibilité plastique. Le multiplicateur $\mathrm{d}\mu$ est déterminé par la condition de consistance $\mathrm{d}f = 0$

$$\mathrm{d}\mu = H(f)\,\frac{\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \right\rangle}{(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

et le multiplicateur plastique $\mathrm{d}\lambda$ peut prendre une valeur quelconque fonction par exemple des invariants de $\boldsymbol{\sigma}$ ou de $\mathbf{X}$, ce qui permet d'introduire un écrouissage cinématique non linéaire en écrivant par exemple :

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{H(f)}{C(\boldsymbol{\sigma})}\,\frac{\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \right\rangle}{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

qui exprime, là encore, que la quantité $C(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p$ représente la projection de $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ sur la normale à la surface de charge ; c'est aussi la projection de $\mathrm{d}\mathbf{X}$ sur la normale (voir fig. 31). Le choix de la fonction $C(\boldsymbol{\sigma})$ qui donne l'évolution du module d'écrouissage et permet donc un écoulement non linéaire pose quelques problèmes et conduit à un comportement anormal pour certains chargements cycliques.

L'écrouissage cinématique peut intervenir pour un matériau présentant déjà une anisotropie du domaine d'élasticité. Supposons que celui-ci s'exprime sous la forme :

$$f = f_Y(\mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}') - k = 0\,.$$

Un écrouissage cinématique, conservant les directions principales d'anisotropie, peut être défini simplement en utilisant :

$$f = f_Y(\mathbf{C} : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}')) - k = 0\,.$$

Le traitement général déjà évoqué plusieurs fois peut être employé pour déter-

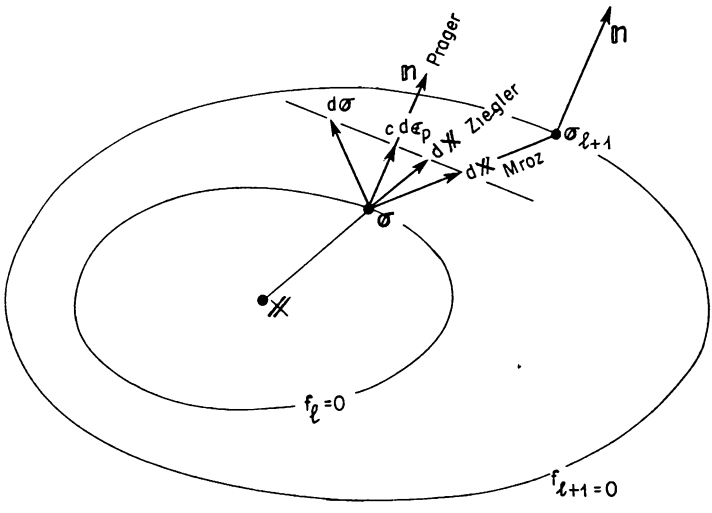


Fig. 31. Différents types d'écrouissage cinématique.

miner explicitement le multiplicateur plastique $d\lambda$ de la loi d'écoulement qui s'exprime par :

$$d\varepsilon^p = f'_Y \mathbf{C} : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}')\, d\lambda$$

$$d\mathbf{X} = C f'_Y \mathbf{C} : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}')\, d\lambda .$$

Une telle théorie, conduisant déjà à des développements plus complexes, ne permet pas de faire évoluer le taux d'anisotropie (ou les axes principaux d'anisotropie) en fonction de l'écrouissage.

4.4. Lois d'écoulement en chargements cyclique ou quelconque

La combinaison d'un écrouissage isotrope et d'un écrouissage cinématique linéaire est largement suffisante pour tous les cas où le chargement étudié est quasi monotone et fait intervenir des variations de contraintes presque proportionnelles (chargement quasi radial). Au contraire, en cas de chargements cycliques, ces théories simples de l'écrouissage sont insuffisantes.

On a vu au paragraphe 4.3.1 que l'écrouissage cinématique linéaire ne permettait pas de décrire correctement les effets de rochet : il ne décrit pas non plus l'effet de relaxation de la contrainte moyenne ; de plus il ne donne qu'une description sommaire de l'effet Bauschinger et des boucles d'hystérésis. Quant à l'écrouissage isotrope, les seuls cycles stabilisés auxquels il peut conduire à contrainte imposée sont complètement adaptés, sans écoulement plastique

(droite CC' sur la figure 32) ; en déformation imposée, la stabilisation se produit suivant un cycle « parfaitement plastique » (parallélogramme $ABA'B'$ de la figure 32).

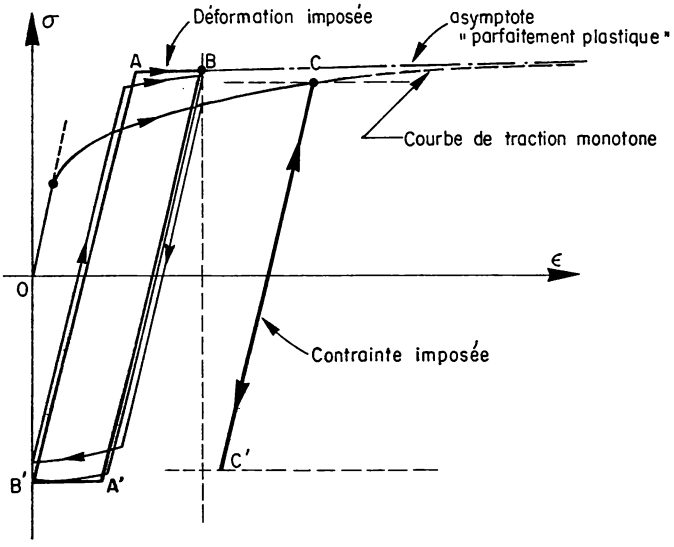


Fig. 32. Comportement cyclique avec un modèle à écrouissage isotrope.

La combinaison de l'écrouissage cinématique linéaire et de l'écrouissage isotrope permet de rendre compte d'un certain durcissement cyclique mais ne lève pas les inconvénients signalés ci-dessus. En particulier, en régime stabilisé l'influence de l'écrouissage isotrope doit disparaître et l'on retrouve un cycle d'hystérésis à écrouissage cinématique linéaire (parallélogrammes des figures 27 et 29).

Le but de ce paragraphe est de montrer différents moyens permettant d'améliorer cette combinaison, en introduisant une non-linéarité de l'écrouissage cinématique.

4.4.1. *Modélisations avec réactualisation des coefficients caractéristiques*

Ce sont celles qui découlent directement des modèles unidimensionnels généralisés par l'écrouissage isotrope, c'est-à-dire sans introduction de la variable tensorielle liée à l'écrouissage cinématique. L'idée générale est d'utiliser les maximums de contrainte (points de charge-décharge) comme points particuliers du chargement : à chaque point on réactualise les coefficients

caractéristiques d'une loi d'écrouissage isotrope, par exemple la relation de Ramberg-Osgood déjà développée au paragraphe 2.1.2 :

$$\sigma = \sigma_Y + K_Y \varepsilon_p^{1/M_Y}.$$

En traction-compression par exemple, avec les notations de la figure 33, on écrit au cycle n $\left(\text{pouvant prendre les valeurs } \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ..., k, \frac{2k+1}{2}, ...\right)$:

$$\sigma = \sigma_n + (-1)^{2n+1} (2\,\sigma_{Yn} + K_n \mid \varepsilon_p - \varepsilon_{pn} \mid^{1/M_n})$$

où les coefficients caractéristiques du cycle n (σ_{Yn}, K_n, M_n) dépendent de l'histoire du chargement, par exemple de la déformation plastique cumulée, et de l'état actuel au début du cycle, c'est-à-dire de σ_n et ε_{pn} :

$$\sigma_{Yn} = F_Y(p, \sigma_n, \varepsilon_{pn})$$
$$K_n = F_K(p, \sigma_n, \varepsilon_{pn})$$
$$M_n = F_M(p, \sigma_n, \varepsilon_{pn}).$$

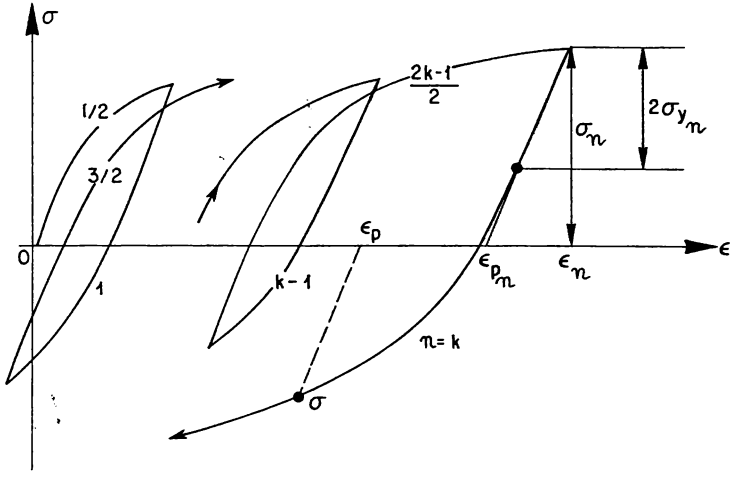


Fig. 33. Modèle de comportement cyclique avec réactualisation des coefficients caractéristiques.

On voit que ce type de modèle revient à prendre comme variables internes, en plus de la déformation plastique cumulée, des valeurs particulières des états de contrainte ou de déformation : en fait on introduit ainsi des variables de mémoire discrète de chaque pic de contrainte, ce qui peut effectivement s'incorporer dans le formalisme de la thermodynamique avec variables internes.

Des difficultés supplémentaires apparaissent lorsque l'on envisage des chargements quelconques, même dans le cas de la traction-compression : il est ainsi nécessaire de mémoriser de nombreux états antérieurs et de définir une règle permettant de contrôler la fermeture de chaque boucle d'hystérésis et d'assurer le retour sur la précédente comme le montre schématiquement la figure 34.

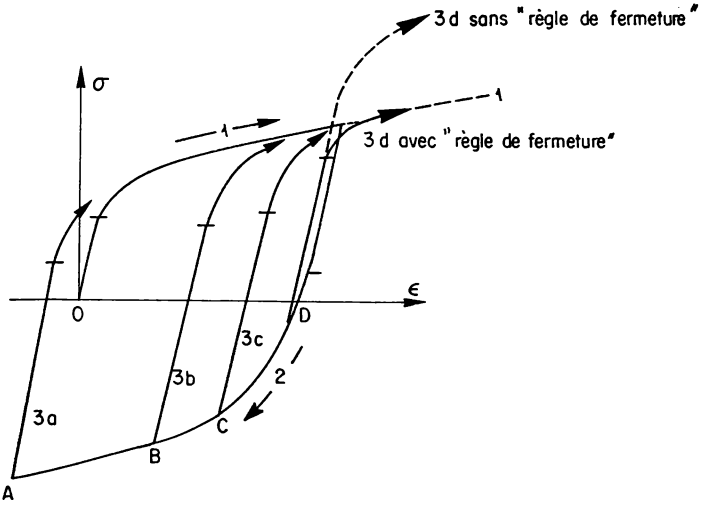


Fig. 34. Le problème de la « fermeture » du cycle avec les modèles à réactualisation.

En traction-compression (ou en chargement simple) cet algorithme se prête assez bien aux calculs sur ordinateur mais le cas des chargements non proportionnels nécessite des développements beaucoup plus complexes. De plus dans une telle théorie les points de charge-décharge jouent un rôle crucial : que se passe-t-il alors dans le cas où les cycles se produisent sans décharge comme pour le chargement « en spirale » imaginé sur la figure 35 ?

Il est à noter cependant que ces concepts ont été développés par divers auteurs, y compris dans le domaine de la viscoplasticité, et que les modèles et les algorithmes correspondants sont introduits dans plusieurs codes de calcul de structures.

4.4.2. *Modèles multicouches et formulation de Mroz*

L'écrouissage cinématique correspond en général aux contraintes internes provoquées dans le polycristal par les incompatibilités des déformations plastiques locales d'un grain à l'autre. Il est alors très naturel de chercher à améliorer l'écrouissage linéaire de Prager en superposant plusieurs modèles élé-

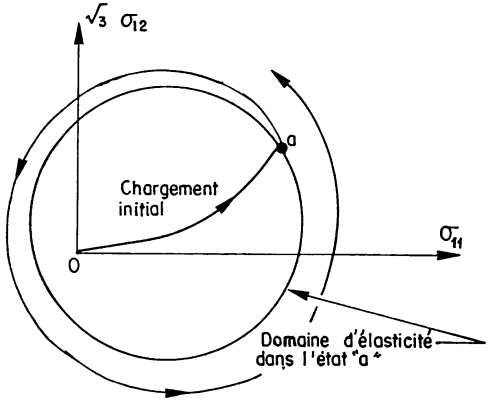


Fig. 35. Problème de la définition du cycle avec les modèles à réactualisation.

mentaires correspondant à plusieurs grains : c'est le modèle multicouche. Des travaux en ce sens ont été menés depuis longtemps et développés par différentes voies. On a vu au chapitre 3 un exemple d'une telle approche avec le modèle de Saint-Venant généralisé : un assemblage d'éléments parfaitement élasto-plastiques, de modules et de seuils différents, permet de rendre compte d'un écrouissage cinématique non linéaire. De plus (cf. fig. 31 du chap. 3) la concavité des courbes en traction et compression est correctement respectée, ainsi que l'approximation de Masing qui correspond à l'homothétie de facteur 2 entre chaque boucle d'hystérésis et la courbe de chargement monotone. Un tel modèle peut évidemment être généralisé en introduisant un écrouissage isotrope et (ou) cinématique linéaire pour chacun des éléments.

La formulation de Mroz est une généralisation du modèle multicouche au cas tridimensionnel. Elle considère un certain nombre de surfaces dans l'espace des contraintes, « emboîtées » les unes dans les autres, dont les transformations peuvent être cinématiques (linéaires) et (ou) isotropes. En notant $\mathbf{X}_l$ et R_l le centre actuel et la dimension actuelle de la surface n° l (voir fig. 36), et en supposant qu'elle obéit au critère de Von Mises, on écrit :

$$f_l = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}_l) - R_l = 0\,.$$

En partant d'un état de contrainte situé dans le domaine élastique (la plus petite surface), on va avoir écoulement successivement avec chaque surface. A chaque surface est associé un module d'écrouissage différent ce qui permet de retrouver les conditions du modèle multicouche. La dernière surface rencontrée (en charge) est la surface active et l'écoulement est supposé normal :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\,.$$

Il n'y a pas d'écoulement ($\mathrm{d}\lambda = 0$) lorsque l'état des contraintes est à l'intérieur de la plus petite surface : $f_l < \cdots < f_1 < f_0 < 0$. Dans ce qui suit on

suppose qu'il y a écoulement, avec $f_l = 0$. La cohérence de l'approche impose que les surfaces $f_j = 0$ pour $j < l$ « suivent » la contrainte appliquée. On a ainsi implicitement :

$$f_0 = f_1 = \cdots = f_{l-1} = f_l = 0$$

$$\mathrm{d}\varepsilon^p = \mathrm{d}\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} = \cdots = \mathrm{d}\lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \sigma}.$$

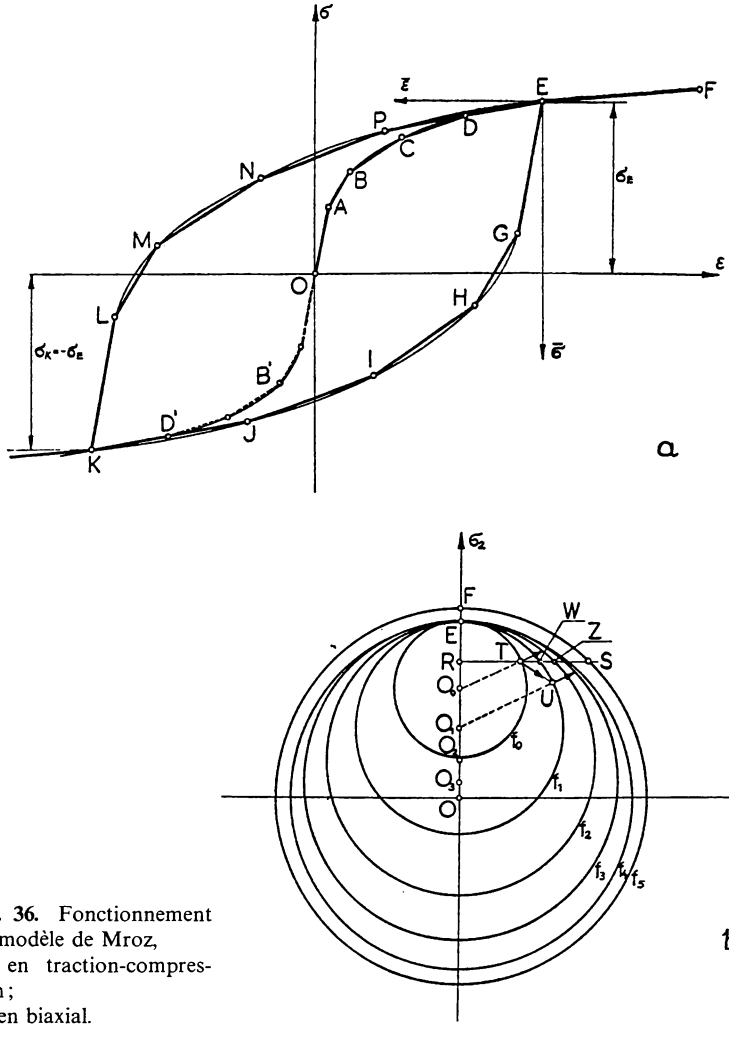


Fig. 36. Fonctionnement du modèle de Mroz,
(*a*) en traction-compression ;
(*b*) en biaxial.

Cela impose que les normales aux différentes surfaces au point de contrainte appliquée soient identiques et que les multiplicateurs plastiques soient égaux : $d\lambda_0 = \cdots = d\lambda_l = d\lambda$. On en déduit aussi (conditions de consistance $df_0 = \cdots = df_l = 0$) que les mouvements des centres sont identiques :

$$d\mathbf{X}_0 = \cdots = d\mathbf{X}_{l-1} = d\mathbf{X}_l .$$

Par contre l'écoulement, donc l'écrouissage, entre l'état de contrainte actuel (sur la surface l) et la surface suivante $f_{l+1} = 0$, doivent intervenir de telle façon que les surfaces se rencontrent uniquement au point de contrainte appliquée, avec des normales identiques. Dans ce but Mroz définit la règle suivante : l'écrouissage cinématique se produit dans la direction $\boldsymbol{\sigma}_{l+1} - \boldsymbol{\sigma}$, où $\boldsymbol{\sigma}_{l+1}$ est la contrainte sur la surface $l + 1$ telle que la normale en ce point soit identique à la normale à la surface l au point de contrainte actuel $\boldsymbol{\sigma}$. La figure 31 illustre cette hypothèse d'écrouissage qui se traduit sous l'une des formes suivantes :

$$d\mathbf{X}_l = [(R_{l+1} - R_l)\,\boldsymbol{\sigma} - (R_{l+1}\,\mathbf{X}_l - R_l\,\mathbf{X}_{l+1})]\,\frac{d\mu}{R_l}$$

ou

$$\boxed{d\mathbf{X}_l = (\boldsymbol{\sigma}_{l+1} - \boldsymbol{\sigma})\,d\mu}$$

$d\mu$ est un multiplicateur dont la valeur est déterminée par la condition de consistance $df_l = 0$:

$$d\mu = H(f_l)\,\frac{\langle (\partial f_l/\partial \boldsymbol{\sigma}) : d\boldsymbol{\sigma} \rangle}{\partial f_l/\partial \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\sigma}_{l+1} - \boldsymbol{\sigma})} .$$

Le multiplicateur $d\lambda$ de la relation d'écoulement peut être une fonction quelconque de $\boldsymbol{\sigma}$ ou $\mathbf{X}_l$, obéissant à la relation :

$$d\lambda = \frac{H(f_l)}{C_l(\boldsymbol{\sigma})}\,\frac{\left\langle \dfrac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} \right\rangle}{\dfrac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dfrac{\partial f_l}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

qui indique que la quantité $C_l\,d\varepsilon^p$ est la projection de $d\boldsymbol{\sigma}$ sur la surface normale à la surface $f_l = 0$. Comme dans la formulation de Ziegler le module d'écrouissage peut dépendre de $\boldsymbol{\sigma}$, ou ce qui revient au même, de $\mathbf{X}_l$. Les inconvénients déjà signalés font que l'on utilise plutôt une valeur constante.

4.4.3. *Lois à écrouissage cinématique non linéaire*

Dans ce paragraphe on se limite à l'emploi du critère de Von Mises et d'une fonction f_Y linéaire de l'invariant J_2. La généralisation à un autre type de

matériau ne pose aucun problème, aussi bien pour l'aspect critère que pour l'aspect incompressibilité plastique.

4.4.3.1. *Formulation*

Le critère de plasticité s'exprime toujours sous la forme suivante :

$$f = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - k\,.$$

L'inconvénient de la loi de Prager (proportionnalité entre $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et $\mathrm{d}\mathbf{X}$) est levé par un terme de rappel introduisant un effet de mémoire évanescente du trajet de déformation :

$$\boxed{\mathrm{d}\mathbf{X} = \tfrac{2}{3}\, C\, \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p - \gamma \mathbf{X}\, \mathrm{d}p}$$

où $\mathrm{d}p$ est l'incrément de déformation plastique cumulée, C et γ étant des coefficients caractéristiques de chaque matériau. On suppose généralement que le tenseur $\mathbf{X}$ est nul dans l'état initial. Les autres éléments de la théorie de plasticité ne sont pas modifiés. L'hypothèse de normalité et la condition de consistance $\mathrm{d}f = 0$ conduisent à l'expression :

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{H(f)}{h} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

où le module d'écrouissage h dépend maintenant de la contrainte cinématique :

$$h = \frac{2}{3} C \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \gamma \mathbf{X} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{2}{3} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{1/2}.$$

Dans le cas du critère de Von Mises, on a $\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}p$ et le module d'écrouissage devient :

$$\boxed{h = C - \frac{3}{2} \gamma \mathbf{X} : \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{k}}\,.$$

Il est clair que lorsque l'écrouissage cinématique (représenté par $\mathbf{X}$) augmente, le module d'écrouissage diminue : cela se voit encore plus facilement en traction-compression où le module d'écrouissage s'exprime (voir paragraphe suivant) par

$$h = C - \gamma X \operatorname{Sgn}(\sigma - X)\,.$$

En traction pure par exemple cette diminution du module d'écrouissage induit une concavité de la courbe de traction-compression dirigée vers le bas.

En compression la concavité est dirigée vers le haut. On élimine ainsi deux des inconvénients de la loi de Prager : la linéarité et la dépendance biunivoque entre l'écrouissage et la déformation plastique (Fig. 37). Pour incorporer cette modélisation cinématique non linéaire dans le moule général du paragraphe 3.3.2 (normalité généralisée), il faut abandonner la plasticité associée et choisir un potentiel d'écoulement F différent de l'expression de la surface de charge f. Ici on prend :

$$F = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) + \frac{3\gamma}{4C}\mathbf{X} : \mathbf{X} - k = f + \frac{3\gamma}{4C}\mathbf{X} : \mathbf{X}.$$

L'hypothèse de dissipativité normale donne alors (cas particulier d'un matériau type Von Mises) :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}\lambda = \frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2}\mathrm{d}p$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{3}{2}\frac{\gamma}{C}\mathbf{X}\,\mathrm{d}p.$$

En utilisant le même potentiel thermodynamique que pour la loi de Prager on retrouve bien :

$$\mathbf{X} = \rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{3}C\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = \frac{2}{3}C\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = \frac{2}{3}C\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p - \gamma\mathbf{X}\,\mathrm{d}p.$$

Lorsqu'il y a écoulement ($f = 0$) le potentiel de dissipation n'est pas nul, sauf sous la condition $\mathbf{X} = 0$:

$$F = \frac{3\gamma}{4C}\mathbf{X} : \mathbf{X}.$$

Ce potentiel est toujours compris entre 0 et $\frac{C}{2\gamma}$, comme on peut le vérifier facilement en calculant la valeur maximale du module $J_2(\mathbf{X})$ de $\mathbf{X}$, lorsque $\mathrm{d}\mathbf{X} = 0$, avec :

$$J_2(\mathbf{X}) = \left(\frac{3}{2}\mathbf{X}' : \mathbf{X}'\right)^{1/2} \leqslant \frac{C}{\gamma}.$$

Notons que sous la condition initiale $\mathbf{X}(0) = 0$ l'équation d'évolution de $\mathbf{X}$ implique, à cause de l'incompressibilité de la déformation plastique, que $\mathbf{X}$ soit un déviateur : $\mathbf{X}' = \mathbf{X}$.

4.4.3.2. *Cas de la traction-compression*

Les tenseurs s'expriment comme dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire (§ 4.3.1.3). Le critère et les équations d'écoulement et d'écrouissage se mettent sous la forme :

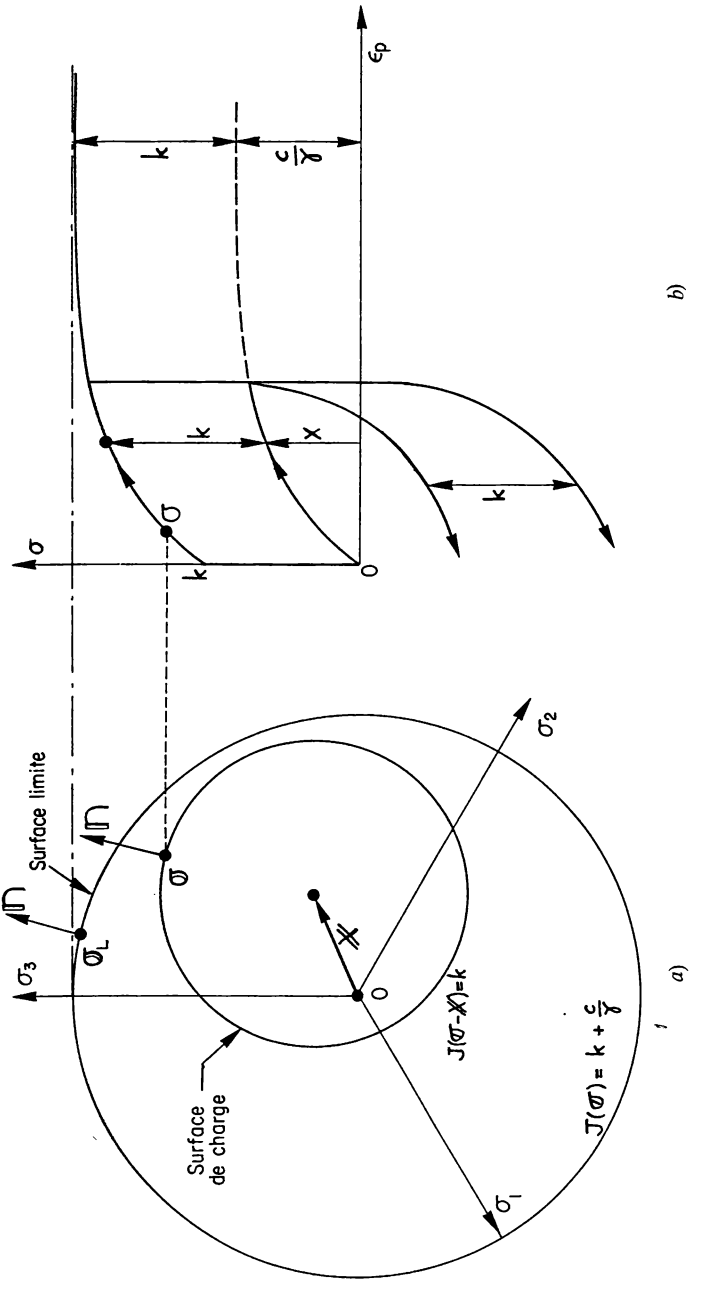


Fig. 37. Modèle d'écrouissage cinématique non linéaire :
(*a*) tridimensionnel,
(*b*) traction-compression.

$$f = |\sigma - X| - k = 0$$

$$d\varepsilon_p = \frac{1}{h}\left\langle \frac{\sigma - X}{k} d\sigma \right\rangle \frac{\sigma - X}{k} = \frac{d\sigma}{h} \qquad \text{si} \quad (\sigma - X)\, d\sigma > 0$$

$$dX = C\, d\varepsilon_p - \gamma X\, |d\varepsilon_p|$$

$$h = C - \gamma X \operatorname{Sgn}(\sigma - X)$$

En traction-compression et, plus généralement, en chargement proportionnel, l'équation d'évolution de l'écrouissage peut s'intégrer analytiquement, pour donner :

$$X = v\frac{C}{\gamma} + \left(X_0 - v\frac{C}{\gamma}\right)\exp[-v\gamma(\varepsilon_p - \varepsilon_{p0})]$$

$v = \pm 1$ selon le sens de l'écoulement. ε_{p0} et X_0 désignent les valeurs initiales, par exemple en début de chaque alternance.

Remarquons bien qu'il n'est pas nécessaire ici d'utiliser un procédé de réactualisation des variables : l'état (ε_{p0}, X_0) résulte de l'écoulement antérieur, toujours traduit par la même équation d'évolution. A chaque instant la contrainte s'exprime par :

$$\sigma = X + vk$$

comme illustré sur la figure 37*b*.

4.4.3.3. *Propriétés*

Une des premières caractéristiques à noter est que ce modèle cinématique non linéaire correspond à une formulation de plasticité classique avec deux surfaces :

— la surface limite d'élasticité, confondue avec la surface de charge,

— une surface limite induite par la dernière propriété évoquée au paragraphe ci-dessus, sur la valeur limite du module $J_2(\mathbf{X})$ de la variable cinématique $\mathbf{X}$. Il est facile de vérifier que cette condition implique :

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X} + \mathbf{X}) \leqslant J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) + J_2(\mathbf{X}) = k + J_2(\mathbf{X})$$

d'où $\quad J_2(\boldsymbol{\sigma}) \leqslant k + \dfrac{C}{\gamma}.$

Cette propriété est facilement illustrée sur la figure 37 où sont représentées la situation tridimensionnelle dans le plan du déviateur des contraintes et la modélisation correspondante dans le diagramme contrainte-déformation. A la différence des théories qui postulent à priori l'existence de cette surface limite, celle-ci découle ici de façon directe du choix de la loi d'évolution cinématique.

Une seconde propriété intéressante du modèle d'écrouissage cinématique non linéaire est qu'il obéit aux hypothèses de base de la formulation de Mroz : c'est un modèle de Mroz particulier, à deux surfaces, mais à évolution continue du module d'écrouissage.

Notons $\boldsymbol{\sigma}_L$ l'état de contrainte sur la surface limite correspondant à la même normale extérieure $\mathbf{n}$ que la direction de l'écoulement plastique au point $\boldsymbol{\sigma}$. Dans le modèle cinématique non linéaire la surface limite n'a pas de mouvement cinématique. On a donc :

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}'_L}{k + \dfrac{C}{\gamma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{k}.$$

En remplaçant $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p$ dans la loi d'évolution de $\mathbf{X}$ on obtient :

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = \left(C \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{k} - \gamma \mathbf{X}' \right) \mathrm{d}p .$$

Soit en combinant ces deux expressions :

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = \gamma(\boldsymbol{\sigma}'_L - \boldsymbol{\sigma}')\, \mathrm{d}p .$$

Cette dernière relation est identique à l'hypothèse de Mroz (§ 4.4.2) pour un critère de type Von Mises. La différence essentielle vient du multiplicateur plastique qui est choisi constant dans la théorie de Mroz. L'avantage de la présente formulation tient donc au fait qu'avec deux surfaces seulement on peut décrire la non-linéarité de l'écrouissage et ceci de façon continue.

L'existence d'une surface limite permet la description des effets de rochet, que ce soit en traction-compression (contrainte non symétrique) ou en traction-torsion (traction constante et torsion cyclique). La figure 38 montre comment ces effets se traduisent. On notera que la courbe $X(\varepsilon_p)$ est définie à une translation près (ε_{p_0}) à partir de la valeur X_0 (le modèle est insensible à la déformation moyenne). Plusieurs conséquences en découlent :

— à contrainte imposée la réponse du modèle est stabilisée après un seul cycle,

— la stabilisation cyclique n'est possible que pour une contrainte symétrique (sinon il y a rochet) (fig. 38*a*),

— la relation au cycle stabilisé entre amplitude de contrainte et de déformation plastique s'obtient facilement après intégration sur les deux demi-cycles de traction et compression :

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = X_M + k = \frac{C}{\gamma} \operatorname{th}\left(\gamma \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \right) + k$$

— à déformation contrôlée, lorsque la déformation moyenne est non nulle, la dissymétrie initiale des contraintes disparaît progressivement : c'est l'effet de relaxation de la contrainte moyenne, observée sur de nombreux matériaux

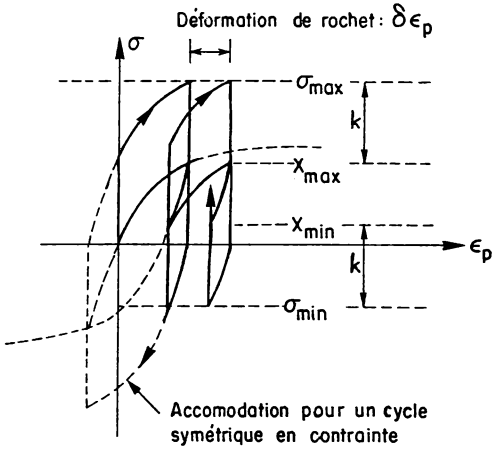


Fig. 38. (*a*). Rochet en traction-compression.

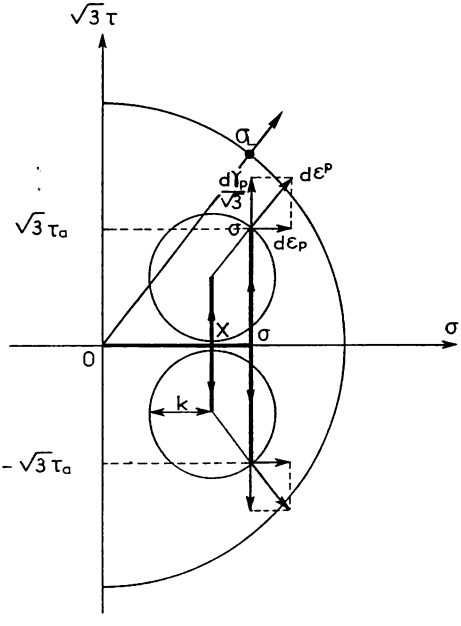


Fig. 38. (*b*). Rochet en traction-torsion.

(fig. 39). Dans ce cas cependant la stabilisation est plus lente qu'à contrainte imposée,

— la déformation progressive (rochet) se produit en traction-compression à contrainte imposée dès que la contrainte moyenne est non nulle (et que la variation de contrainte $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$ est supérieure à $2\,k$). On démontre facilement que cette déformation progressive par cycle s'exprime par :

$$\delta\varepsilon_p = \frac{1}{\gamma}\log\left(\frac{\left(\frac{C}{\gamma}\right)^2 - (\sigma_{\min} + k)^2}{\left(\frac{C}{\gamma}\right)^2 - (\sigma_{\max} - k)^2}\right)$$

à contrainte maximale imposée, le rochet est maximal lorsque $\sigma_{\min} = -k$ (voir fig. 38*a*).

Revenons à l'effet de rochet en traction-torsion (fig. 38*b*) sous une traction constante et une torsion alternée d'amplitude τ_a. Sachant que la stabilisation implique $dX_{11} = 0$, on peut démontrer :

— que suivant les valeurs relatives de σ et τ_a on aura adaptation (plus d'écoulement) ou rochet dans la direction de traction (déformation progressive), si :

$$\tau_a\sqrt{3} > \frac{k}{k + \frac{C}{\gamma}}\left[\left(k + \frac{C}{\gamma}\right)^2 - \sigma^2\right]^{1/2};$$

— que la déformation de rochet par cycle est proportionnelle à l'amplitude de la déformation de cisaillement, le facteur de proportionnalité dépendant de la contrainte de traction et de la dimension de la surface limite

$$\delta\varepsilon_p = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\sigma}{\left[\left(k + \frac{C}{\gamma}\right)^2 - \sigma^2\right]^{1/2}}\Delta\varepsilon_{12}^p .$$

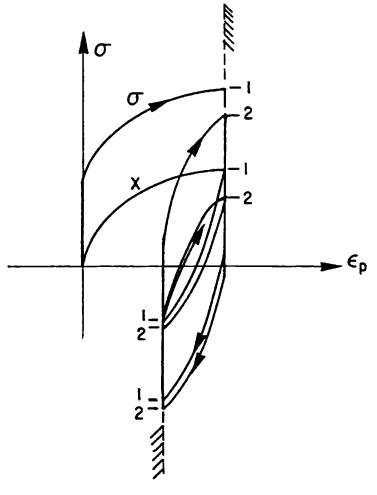


Fig. 39. Relaxation de la contrainte moyenne.

4.4.3.4. *Identification*

L'identification des coefficients caractéristiques du matériau, k, C, γ, se fait en traction-compression à partir des boucles d'hystérésis stabilisées (ce modèle correspond au régime stabilisé), correspondant à des amplitudes de déformation différentes. On peut employer des méthodes numériques (voir chap. 3) ou procéder par ajustements graphiques :

1) déterminer k approximativement par le domaine élastique. Ce seuil d'écoulement est supérieur à σ_Y car le module d'écrouissage initial C n'est pas infini ;

2) déterminer $\frac{C}{\gamma}$ comme valeur asymptotique des mesures $\frac{\Delta\sigma}{2} - k$ lorsque $\Delta\varepsilon$ augmente ;

3) déterminer le coefficient C par lissage de ces valeurs à partir de la relation établie au paragraphe précédent :

$$\frac{\Delta\sigma}{2} - k = \frac{C}{\gamma} \operatorname{Th}\left(\gamma \frac{\Delta\varepsilon_p}{2}\right).$$

Les figures 40 et 41 montrent un exemple d'identification réalisée à partir de trois cycles stabilisés sur l'alliage INCO 718 à 550 °C. Le matériau est considéré comme plastique et les chargements effectués à amplitude de déformation plastique imposée. La figure 40 permet la détermination de k à partir des boucles expérimentales. La figure 41 illustre la détermination des coefficients C et γ. Les boucles calculées avec les coefficients trouvés (k = 520 MPa, C = 140 600 MPa, γ = 380) sont reportées sur la figure 40.

4.4.3.5. *Tableau de caractéristiques de plasticité cyclique*

On donne ci-dessous pour quelques matériaux les coefficients du modèle cinématique non linéaire décrivant le comportement au cycle stabilisé.

Matériau	Température	k MPa	C MPa	γ
Acier 316 L	20 °C	300	30 000	60
Alliage INCO 718	550 °C	520	140 600	380
Alliage TA 6 V	350 °C	310	131 000	570
Cobalt VO 795	20 °C	85	142 000	400
Acier de construction	20 °C	225	280 000	1 300
Alliage NIMONIC 90	20 °C	505	666 000	1 800
Alliage TiAl 6 V 4	20 °C	260	560 000	1 000
Acier 35 NCD 16	20 °C	980	228 000	300

Les courbes cycliques calculées et mesurées de quelques matériaux du tableau sont montrées sur la figure 42.

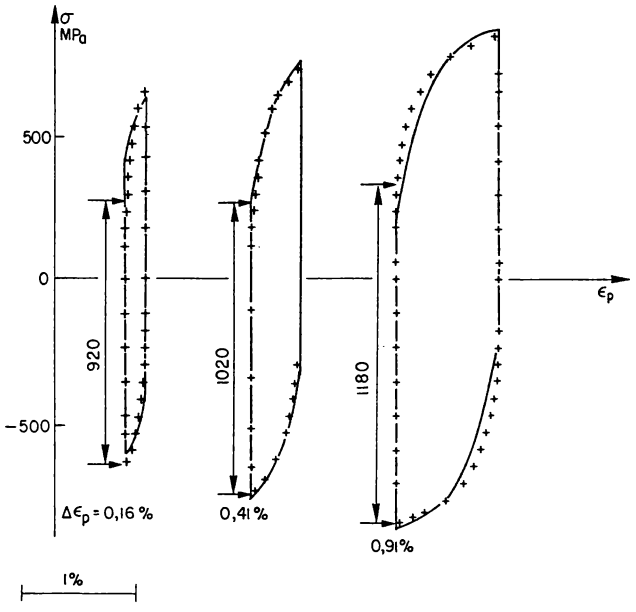


Fig. 40. Identification du coefficient k d'après les boucles expérimentales et vérification du modèle. Alliage INCO 718, T = 550 °C.

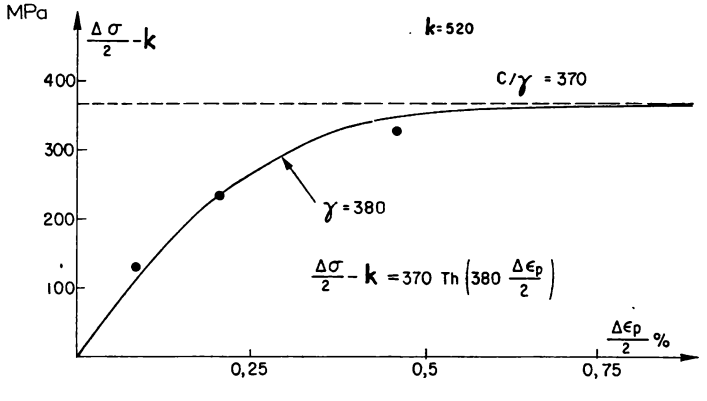


Fig. 41. Identification des coefficients C et γ. Alliage INCO 718, T = 550 °C.

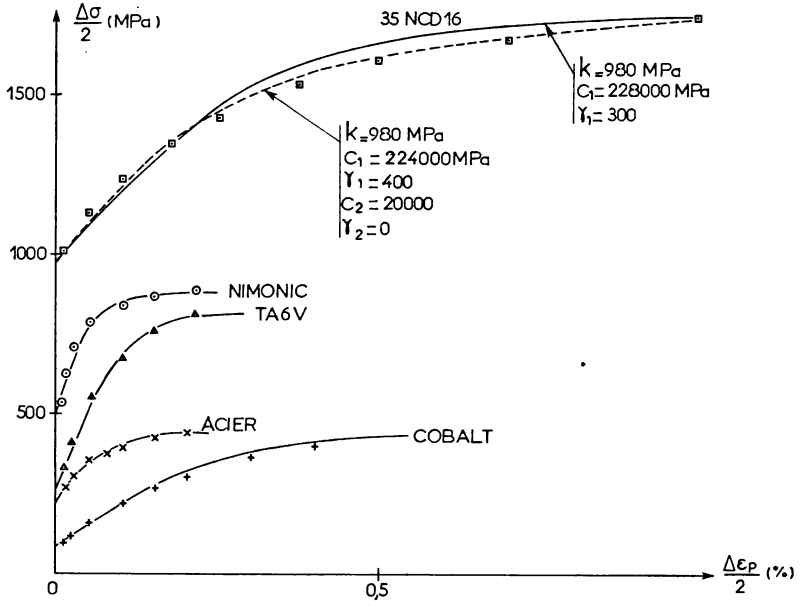


Fig. 42. Courbes cycliques de quelques matériaux et interprétation par le modèle cinématique non linéaire.

4.4.4. *Lois d'écrouissage combinées*

4.4.4.1. *Superposition de l'écrouissage isotrope*

Il s'agit de superposer à l'écrouissage cinématique non linéaire un écrouissage isotrope : le domaine d'élasticité se modifie par translation et par dilatation. Les variables d'état employées pour décrire cet écrouissage isotrope sont la déformation plastique cumulée p et la variable R, force thermodynamique associée, représentant la variation de dimension du domaine d'élasticité (cf. § 4.2). Celui-ci s'exprime par :

$$f = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k \leqslant 0$$

où k représente la limite d'élasticité initiale en traction.

L'évolution de R en fonction de p rend compte d'un écrouissage progressif : pour les effets cycliques, cette évolution est lente et peut se faire de façon croissante (durcissement cyclique) ou décroissante (adoucissement). Dans ce dernier cas, la formulation n'est valable que dans un domaine de déformation où la superposition de l'écrouissage cinématique non linéaire et de l'adoucissement isotrope conduisent globalement à un écrouissage positif au cours

de chaque alternance (sinon la formulation devrait être transposée en fonction des déformations comme on l'a mentionné au § 4.3.1).

L'évolution de R peut être avantageusement particularisée au moyen d'une équation similaire à celle employée pour l'écrouissage cinématique :

$$dR = b(Q - R)\,dp$$

où b et Q désignent deux constantes : Q donne la valeur asymptotique correspondant au régime cyclique stabilisé, b indiquant la rapidité de stabilisation. La valeur initiale de R pourra être prise nulle ou non nulle : $R(0) = R_0$. Cette loi d'évolution est bien représentative des effets de durcissement cyclique, par exemple à déformation contrôlée. L'intégration de cette relation et l'application du critère donne à chaque cycle unidimensionnel :

$$\sigma_M = X_M + k + Q[1 - \exp(-bp)]\,.$$

En supposant que X_M est constant et que l'amplitude de déformation plastique $\Delta\varepsilon_p$ est approximativement constante on obtient pour le cycle N :

$$\frac{\sigma_M - \sigma_{M_0}}{\sigma_{M_s} - \sigma_{M_0}} = 1 - \exp(-2\,b\,\Delta\varepsilon_p\,N)$$

où σ_{M_0} et σ_{M_s} sont respectivement la contrainte maximale au premier cycle et au cycle stabilisé. La figure 43 montre effectivement une très bonne concordance de cette dernière relation avec des résultats expérimentaux obtenus sur l'acier 316 (dans le cas de ce matériau la valeur du coefficient Q doit cependant être ajustée sur chaque essai, comme indiqué plus loin).

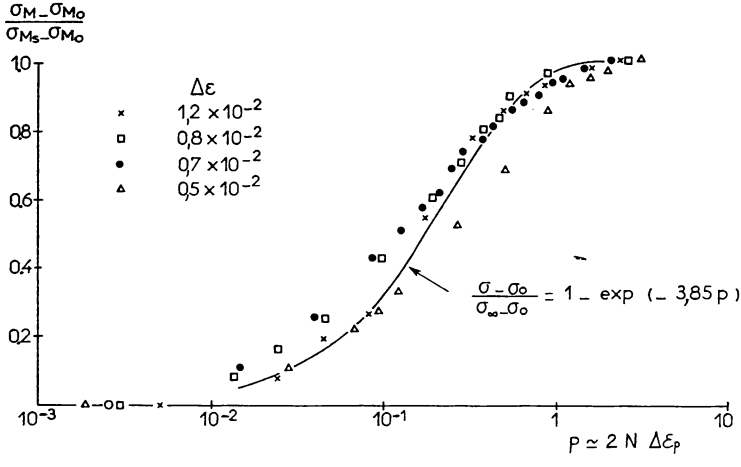


Fig. 43. Vérification de la relation d'évolution de la variable d'écrouissage isotrope. Acier 316.

L'écrouissage isotrope en tant qu'effet de durcissement cyclique peut aussi se traduire sur la variable cinématique en introduisant des fonctions de la déformation plastique cumulée, par exemple :

$$d\mathbf{X} = \tfrac{2}{3} C(p)\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p - \gamma(p)\, \mathbf{X}\, dp .$$

Le durcissement cyclique pourra être traduit soit par une fonction $C(p)$ croissante, soit par une fonction $\gamma(p)$ décroissante. Ces deux variations, ainsi que le cas où R est variable, sont illustrées sur la figure 44 qui permet de juger des différences de modélisation sur la forme de la courbe contrainte-déformation. Un exemple de simulation expérimentale est présenté sur la figure 45 pour l'acier inoxydable 316L à température ambiante, dans le cas où C est constant, γ décroissant exponentiellement.

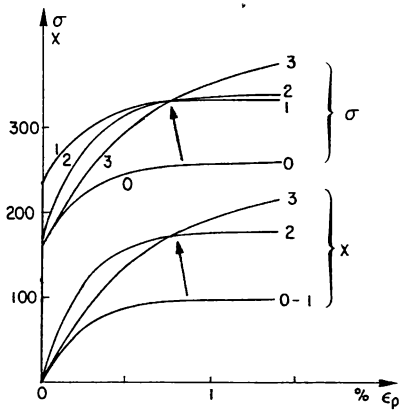


Fig. 44. Introduction de l'écrouissage isotrope, (1) sur R, (2) sur C, (3) sur γ.

0: R = 160 , C = 40 000 , γ = 400
1: R : 160 ⟶ 229
2: C : 40000 ⟶ 72000
3: γ : 400 ⟶ 166

En comparant le premier cycle et le cycle stabilisé (essai à déformation contrôlée) on observe l'effet du durcissement cyclique, à la fois sur l'amplitude de contrainte et sur le module d'écrouissage (valeur de $d\sigma/d\varepsilon_p$) au maximum de la boucle d'hystérésis.

La figure 46 indique la confrontation pour un essai à contrainte contrôlée (alternée). Il n'y a pas d'effet de rochet, après stabilisation de l'effet de durcissement cyclique. Le même modèle, avec les mêmes valeurs des coefficients, traduit correctement le premier cycle, l'effet de durcissement progressif et le cycle stabilisé.

En résumé, l'ensemble des équations du modèle superposant écrouissage isotrope et écrouissage cinématique s'écrit, pour un matériau obéissant au critère de Von Mises :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_p &= \frac{3}{2}\,\mathrm{d}\lambda\,\frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} \\
\mathrm{d}\mathbf{X} &= \frac{2}{3}\,C(p)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p - \gamma(p)\,\mathbf{X}\,\mathrm{d}p \\
\mathrm{d}R &= b(Q - R)\,\mathrm{d}p \\
f &= J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k \\
\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{h}\,H(f)\left\langle \frac{3}{2}\,\frac{(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} \right\rangle \\
h &= C - \frac{3}{2}\,\frac{\gamma\mathbf{X} : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}')}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} + b(Q - R)
\end{aligned}
$$

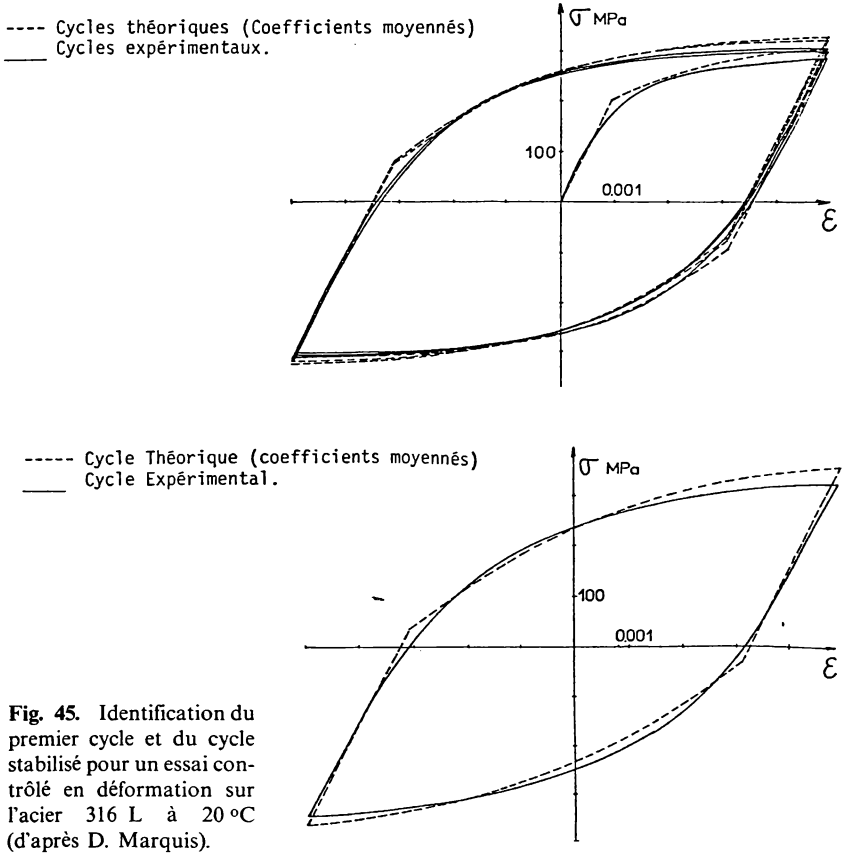


Fig. 45. Identification du premier cycle et du cycle stabilisé pour un essai contrôlé en déformation sur l'acier 316 L à 20 °C (d'après D. Marquis).

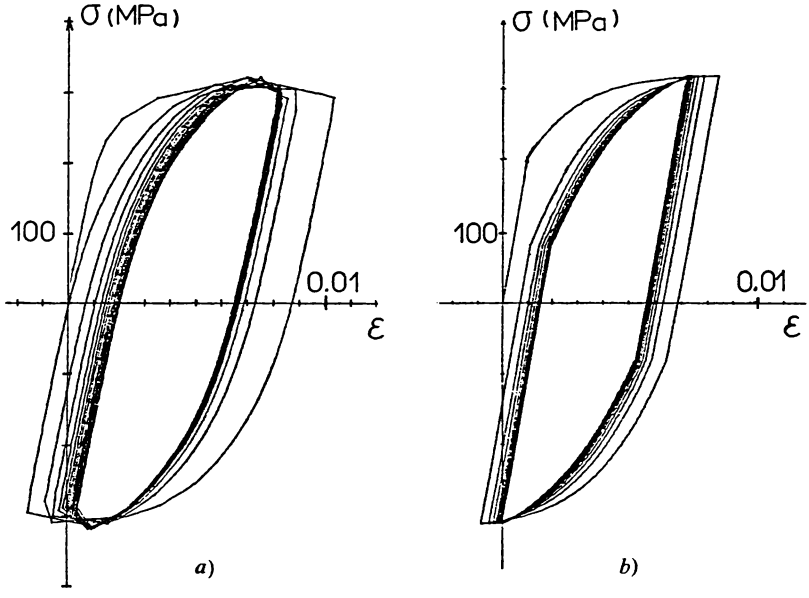


Fig. 46. Essai à contrainte imposée (± 300 MPa) sur l'acier 316 L à 20 °C.
(*a*) essai,
(*b*) simulation numérique
(d'après D. Marquis).

4.4.4.2. *Superposition de plusieurs modèles cinématiques*

Malgré les améliorations certaines apportées par l'écrouissage cinématique non linéaire vis-à-vis de l'écrouissage linéaire, celui-ci fournit une description insuffisante lorsque le domaine de variation des déformations est important. La non-linéarité n'intervient que dans un domaine intermédiaire : pour les très faibles déformations on retrouve le cas linéaire, avec une mauvaise représentation de la transition élastoplastique ; par contre dans le cas des déformations importantes la valeur limite est atteinte trop rapidement. Il est facile de remédier à une telle insuffisance en superposant plusieurs modèles analogues. Le critère s'exprime toujours par $f = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k = 0$ avec :

$$\mathbf{X} = \sum_l \mathbf{X}_l .$$

Chacune des variables cinématiques indépendantes $\mathbf{X}_l$ obéit à une loi d'évolution telle que :

$$\mathrm{d}\mathbf{X}_l = \tfrac{2}{3} C_l \, \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p - \gamma_l \mathbf{X}_l \, \mathrm{d}p .$$

La possibilité d'intégration analytique en chargement proportionnel et les principales propriétés sont préservées. Les degrés de liberté supplémentaires permettent d'étendre le domaine de validité comme l'illustre schématiquement la figure 47. Trois variables cinématiques sont amplement suffisantes pour lever les inconvénients mentionnés plus haut (chacune d'elles couvre un domaine de déformation). Si l'on désire conserver un écrouissage cinématique linéaire pour les grandes déformations, cela est toujours possible (sur la figure 47, $\gamma_3 = 0$). L'un des exemples de la figure 42 a été recalculé avec un tel modèle.

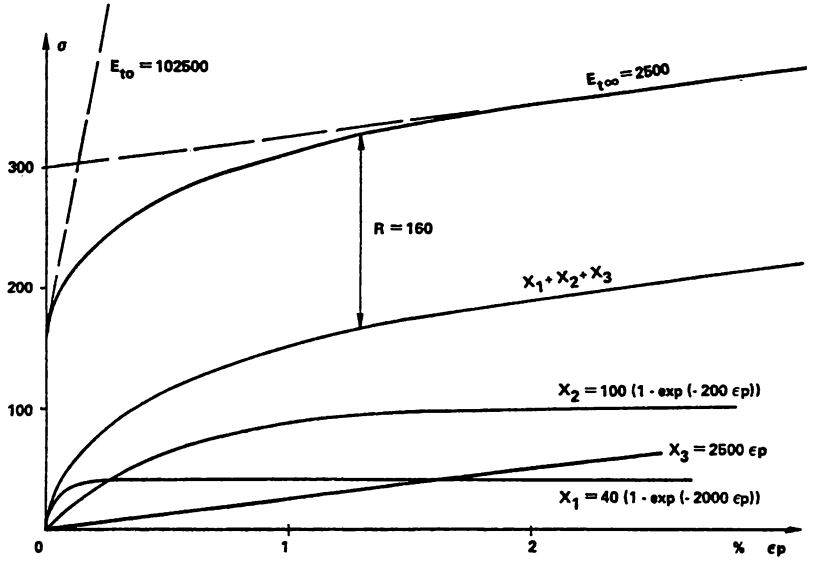


Fig. 47. Superposition de plusieurs modèles cinématiques.

Un autre avantage de cette superposition est lié à la description des effets de rochet : le modèle de base conduit à un effet de rochet souvent trop important par rapport aux observations expérimentales. La superposition avec un modèle linéaire élimine cet inconvénient, tout au moins au bout d'un certain nombre de cycles. La superposition avec un modèle presque linéaire ($\gamma_1 \ll C_1$) conduit à un effet de rochet moins prononcé.

4.4.4.3. *Introduction d'une mémoire de l'écrouissage*

Le modèle cinématique non linéaire décrit un écrouissage à mémoire évanescente (en fonction de la déformation cumulée). Quelle que soit l'histoire préalable, le cycle stabilisé est unique pour un chargement cyclique donné. Cette propriété est quelquefois mise en défaut, par exemple sur certains aciers.

Sa prise en compte nécessite l'introduction d'une variable d'état supplémentaire (ce ne peut être la déformation plastique cumulée dont l'influence se sature au cycle stabilisé).

L'observation de cycles sous chargements séquentiels (exemple de l'acier inoxydable 316 sur la figure 9) montre que cet effet de mémoire peut se traduire en traction-compression par l'amplitude maximale de déformation plastique. La comparaison de la courbe monotone et de la courbe cyclique (fig. 50) montre que le durcissement cyclique est d'autant plus important que l'amplitude de déformation imposée est plus grande. Autrement dit, la valeur asymptotique Q de la variable isotrope R traduisant le durcissement cyclique (voir ci-dessus) n'est plus une constante mais dépend de l'amplitude de déformation.

La variable supplémentaire gardant mémoire des déformations plastiques maximales peut être introduite à l'aide d'une surface index de l'espace des déformations plastiques (fig. 48) :

$$F = \tfrac{2}{3} J_2(\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\zeta}) - q = 0 .$$

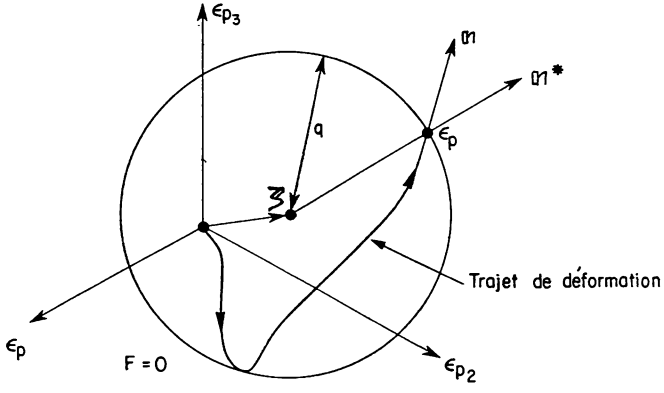


Fig. 48. Surface index définissant la mémoire dans l'espace des déformations plastiques.

Le mouvement de cette surface enveloppe des déformations préalables n'a lieu que lorsque l'état de déformation actuel se trouve sur la surface ($F=0$) et que l'écoulement a lieu dans la direction extérieure à la surface. On utilise le même type de critère de charge-décharge que pour la plasticité classique et les équations d'évolution sont :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{n}^* : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p)\, \mathbf{n}^*\, H(F)$$

$$\mathrm{d}q = \eta\, \mathrm{d}p\, H(F)$$

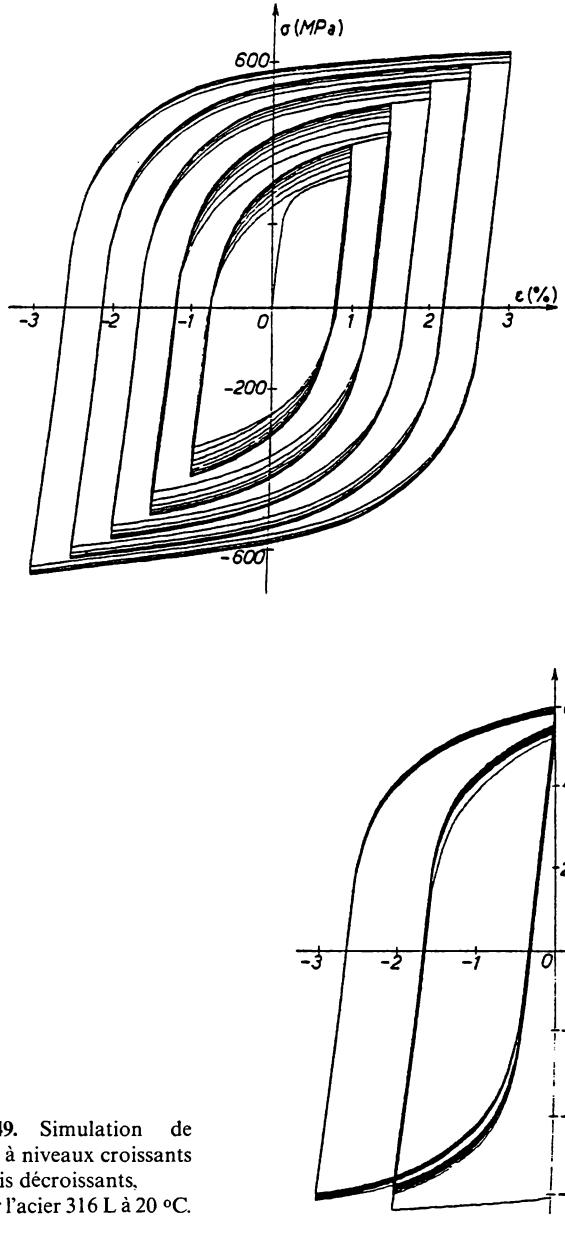


Fig. 49. Simulation de l'essai à niveaux croissants (*a*) puis décroissants, (*b*) sur l'acier 316 L à 20 °C.

où η est déterminé par la condition de consistance $dF = 0$:

$$\eta = \tfrac{1}{2} \langle \mathbf{n} : \mathbf{n}^* \rangle$$

$\mathbf{n}$ et $\mathbf{n}^*$ étant les normales unitaires respectivement en $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ à la surface de charge $f = 0$ et à la surface index $F = 0$.

La dimension q de cette surface enveloppe donne la mémoire de la déformation : en traction-compression par exemple, on vérifie facilement que $q = \frac{1}{2} \Delta\varepsilon_{p\max}$. Le choix de la dépendance entre la valeur asymptotique Q de l'écrouissage isotrope et la variable q permet de compléter la modélisation. On peut prendre par exemple :

$$Q = Q_M - (Q_M - Q_0) \exp(-2\mu q)$$

où Q_0, Q_M et μ sont trois constantes.

La superposition de cet effet de mémoire permet d'élargir considérablement les possibilités de la modélisation. Pour le cas de l'acier 316 L, par exemple, on décrit correctement (avec 13 coefficients au total) :

— le durcissement progressif (quelque 10 cycles) pour chacun des niveaux de l'essai à niveaux de déformation croissants (comparer les figures 9 et 49) ;

— le durcissement résiduel observé pour un cyclage à niveau plus faible (± 1 % et ± 1,5 %) après cyclage à fort niveau (± 3 %) ;

— la différence prononcée entre courbe monotone et courbe cyclique (une éprouvette par niveau), différence plus importante lorsque la déformation imposée est plus grande (fig. 50) ;

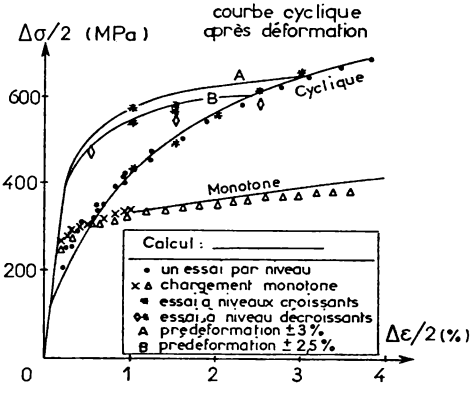


Fig. 50. Simulation des courbes monotone et cyclique Acier 316 L à 20 °C.

— les essais cycliques incrémentaux, qui donnent pour ce matériau des courbes très différentes, dépendantes de l'amplitude de déformation (fig. 51).

L'effet de mémoire ainsi introduit est parfait, c'est-à-dire permanent ! Une certaine évanescence progressive peut cependant être observée. On peut

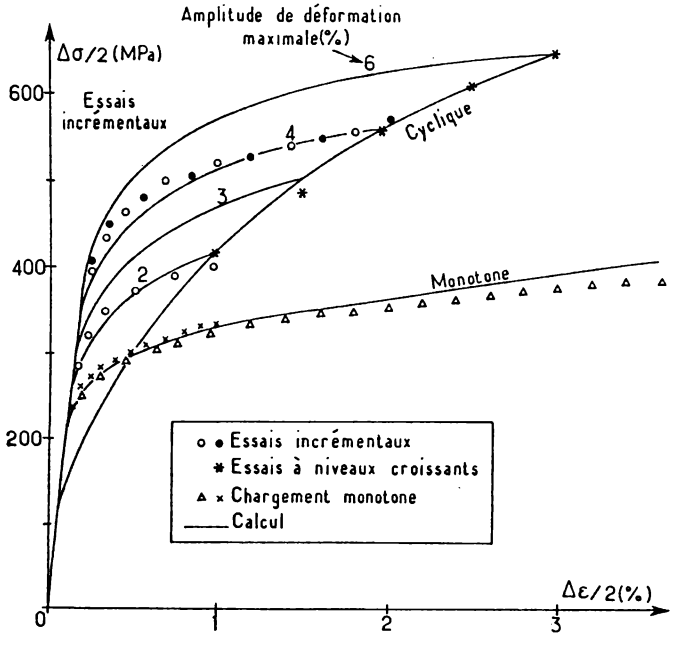


Fig. 51. Simulation des courbes cycliques obtenues par la méthode incrémentale.

ainsi considérer que la réalité se situerait entre deux cas extrêmes : mémoire permanente et mémoire complètement évanescente. Une description plus précise n'est possible qu'au prix d'une plus grande complexité et n'offre d'intérêt pratique que pour un suivi détaillé des effets cycliques transitoires. Dans les calculs de structures sous chargement cyclique, on se limite le plus souvent à l'analyse de l'état stabilisé. Il est alors possible d'accélérer le passage du premier cycle au cycle stabilisé en procédant en deux temps :

— calcul du premier cycle pour obtenir une approximation (généralement suffisante) de la valeur de la mémoire q ;

— saturation des coefficients à leur valeur stabilisée : $R = Q = Q(q)$ et calcul d'un ou plusieurs cycles sous ces conditions (pour tenir compte des effets de redistribution des contraintes).

4.5. Classement des différents modèles

Afin de cerner grossièrement le domaine de validité des différents modèles étudiés, on en redonne ci-dessous la liste, en correspondance avec les phénomènes dont ils permettent de rendre compte.

Modèles	Ecrouissage monotone	Effet Bauschinger	Durcissement ou adoucissement cycliques	Effets de rochet	Effets de mémoire
Prandtl Reuss	×		×		
Cinématique linéaire	×	×			
Mroz	×	×	×		
Cinématique non linéaire	×	×		×	
Cinématique + isotrope	×	×	×	×	
Cinématique + isotrope + mémoire	×	×	×	×	×

5. CAS DU CHARGEMENT PROPORTIONNEL

5.1. Définition

En plasticité, la déformation actuelle des solides dépend de l'histoire du trajet de chargement. Ceci est traduit par le caractère incrémental des lois d'écoulement dont l'intégration est à faire dans chaque cas particulier de chargement.

Une exception importante correspond au cas particulier du chargement proportionnel (ou simple, ou radial) pour lequel l'intégration ne dépend que d'un scalaire et peut être faite une fois pour toutes. Ce sont les lois entières d'Hencky-Mises.

Un chargement est dit proportionnel pour un solide donné si, en tout point M du solide, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(M, t)$ est proportionnel à un tenseur $\mathbf{S}(M)$ indépendant du temps, le facteur de proportionnalité étant une fonction monotone du temps $\alpha(t)$, telle que $\alpha(0) = 0$:

$$\boldsymbol{\sigma}(M, t) = \alpha(t)\, \mathbf{S}(M) .$$

Au cours du chargement, les directions principales du tenseur des contraintes variables en chaque point restent constantes en fonction du temps.

On en déduit aisément que les directions principales du déviateur des contraintes restent constantes :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}'(M, t) &= \boldsymbol{\sigma} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})\,\mathbf{1} \\ &= \alpha(t)\,[\mathbf{S} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\mathbf{S})\,\mathbf{1}] \\ \boldsymbol{\sigma}'(M, t) &= \alpha(t)\,\mathbf{S}'(M)\end{aligned}$$

on note σ_{eq} la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma}) = (\tfrac{3}{2}\,\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}')^{1/2}\,.$$

5.2. Loi intégrée d'Hencky-Mises. Contrainte et déformation équivalentes

La condition de chargement proportionnel permet d'intégrer formellement la relation différentielle de plasticité de la loi de Prandtl-Reuss en supposant le matériau non écroui en l'état initial : $\boldsymbol{\varepsilon}^p(t = 0) = 0$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{3}{2}\,g'(\sigma_{eq})\,\frac{\mathrm{d}\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}}\,\boldsymbol{\sigma}'$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \int_0^t \frac{3}{2}\,g'(\sigma_{eq})\,\alpha(t)\,\mathbf{S}'\,\frac{\mathrm{d}\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}}\,.$$

Pour intégrer par rapport à la variable σ_{eq}, on exprime α en fonction de σ_{eq} :

$$\alpha = \frac{\sigma_{eq}}{\left(\frac{3}{2}\,\mathbf{S}' : \mathbf{S}'\right)^{1/2}} = \frac{\sigma_{eq}}{J_2(\mathbf{S})}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\mathbf{S}'}{J_2(\mathbf{S})} \int_0^t \frac{3}{2}\,g'(\sigma_{eq})\,\mathrm{d}\sigma_{eq}\,.$$

Après intégration et multiplication au numérateur et dénominateur par α on obtient la relation de Hencky-Mises :

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{3}{2}\,g(\sigma_{eq})\,\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}}}\,.$$

Cette relation conduit à la notion de contrainte et déformation équivalentes, équivalence par rapport au cas unidimensionnel de traction ou compression.

L'expression du critère de Von Mises :

$$\sigma_{eq} - \sigma_s = 0$$

montre déjà que tout état tridimensionnel représenté par σ_{eq} est comparable

au cas unidimensionnel représenté par σ_s. C'est la raison pour laquelle σ_{eq} est appelée contrainte équivalente au sens de Von Mises. On peut définir une notion similaire pour la déformation en exprimant la loi d'Hencky-Mises sous forme scalaire, par calcul du second invariant du tenseur des déformations :

$$\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\varepsilon}^p\right)^{1/2} = \frac{3}{2}\frac{g(\sigma_{eq})}{\sigma_{eq}}\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'\right)^{1/2} = g(\sigma_{eq}).$$

La quantité $\varepsilon^p_{eq} = (\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\varepsilon}^p)^{1/2}$ qui permet d'exprimer toute évolution multidimensionnelle (en chargement radial) d'une manière équivalente à la loi d'écrouissage unidimensionnelle est appelée déformation équivalente au sens de Von Mises :

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon^p_{eq} = g(\sigma_{eq}) \\ \text{avec} \quad \varepsilon^p_{eq} = (\frac{2}{3}\boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\varepsilon}^p)^{1/2} \quad \text{et} \quad \sigma_{eq} = (\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}')^{1/2} \end{array}}.$$

Tous les états tridimensionnels en chargement radial sont représentés par un graphe unique dans l'espace de la contrainte et de la déformation équivalentes.

5.3. Théorème d'existence du chargement proportionnel

Des conditions suffisantes d'existence du chargement proportionnel, pour une structure et un chargement donnés sont les suivantes :

— Les efforts extérieurs croissent proportionnellement à un seul paramètre.
— L'état initial est l'état non déformé non écroui.
— Le matériau obéit à la loi de Prandtl-Reuss.
— La loi d'écrouissage s'exprime sous la forme d'une fonction puissance.
— Les déformations élastiques sont négligées.

Soit un solide $\mathscr{S}$ sollicité par :

— une densité volumique d'efforts $\vec{f}(M, t)$ dans $\mathscr{S}$,

— une densité surfacique d'efforts $\vec{F}(M, t)$ sur la frontière de $\mathscr{S}$, et cherchons à quelles conditions la solution en contrainte du problème à tout instant, soit $\boldsymbol{\sigma}(M, t)$, peut s'exprimer comme fonction scalaire de la solution à un instant particulier t^* : $\boldsymbol{\sigma}^*(M, t^*)$ supposée connue

$$\boldsymbol{\sigma}(M, t) = \frac{\alpha(t)}{\alpha^*}\boldsymbol{\sigma}^*(M, t^*)$$

$\alpha(t)$ étant une fonction scalaire du temps telle que :

$$\alpha(0) = 0, \qquad \dot{\alpha} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \alpha(t^*) = \alpha^*.$$

Les équations d'équilibre statique et les conditions aux limites vérifiées à l'instant t^* :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma}.\vec{n} = \vec{F}$$

seront satisfaites, quel que soit le temps, si :

$$\vec{f} = \frac{\alpha}{\alpha^*} \vec{f}^*(t^*) \qquad \vec{F} = \frac{\alpha}{\alpha^*} \vec{F}^*(t^*)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \frac{\alpha}{\alpha^*} \vec{f}^* = 0$$

$$\frac{\alpha}{\alpha^*} \boldsymbol{\sigma}.\vec{n} = \frac{\alpha}{\alpha^*} \vec{F}^* .$$

Si l'on choisit la loi de comportement de Prandtl-Reuss, la relation de plasticité s'intégrera pour donner la loi de Hencky-Mises si :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p(t = 0) = 0 .$$

Sous cette condition :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} g\left(\frac{\alpha}{\alpha^*} \sigma^*_{eq}\right) \frac{\boldsymbol{\sigma}'^*}{\sigma^*_{eq}} .$$

Si g est de la forme $g(\sigma_{eq}) = \left[\frac{\sigma_{eq}}{K}\right]^M$, alors

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \left(\frac{\alpha}{\alpha^*}\right)^M \boldsymbol{\varepsilon}^{p^*}(t^*) .$$

La loi d'élasticité montre aisément que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\alpha}{\alpha^*} \boldsymbol{\varepsilon}^{e^*}(t^*) .$$

Il reste à vérifier les relations entre déformations et déplacements, mais :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{1}{2} [\operatorname{grad} \vec{u}^* + (\operatorname{grad} \vec{u}^*)^T]$$

n'entraîne formellement

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{2} [\operatorname{grad} \vec{u} + (\operatorname{grad} \vec{u})^T]$$

que si $\boldsymbol{\varepsilon}^e = 0$ quel que soit t.

D'où l'ensemble des conditions énoncées avant la démonstration. Ces conditions sont assez restrictives, mais en pratique, les conditions d'un chargement quasi proportionnel (ou quasi radial) sont très souvent réunies.

6. ÉLÉMENTS SUR LES MÉTHODES DE CALCUL EN PLASTICITÉ

Ce paragraphe n'a pour but que de donner quelques indications sur la manière d'utiliser les modèles et caractéristiques de plasticité dans les méthodes de calcul classiques dont la description figure dans certains ouvrages cités en référence.

6.1. Calculs de structures

6.1.1. *Calcul des concentrations de contrainte par la méthode de Neuber*

C'est une technique approchée qui peut être utilisée pour tenir compte des redistributions de contrainte provoquées par l'écoulement plastique dans une zone de concentration de contrainte, cas souvent rencontré dans la pratique. Les conditions de validité de cette méthode sont que la zone plastique reste suffisamment confinée (entourée par une zone élastique) et que le chargement soit radial.

La solution élastique du problème est supposée connue, sous l'action de la sollicitation extérieure : soit σ_E la contrainte calculée élastiquement au point le plus sollicité.

Cas des contraintes planes

Dans le cas des structures planes, d'épaisseur faible, on peut considérer que l'état de contrainte en fond d'entaille est uniaxial. La méthode de Neuber suppose que le produit de la contrainte et de la déformation locale est indépendant de l'écoulement plastique. Autrement dit on écrit :

$$\sigma\varepsilon = \sigma_E \, \varepsilon_E = \frac{\sigma_E^2}{E}$$

où σ_E et ε_E sont la contrainte et la déformation locales calculées en élasticité (E est le module d'Young). On aboutit alors à une construction graphique (fig. 52), utilisant la courbe d'écrouissage du matériau. La solution élasto-plastique locale (approchée) est donnée par l'intersection de cette courbe avec l'hyperbole passant par la solution élastique (σ_E, ε_E).

Dans le cas des chargements cycliques la méthode peut se généraliser,

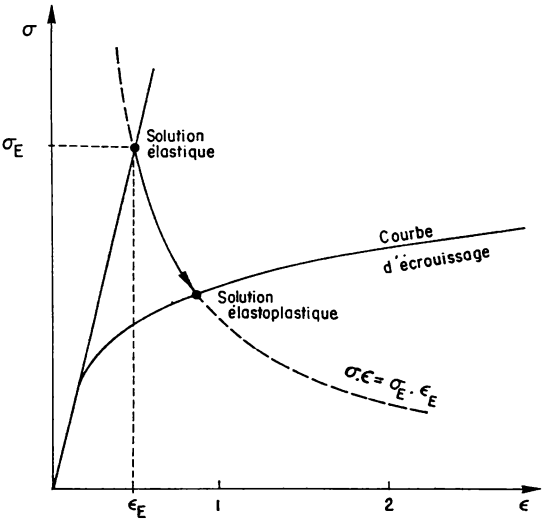


Fig. 52. Application de la méthode de Neuber pour un chargement monotone.

branche par branche. La décharge étant élastique, on recommence la même construction à partir du dernier point de charge (exemple fig. 53), en écrivant :

$$\sigma' \varepsilon' = (\sigma - \sigma_0)(\varepsilon - \varepsilon_0) = (\sigma_E - \sigma_{E_0})(\varepsilon_E - \varepsilon_{E_0}) = \frac{(\sigma_E - \sigma_{E_0})^2}{E}$$

et en utilisant un changement d'axes. Cela nécessite la connaissance de la loi de comportement au cours de chaque alternance. On peut aussi utiliser directement la courbe cyclique du matériau et raisonner en amplitudes :

$$\Delta\sigma.\Delta\varepsilon = \Delta\sigma_E.\Delta\varepsilon_E = \frac{(\Delta\sigma_E)^2}{E}.$$

Cas plus général

Lorsque les contraintes locales ne sont pas uniaxiales plusieurs hypothèses peuvent être faites pour généraliser la méthode. On peut employer des invariants élémentaires tels que la contrainte équivalente et la déformation équivalente de Von Mises ou la contrainte principale maximale et la déformation principale maximale. La généralisation la plus directe, satisfaisante car basée sur une notion énergétique, revient à écrire :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) = (\boldsymbol{\sigma}_E - \boldsymbol{\sigma}_{E_0}) : (\boldsymbol{\varepsilon}_E - \boldsymbol{\varepsilon}_{E_0}).$$

Peu de résultats existent permettant de valider ou d'invalider l'une ou l'autre de ces généralisations qui ne constituent de toute façon que des méthodes approchées.

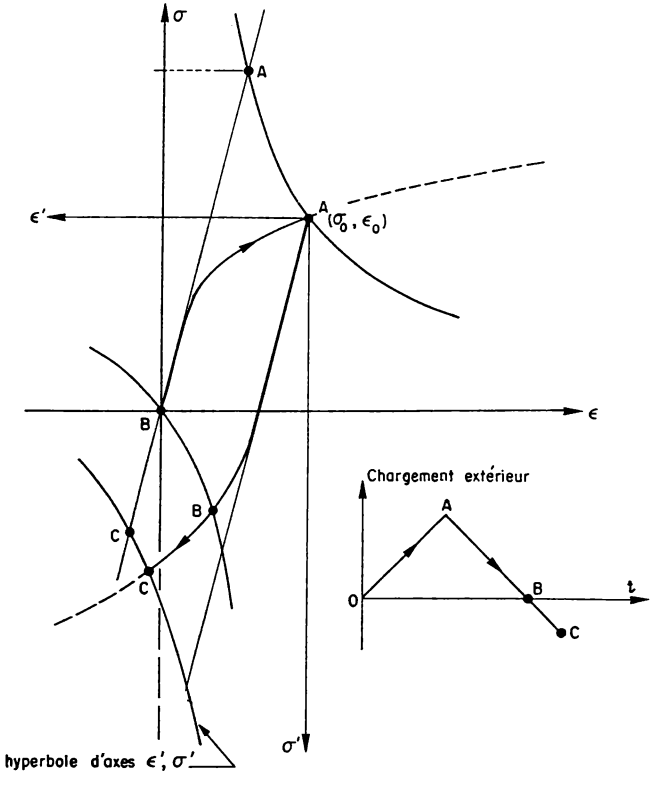


Fig. 53. Application de la méthode de Neuber pour un chargement cyclique.

6.1.2. *Méthode des éléments finis en élastoplasticité*

On a donné au chapitre 4 quelques indications sur la méthode des éléments finis appliquée dans le cadre de l'élasticité linéaire. On se borne ici à montrer succinctement comment cette méthode se généralise au cas de la plasticité, en résolvant pas à pas une succession de problèmes d'élasticité.

Pour un matériau élastique sans contraintes initiales, la formulation conduit au problème linéaire *.

$$Kq = Q$$

où K est la matrice de rigidité de la structure, obtenue par assemblage des matrices de rigidité de chaque élément, q est la colonne des inconnues nodales,

* Les crochets du symbole matriciel sont omis dans ce paragraphe.

à savoir les déplacements, Q la colonne des efforts nodaux équivalents aux efforts extérieurs.

Des contraintes initiales σ_0 supposées connues peuvent être prises en compte dans la loi de comportement, avec les notations employées au chapitre 4 :

$$\sigma = a\varepsilon + \sigma_0 .$$

Le système ci-dessus se transforme alors en :

$$Kq = Q + Q_0$$

où Q_0 est la colonne des efforts nodaux équivalents aux contraintes initiales :

$$Q_0 = -\int_{\mathscr{S}} B^T \sigma_0 \, \mathrm{d}V .$$

La méthode la plus simple pour résoudre un problème d'élastoplasticité incrémentale est la méthode des « déformations initiales », dans laquelle la déformation plastique existante ε_p est traitée comme déformation initiale :

$$\sigma = a\varepsilon_e = a\varepsilon \underbrace{- a\varepsilon_p}_{\sigma_0}.$$

La solution étant connue à la charge F, on écrit le système précédent sous forme incrémentale :

$$K \, \Delta q = \Delta Q + \Delta Q_0$$

avec

$$\Delta Q_0 = + \int_{\mathscr{S}} B^T a \, \Delta\varepsilon_p \, \mathrm{d}V$$

on voit alors apparaître le schéma itératif pour passer du niveau de chargement F au suivant $(F + \Delta F)$, illustré par la figure 54*a*.

(i) Commencer avec $\Delta\varepsilon_p = 0$.

(ii) Résoudre le système linéaire pour trouver Δq, $\Delta\sigma$.

(iii) Appliquer la loi de comportement pour obtenir le nouvel incrément de déformation plastique $\Delta\varepsilon_p$. Cette étape nécessite une ou plusieurs itérations internes pour respecter correctement le critère et la loi d'écrouissage (éventuellement on effectue des pas intermédiaires).

(iv) Recommencer en (ii).

Cette méthode converge mais parfois difficilement, en particulier lorsque les modules d'écrouissage sont faibles. On est amené à la modifier en faisant varier la rigidité de la structure. La loi de plasticité peut se mettre sous la forme :

$$\mathrm{d}\varepsilon_p = a_p^{-1} . \mathrm{d}\sigma$$

où a_p désigne la matrice des modules d'écrouissage ; elle dépend de l'état actuel (donc des inconnues q).

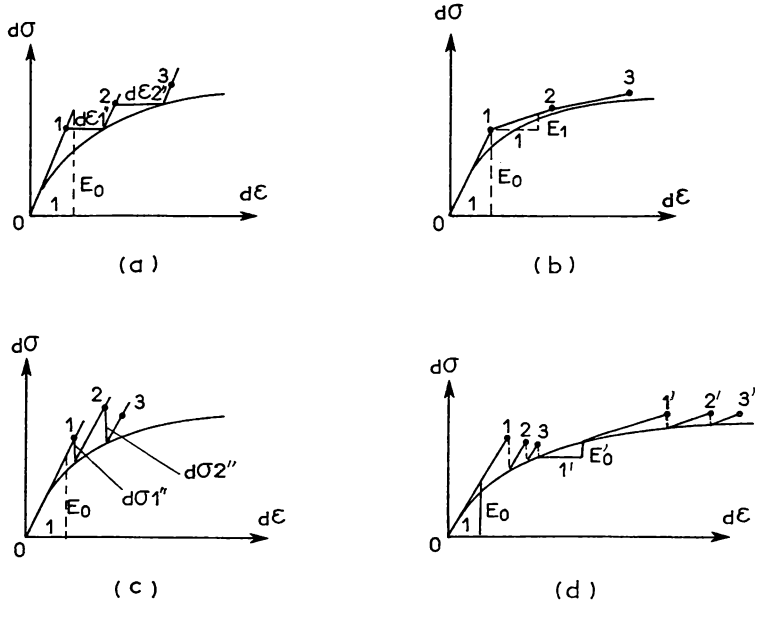


Fig. 54. Schémas itératifs d'intégration
(*a*) Méthode des déformations initiales
(*b*) Méthode de la raideur variable
(*c*) Méthode de la contrainte initiale
(*d*) Méthode mixte RVCI.

La loi de comportement s'écrit :

$$d\sigma = a\,d\varepsilon - a\,d\varepsilon_p = a\,d\varepsilon - a.a_p^{-1}\,d\sigma$$

on en tire facilement :

$$d\sigma = a_{ep}\,d\varepsilon$$

avec

$$a_{ep} = (a^{-1} + a_p^{-1})^{-1}\,.$$

En fait, on ne fait pas varier la rigidité à chaque itération (voir fig. 54*b*). On écrit alors :

$$d\sigma = a_{ep_0}\,d\varepsilon - a_{ep_0}\,d\varepsilon^*$$

avec

$$d\varepsilon^* = (a_p^{-1} - a_{p_0}^{-1})\,d\sigma^*$$

où $d\sigma^*$ est la valeur de $d\sigma$ à l'itération précédente.

La méthode de la « raideur variable » consiste à utiliser le système linéaire suivant :

$$K(q)\,\Delta q = \Delta Q + \Delta Q^*$$

où $K(q)$ est la matrice de rigidité tangente pour le chargement F :

$$K(q) = \int_{\mathscr{S}} B^T a_{ep} B \, dV$$

et ΔQ^* correspond aux contraintes initiales induites par les incréments de déformation $d\varepsilon^*$. La matrice de rigidité $K(q)$ est constante au cours des itérations permettant le passage de F à $(F + \Delta F)$. Le procédé itératif est le même que précédemment. Cette méthode est plus performante malgré les calculs supplémentaires nécessités par la réévaluation et la réduction de la matrice de rigidité. De nombreuses variantes peuvent être développées.

6.2. Analyse limite

On donne ici sans démonstration les deux théorèmes limites qui permettent d'encadrer, au sens de l'énergie, la solution d'un problème de plasticité donné, en choisissant dans une classe de champs de contrainte ou de déformation particuliers, les champs les plus proches de la solution.

6.2.1. *Champs licites*

Ces champs particuliers appelés licites doivent vérifier un certain nombre de conditions.

Champ de contrainte licite

Un champ de contrainte est dit licite pour un problème donné si :

— il est statiquement admissible :

. les fonctions $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ sont continues et continûment dérivables par morceaux dans le domaine considéré ;

. elles vérifient les équations d'équilibre

$$\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \vec{f} = 0 \text{ en statique ;}$$

. elles vérifient les conditions aux limites

$$\boldsymbol{\sigma}.\vec{n} = \vec{F}^d \text{ donné ;}$$

— il est plastiquement admissible : le critère de plasticité est vérifié en tout point du domaine :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leqslant 0 .$$

Champ de vitesses de déplacement licite

Un champ de vitesses est dit licite pour un problème donné si :

— il est cinématiquement admissible,

. les fonctions $v_i(x_1, x_2, x_3)$ sont continues et continûment dérivables par morceau dans le domaine considéré ;

. elles vérifient les conditions aux limites

$$\vec{v} = \vec{v}^d \text{ donné ;}$$

. il est plastiquement admissible : les fonctions v_i vérifient la condition d'incompressibilité sur les déformations totales :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\text{grad}\,\vec{v} + (\text{grad}\,\vec{v})^T], \quad \text{Tr}\,(\dot{\varepsilon}) = 0$$

ce qui implique que l'on néglige les déformations élastiques.

6.2.2. *Théorèmes limites*

Le principe des puissances virtuelles, la convexité du critère de plasticité et la loi de normalité permettent de démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème de la borne inférieure

Dans une classe de champs de contraintes licites pour un problème donné, le champ le plus proche de la solution au sens de l'énergie totale est celui qui maximise la fonctionnelle puissance des efforts extérieurs.

Si $\vec{F}^*$ et $\vec{F}$ sont respectivement les densités surfaciques d'efforts du champ licite et du champ réel là où les vitesses sont données $\vec{v}^d$:

$$\boxed{\int_{\partial\mathscr{S}_v} \vec{F}^*.\vec{v}^d \, dS \leqslant \int_{\partial\mathscr{S}_v} \vec{F}.\vec{v}^d \, dS}.$$

Théorème de la borne supérieure

Dans une classe de champs de vitesses licites pour un problème donné, le champ le plus proche de la solution au sens de l'énergie totale est celui qui minimise la fonctionnelle différence entre la puissance des efforts intérieurs et la fraction de puissance des efforts extérieurs correspondant aux seuls efforts donnés.

Les astérisques correspondant toujours au champ licite :

$$\boxed{\int_{\mathscr{S}} \sigma : \dot{\varepsilon} \, dV - \int_{\partial\mathscr{S}_F} \vec{F}^d.\vec{v} \, dS \leqslant \int_{\mathscr{S}} \sigma^*.\dot{\varepsilon}^* \, dV - \int_{\partial\mathscr{S}_F} \vec{F}^d.\vec{v}^* \, dS}.$$

σ^* étant associé à $\dot{\varepsilon}^*$ par la loi de comportement.

Ces théorèmes étant le plus souvent utilisés avec l'hypothèse de solides rigides-parfaitement plastiques, le choix de la valeur de la contrainte seuil doit être fait d'une manière cohérente avec l'approximation des théorèmes :

$\sigma_s = \sigma_Y$ pour le théorème de la borne inférieure
(σ_Y : contrainte limite d'élasticité),

$\sigma_s = \sigma_u$ pour le théorème de la borne supérieure
(σ_u : contrainte ultime de rupture).

6.3. Méthode globale approchée de l'énergie uniforme

Dans les problèmes de mise en forme (laminage, filage, forgeage, estampage, emboutissage...), les inconnues sont les efforts extérieurs nécessaires pour transformer une géométrie initiale donnée en une géométrie finale constituant également une donnée du problème. Ces problèmes peuvent être résolus par les méthodes de l'analyse limite. Parmi les autres méthodes approchées (méthode des tranches, méthode des caractéristiques...), citons la méthode de l'énergie uniforme particulièrement simple d'emploi.

Elle repose sur l'hypothèse grossière qui consiste à supposer que la densité d'énergie ou de puissance de déformation est uniforme dans la zone du solide qui subit des déformations plastiques. En chargement radial, en négligeant les déformations élastiques et avec les notions de contrainte et déformation équivalentes, cette densité de puissance s'exprime par :

$$\dot{w} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sigma_{eq}\ \dot{\varepsilon}_{eq}\ .$$

En considérant le matériau comme rigide-parfaitement plastique de seuil σ_s dans la zone déformée de volume V_p, la puissance totale des efforts intérieurs vaut :

$$\dot{W} = \sigma_s\ \dot{\varepsilon}_{eq}\ V_p\ .$$

On calcule $\dot{\varepsilon}_{eq}$ « en moyenne » d'après la géométrie finale et la géométrie initiale. On suppose que cette déformation s'est produite à vitesse constante pendant un temps Δt qui s'exprime en fonction de la géométrie et de la vitesse v du point d'application de l'effort inconnu F.

En écrivant l'égalité entre la puissance des efforts intérieurs et la puissance des efforts extérieurs

$$\boxed{\sigma_s\ \dot{\varepsilon}_{eq}\ V_p = F.v}$$

on en tire aisément F.

Cette méthode donne des résultats par défaut ou par excès, selon les cas, mais le plus souvent par défaut. Le matériau étant représenté par σ_s, il est conseillé de prendre :

$$\sigma_s = \sigma_u\ .$$

7. BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE 5

HILL R. *The mathematical theory of plasticity*. At the Clarendon press (1950-1971).

KACHANOV L. M. *Foundations of the theory of plasticity*. North-Holland Publication company (1971).

ARGON A. S. *Constitutive equations in plasticity*. M.I.T. Press (1975).

MANDEL J. *Plasticité et viscoplasticité*. Cours C.I.S.M. Udine. Springer-Verlag (1971).

PRAGER W. *Problèmes de plasticité théorique*. Dunod (1958).

ZYCKOWSKI M. *Combined loading in the theory of plasticity*. Polish Scientific publishers (1981).

SALENÇON *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC 1983.

HULT J., LEMAITRE J. *Physical non-linearities in structural analysis*. I.U.T.A.M. Symposium Springer-Verlag (1981).

SAWCZUK A. BIANCHI G. *Plasticity to day*. (Conf. C.I.S.M. Udine). Elsevier Applied Sciences Publisher (1985).

BAQUE P., FELDER E., HYAFIL J., DESCATHA. *Mise en forme des métaux*. Dunod (1973).

C.N.R.S. *Mise en forme des métaux et alliages*. Edition du C.N.R.S., Paris (1976).

SZCZEPINSKI W. *Introduction to the mechanics of plastic forming of metals*. Sijthoff and Noordhoff (1979).

Chapitre 6

VISCOPLASTICITÉ

« *Tout solide est un fluide qui s'ignore.* »

Avec ce chapitre, on aborde les problèmes liés à l'évolution temporelle des déformations permanentes, c'est-à-dire l'étude des solides parfaitement viscoplastiques, des solides parfaitement élastoviscoplastiques et des solides élastoviscoplastiques écrouissables tels qu'ils ont été décrits schématiquement au chapitre 3.

Les dates marquantes dans l'évolution de la modélisation mathématique de la viscoplasticité sont :

1910, avec la traduction du fluage primaire par la loi d'Andrade ;

1929, avec la loi de Norton reliant la vitesse de fluage secondaire à la contrainte ;

1934, avec les travaux d'Odqvist généralisant la loi de Norton au cas tridimensionnel.

Le premier symposium I.U.T.A.M. « Creep in structures », organisé par N. J. Hoff, avait lieu en 1960 ; il devait marquer le point de départ d'un grand développement de la viscoplasticité avec les travaux de Hoff, Rabotnov, Perzyna, Hult, Lemaitre pour les lois à écrouissage isotrope, les travaux de Kratochvil, Malinin et Khadjinsky, Ponter et Leckie, Chaboche pour les lois à écrouissage cinématique.

Ces travaux voient maintenant leur plein épanouissement avec la possibilité donnée par les ordinateurs modernes de réaliser des calculs de structures soumises au fluage à haute température. Quelques éléments sur ces méthodes sont donnés à la fin de ce chapitre essentiellement consacré à la formulation et l'identification des lois de comportement.

Le formalisme utilisé est celui de la thermodynamique des processus irréversibles, guidé par les aspects phénoménologiques décrits au début du chapitre. Des lois de comportement tridimensionnelles particulières sont exposées en détail avec, pour chacune d'elle, la modélisation, l'identification et des caractéristiques de matériaux particuliers : la viscoplasticité parfaite, la viscoplasticité à écrouissage isotrope et la viscoplasticité à écrouissage cinématique. Ces lois sont ici considérées et développées dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations.

1. DOMAINE DE VALIDITÉ ET D'EMPLOI

La théorie de la viscoplasticité décrit l'écoulement par fluage de la matière, qui, par rapport au cas de la plasticité, dépend du temps de façon essentielle.

— Pour les métaux et alliages, il correspond à des mécanismes liés au mouvement des dislocations dans les grains (montée, déviation, polygonisation...), auxquels se superposent des effets de glissement intercristallins. Ces mécanismes prennent naissance dès que la température dépasse environ le tiers de la température absolue de fusion exprimée en °K. Cette limite est schématique et indicative. En fait, certains alliages présentent de la viscoplasticité à température ambiante (300 °K), alors que leur point de fusion dépasse 1 400 °K. Dans un large domaine de température, le choix entre les théories de la plasticité et de la viscoplasticité dépend donc du type d'application envisagé. Un autre aspect est abordé dans ce chapitre : les effets du temps qui se produisent indépendamment de toute déformation macroscopique comme la restauration de la structure cristalline, le vieillissement, etc... Naturellement, ces mécanismes se produisent quelquefois en même temps que la déformation, ce qui complique encore la modélisation.

— Pour les polymères, les bois, le bitume, etc... la théorie de la viscoplasticité doit être utilisée dès que la sollicitation dépasse la limite d'élasticité ou de viscoélasticité.

— Comme pour la plasticité on ne s'intéresse ici qu'aux sollicitations non endommageantes, ce qui limite encore les déformations à la moitié de la déformation à rupture et les nombres de cycles éventuels, au nombre de cycles à stabilisation des processus d'adoucissement ou de durcissement cycliques.

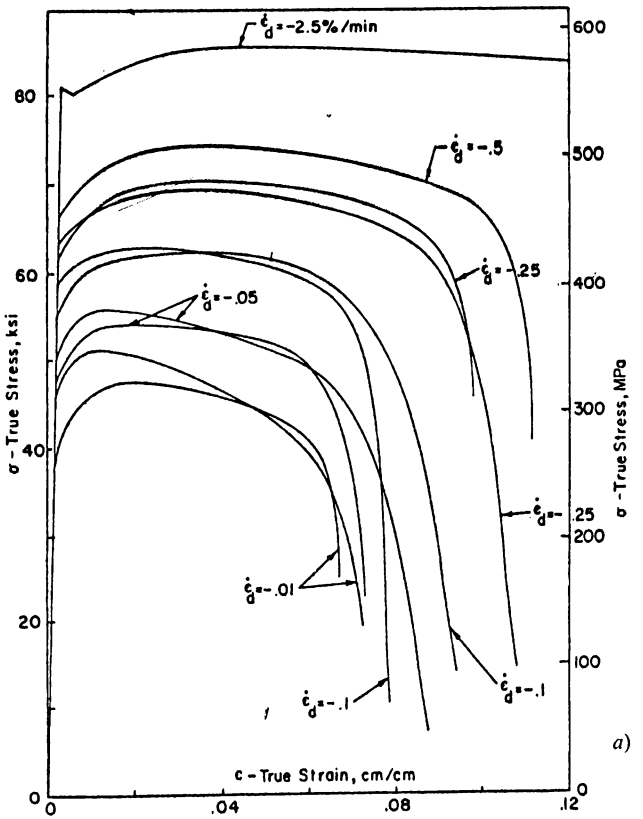
Le couplage viscoplasticité-endommagement est étudié au chapitre 7.

2. ASPECTS PHÉNOMÉNOLOGIQUES

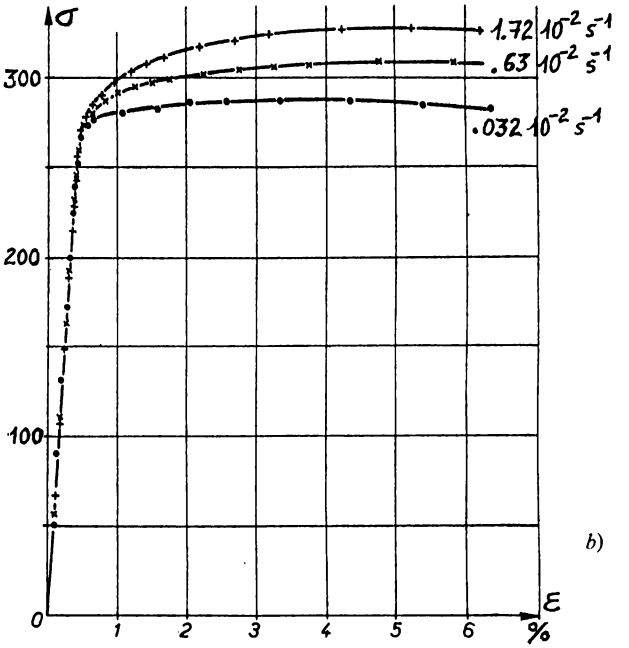
Selon la méthode adoptée, c'est de l'analyse qualitative des résultats des essais caractéristiques que découle la modélisation. Dans le domaine considéré ce sont les essais d'écrouissage en traction (vitesse de déformation constante ou vitesse de contrainte constante), les essais de fluage (force constante ou contrainte constante), les essais de relaxation (déformation constante), les essais cycliques.

2.1. Résultats tirés des essais d'écrouissage

Les courbes d'écrouissage d'un matériau viscoplastique ne diffèrent pas sensiblement de celles du matériau plastique (les courbes à pallier ne sont cependant jamais observées). Par contre, trois différences essentielles sont mises en évidence :



a)



b)

Fig. 1. Essais d'écrouissage à différentes vitesses :
(*a*) Udimet 700 forgé, 927 °C (d'après Laflen et Stouffer).
(*b*) AU4G trempé vieilli, 200 °C.

— L'influence de la vitesse de déformation (ou vitesse de contrainte) : plus la vitesse est élevée, plus la contrainte est grande pour une même déformation. Deux exemples sont présentés sur les figures 1*a* et 1*b*.

— Un changement de vitesse de déformation en cours d'essai produit un changement immédiat de la courbe de traction qui a tendance à rejoindre la courbe monotone correspondant à la nouvelle vitesse (exemple fig. 2).

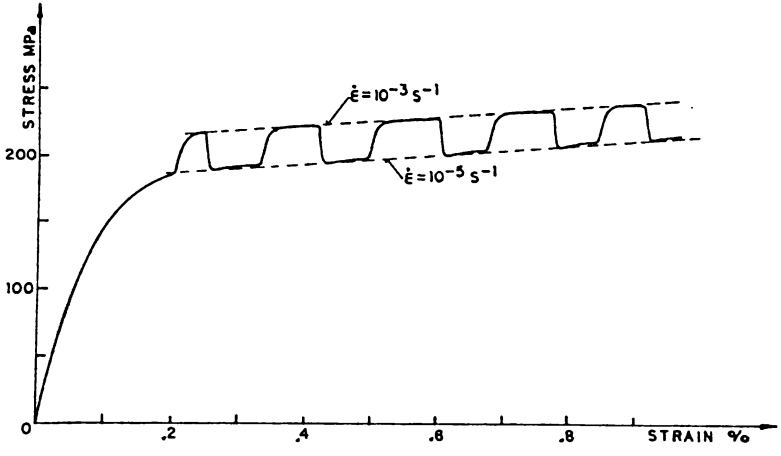


Fig. 2. Ecrouissage à vitesse de déformation variable sur un acier inoxydable 304 à température ambiante (d'après E. Krempl).

— La notion de seuil de plasticité stricte disparaît, un écoulement peut se produire pour une contrainte inférieure à une contrainte appliquée antérieurement. La limite d'élasticité, ou seuil initial, est elle aussi difficile à définir ; aux températures élevées il est souvent commode de la considérer comme nulle et de schématiser le comportement viscoplastique par des modèles de fluides « très » visqueux.

Si les décharges sont effectuées à des vitesses assez élevées ($\dot{\varepsilon} > 0{,}1 \cdot 10^{-2}\ s^{-1}$), on constate que le comportement élastique n'est pas modifié par les déformations viscoplastiques si bien que l'hypothèse de partition des déformations avec découplage peut encore être appliquée dans la plupart des cas (en petites déformations) :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

où ε_e est la déformation élastique linéaire et ε_p la déformation viscoplastique. Plus rarement il peut être nécessaire d'ajouter une déformation plastique instantanée, mais ce cas n'est pas envisagé explicitement dans ce chapitre :

en fait on préfèrera employer une combinaison de l'écrouissage par la déformation et de l'écrouissage par le temps pour rendre compte de la superposition d'une déformation plastique dite instantanée et d'une déformation viscoplastique.

Enfin, on peut remarquer que les courbes d'écrouissage à différentes vitesses se déduisent grossièrement les unes des autres par une affinité sur les contraintes. L'écrouissage est donc essentiellement gouverné par la déformation et peut d'ailleurs s'exprimer par des expressions analytiques du même type que celles utilisées en plasticité.

2.2. Résultats tirés des essais de fluage

La courbe de fluage classique représente l'évolution en fonction du temps de la déformation d'un matériau soumis à une contrainte unidimensionnelle constante à température constante (fig. 3).

Cette courbe met généralement en évidence trois phases :

— Une phase de fluage « primaire » ($0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_1$) au cours de laquelle l'écrouissage du matériau engendre une diminution de la vitesse de fluage initialement très grande.

— Une phase de fluage « secondaire » ($\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$) pendant laquelle la vitesse de fluage est sensiblement constante.

— Une phase de fluage « tertiaire » ($\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_R$) où l'augmentation régulière de la vitesse jusqu'à la déformation de rupture ε_R est due à deux causes : la diminution de section dans les essais conduits à force constante et le développement du phénomène d'endommagement qui réduit progressivement la résistance du matériau.

Le fluage primaire de nombreux métaux et alliages est assez bien représenté par la loi d'Andrade :

$$\varepsilon = At^{1/q}$$

où A et q sont des coefficients qui dépendent du matériau et de la température ; les valeurs de q sont généralement proches de 3.

Différents essais de fluage effectués à des contraintes différentes, mais à même température permettent la mise en évidence de la relation qui existe entre la vitesse de fluage secondaire $\dot{\varepsilon}_p^*$ et la contrainte ; c'est la loi de Norton :

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_p^* = \left(\frac{\sigma}{\lambda^*}\right)^{N^*}}$$

λ^* et N^* sont d'autres coefficients caractéristiques de chaque matériau et de la température. Un exemple est donné sur la figure 4.

La valeur de l'exposant N^* (et en conséquence du coefficient λ^*) dépend souvent du domaine de vitesse considéré : pour les grandes vitesses, l'effet géométrique de contraction devient prépondérant et les valeurs obtenues pour N^* sont généralement plus grandes. Au contraire, pour les faibles vitesses

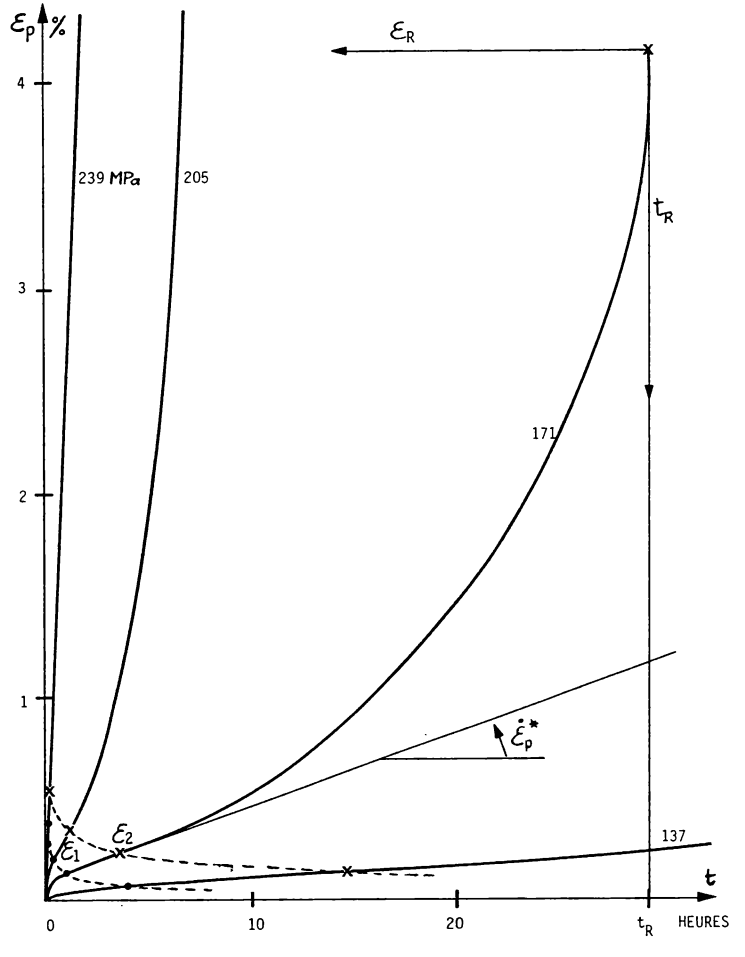


Fig. 3. Essais de fluage à différentes contraintes. Superalliage IN 100 à 1 000 °C.

l'exposant a tendance à diminuer, comme on le voit sur l'exemple de la figure 5. Même en corrigeant des effets de contraction, de telles variations sont souvent observées. L'écrouissage cinématique et les effets de restauration (§ 4.4.2) permettent d'en tenir compte. Un autre moyen est de modifier la fonction puissance, par exemple avec une loi de fluage secondaire telle que :

$$\dot{\varepsilon}_p^* = \left(\frac{\sigma}{\lambda_0}\right)^{N_0} \exp(\alpha \sigma^{N_0+1}) .$$

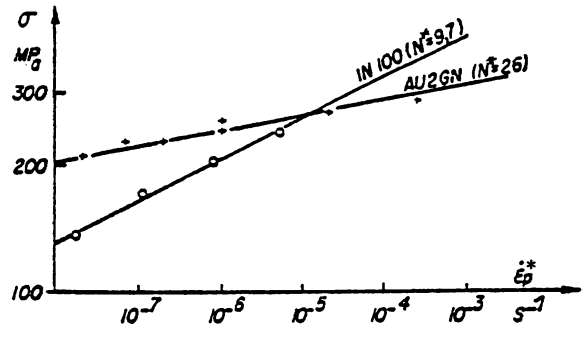


Fig. 4. Diagrammes de Norton. NK 15 CATu-1 000 °C (N = 9,7) ; Alliage léger : AU 2 GNT 6, T = 180 °C (N = 26).

Cela correspond à une loi puissance dans laquelle l'exposant de la contrainte serait égal à :

$$N_0 + \alpha(N_0 + 1)\,\sigma^{N_0+1}$$

donc un exposant variant entre N_0 pour σ petit et l'infini pour σ grand : cela correspond assez bien aux observations expérimentales, comme le montre l'exemple de la figure 5.

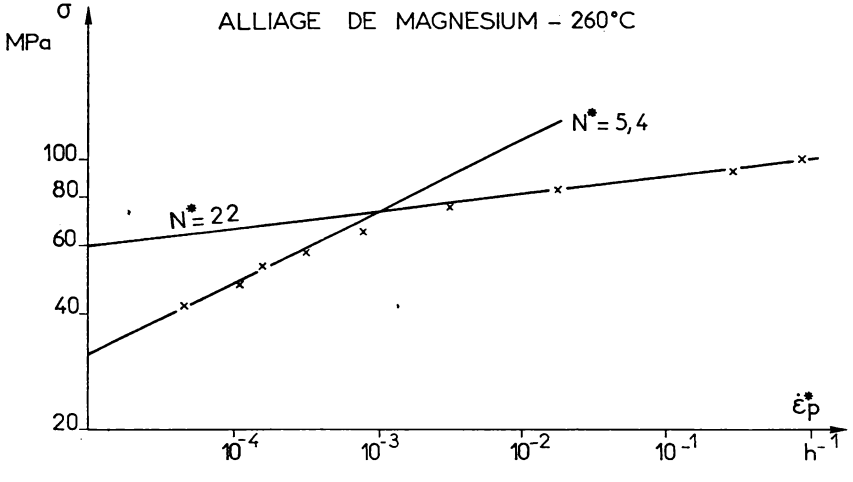


Fig. 5. Evolution de l'exposant de Norton en fonction de la contrainte. Exemple d'un alliage de magnésium à 260 °C (d'après Storakers).

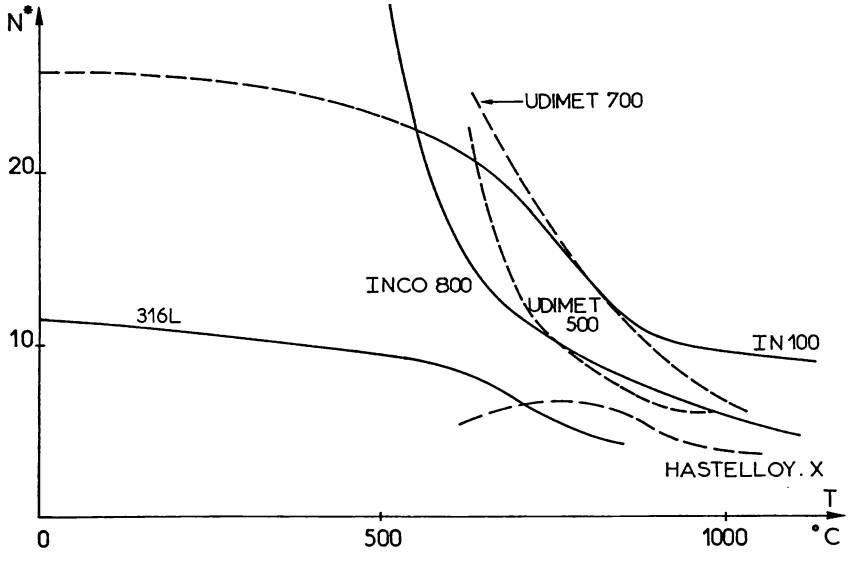


Fig. 6. Evolution de l'exposant de Norton en fonction de la température pour quelques matériaux.

Matériau	Etat	T °C	N^*	λ^* (MPa, h)
IN 100	Protégé	1 000	9,7	860
UDIMET 700	Forgé	900	9,5	1 340
HASTELLOY X		730	6,6	1 909
INCO 800		650	13,4	715
"		980	6,1	196
316 L	Hypertrempé	600	8,2	765
"		760	5,3	1 380
UDIMET 500		900	6,5	1 980
L 605		980	7,6	446
B 1900		980	5,7	3 240
MAR M509		980	6,6	912
AU2GN		180	26	412
Acier 13 % Cr	Forgé	400	7,7	2 028
Acier ASTM 321	Laminé	500	5,6	1 780
Acier ASTM 316	Laminé	732	6,4	138
Acier ASTM 310	Laminé	700	5	553
Nimonic 75	Forgé	650	2,7	25 650

Tableau 7. Coefficients de la loi de Norton.

Par ailleurs, en fonction de la température, l'exposant de Norton est généralement décroissant : on retrouve le fait que le matériau est de plus en plus influencé par la viscosité (une grande valeur de N^* correspond à une faible influence de la vitesse).

La figure 6 et le tableau 7 donnent quelques exemples de valeurs des coefficients de Norton. De façon courante les valeurs de l'exposant N^* sont comprises entre 3 et 20. Ici, il s'agit de valeurs déterminées dans le domaine où N^* est approximativement constant (domaine de vitesse compris entre 10^{-8} et 10^{-3} s^{-1}).

Le fluage tertiaire sera étudié au chapitre 7 dans le cadre du couplage entre la viscoplasticité et l'endommagement. Pour certains matériaux (l'alliage de titane TA6V par exemple) sollicités à vitesse faible ($\dot{\varepsilon} \simeq 10^{-3}$ à 10^{-4} s^{-1}), dans des conditions particulières de température ($T \simeq 850$ à 950 °C), cette phase de fluage tertiaire est rejetée à des valeurs de déformation très élevées ($\varepsilon \simeq 1\,000$ à $2\,000$ %); c'est le domaine de la *super (visco)plasticité.*

D'autres éléments peuvent être tirés d'essais de fluage particuliers : les essais à plusieurs niveaux. La figure 8*a* indique schématiquement comment de tels essais permettent de trancher entre deux hypothèses d'écrouissage couramment admises (les plus simples) pour traduire le fluage primaire :

— l'écrouissage par la déformation pour lequel la courbe de fluage au second niveau (σ_2) se déduit de la courbe de référence (AC) à la contrainte σ_2 par la translation suivant l'axe des temps (même déformation);

— l'écrouissage par le temps pour lequel la courbe (BC) est translatée parallèlement à l'axe des déformations (même temps).

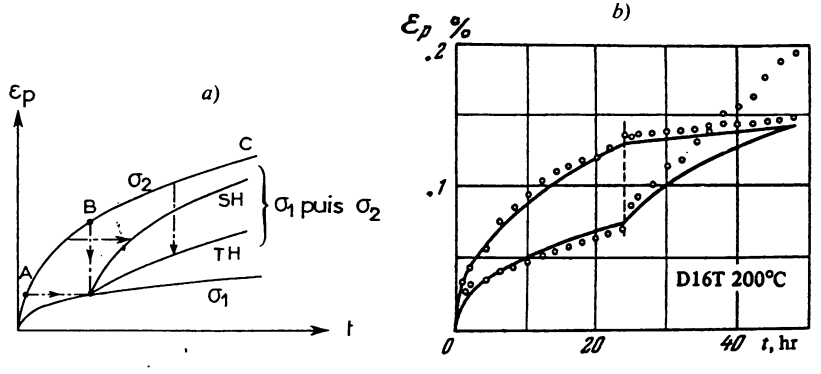


Fig. 8. Essais de fluage à deux niveaux. (*a*) Schéma de l'écrouissage par la déformation et de l'écrouissage par le temps. (*b*) Exemple de l'alliage d'aluminium D16T comparé à l'écrouissage par la déformation (d'après Rabotnov).

Pendant la phase de fluage primaire, ces deux hypothèses conduisent à des résultats très différents, surtout lorsque $\sigma_2 > \sigma_1$. Le plus souvent les expériences réalisées sur divers matériaux montrent soit la validité de l'hypo-

thèse d'écrouissage par la déformation, soit même une légère sous-estimation des vitesses par cette hypothèse (dans le cas où $\sigma_2 > \sigma_1$). La figure 8*b* donne un exemple de telles comparaisons.

2.3. Résultats tirés des essais de relaxation

Les essais de relaxation mettent en évidence la diminution de contrainte résultant du maintien d'un élément de volume unidimensionnel à déformation constante (fig. 9).

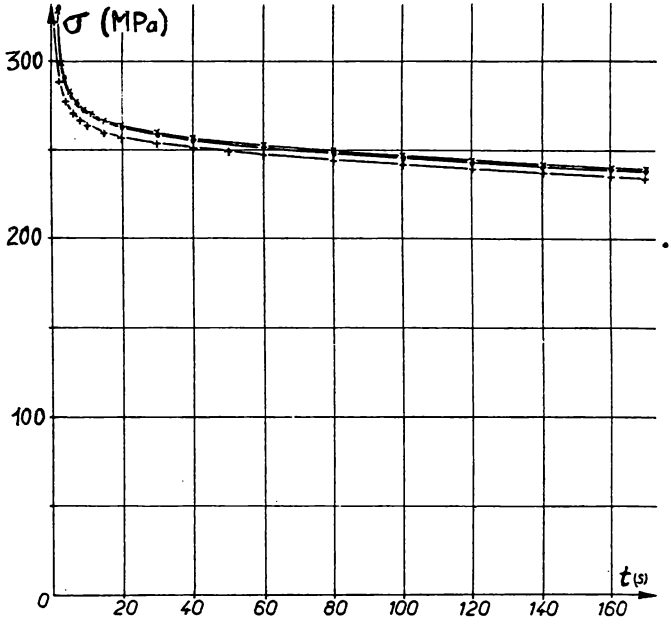


Fig. 9. Trois essais de relaxation. Alliage AU4G trempé vieilli, 200 °C.

En fait cet essai caractérise la viscosité et permet de déterminer la relation qui existe entre la contrainte et la vitesse de déformation viscoplastique. La relation de partition peut être écrite en vitesse :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p$$

ou, avec la loi d'élasticité linéaire : $\dot{\varepsilon}_e = \dot{\sigma}/E$ et pour le cas de relaxation où $\dot{\varepsilon} = 0$:

$$\dot{\varepsilon}_p = -\frac{\dot{\sigma}}{E}.$$

Ainsi chaque point de la courbe de relaxation $\sigma(t)$ donne la contrainte et la vitesse de déformation viscoplastique $\dot{\varepsilon}_p = -\frac{\dot{\sigma}}{E}$.

Les expériences montrent que l'on peut ainsi atteindre des vitesses de déformation viscoplastique très faibles ($\dot{\varepsilon}_p \simeq 10^{-10}$ à $10^{-12}\,s^{-1}$) en des temps relativement courts. Cette propriété est mise à profit dans la méthode « relaxation-fluage » décrite au paragraphe 4.2.4.

2.4. Loi d'écrouissage-viscosité

Les différents résultats qui viennent d'être décrits peuvent être rassemblés dans une loi de comportement unidimensionnelle à trois paramètres qui représente assez bien les phénomènes de viscoplasticité à déformation monotone croissante ($\dot{\varepsilon} \geqslant 0$).

Pour chacun des trois types d'essais, on peut calculer les évolutions de ε_p et $\dot{\varepsilon}_p$ afin de les représenter dans un graphe $(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p)$ paramétré en contrainte (fig. 10). Pour de nombreux matériaux un ensemble d'essais d'écrouissage, de fluage et de relaxation, à une température fixée, définissent dans le plan $(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p)$ des isocontraintes avec une marge d'incertitude qui ne dépasse pas la dispersion des mesures. Ceci prouve expérimentalement qu'une loi mécanique d'état :

$$\sigma = f(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p)$$

peut être définie dans le domaine de variation exploré des variables ε_p et $\dot{\varepsilon}_p$. On retrouve là, dans un contexte plus général, le résultat déduit des essais de fluage à deux niveaux, à savoir que la déformation plastique permet de décrire assez correctement l'état d'écrouissage du matériau.

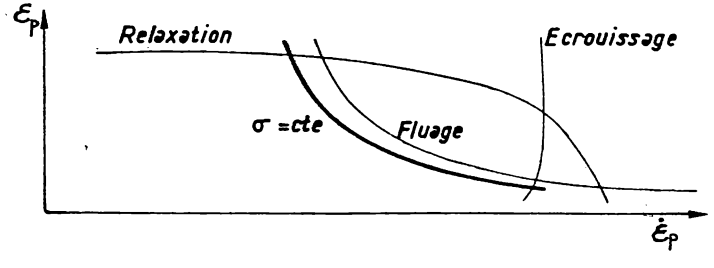


Fig. 10. Représentation des 3 essais de base dans l'espace des variables ε_p et $\dot{\varepsilon}_p$.

Compte tenu de la loi de Norton et de l'affinité des courbes d'écrouissage, une particularisation raisonnable de la fonction f consiste à prendre un produit de fonctions puissance. En adjoignant la loi d'élasticité linéaire, la loi d'écrouissage-viscosité s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_e + \varepsilon_p \\ \sigma &= E\varepsilon_e \\ \sigma &= K\varepsilon_p^{1/M}\,\dot{\varepsilon}_p^{1/N} \end{aligned}$$

N, M, K sont les trois paramètres, fonctions de la température qui dépendent du matériau :

N est l'exposant de viscosité dont la valeur peut être de l'ordre de 2 pour les matériaux très visqueux et de 100 pour les matériaux peu visqueux, justiciables d'une loi de plasticité ;

M est l'exposant d'écrouissage qui varie de 2 à 50 environ ;

K est le coefficient de résistance dont l'ordre de grandeur pour les métaux varie de 100 à 10 000 (unités : MPa, s).

Des valeurs particulières de N, M, K sont données dans le tableau 11.

Matériau	T [°C]	N	M	K [MPa, s]
Acier 0,35 % C	450	15	6	762
MARM 509	900	11	16	650
Acier Z10 CNT 18	800	13	6	400
HASTELLOY X	650	5,6	8,4	8 843
AISI 304	20	65	5	752
IN 100	800	17	13,2	2 140
	900	12,2	10,5	2 110
	1 000	10,8	9,8	1 450
	1 100	9,8	9,5	875
UDIMET 700	800	13,5	57	1 620
	900	9,5	63,3	1 480
	1 000	7	70	1 080
TA6V	350	120	11	970
INCO 718	550	140	13	1 695
316 L	600	88	18	1 538
	20	65	14	458
	550	120	6	494
Alliage MG	260	24,6	18,9	165
AU4G Recuit	208	12,8	15,3	262
AU4G Trempé vieilli	130	50	21	502
	200	27	33,4	386

Tableau 11. Coefficients de la loi d'écrouissage-viscosité.

La figure 12 montre un exemple de la représentativité de la loi d'écrouissage-viscosité comparée à des résultats d'essais d'écrouissage, fluage et relaxation.

Remarquons que cette loi écrite sous forme d'un produit de deux fonctions puissance contient comme cas particuliers :

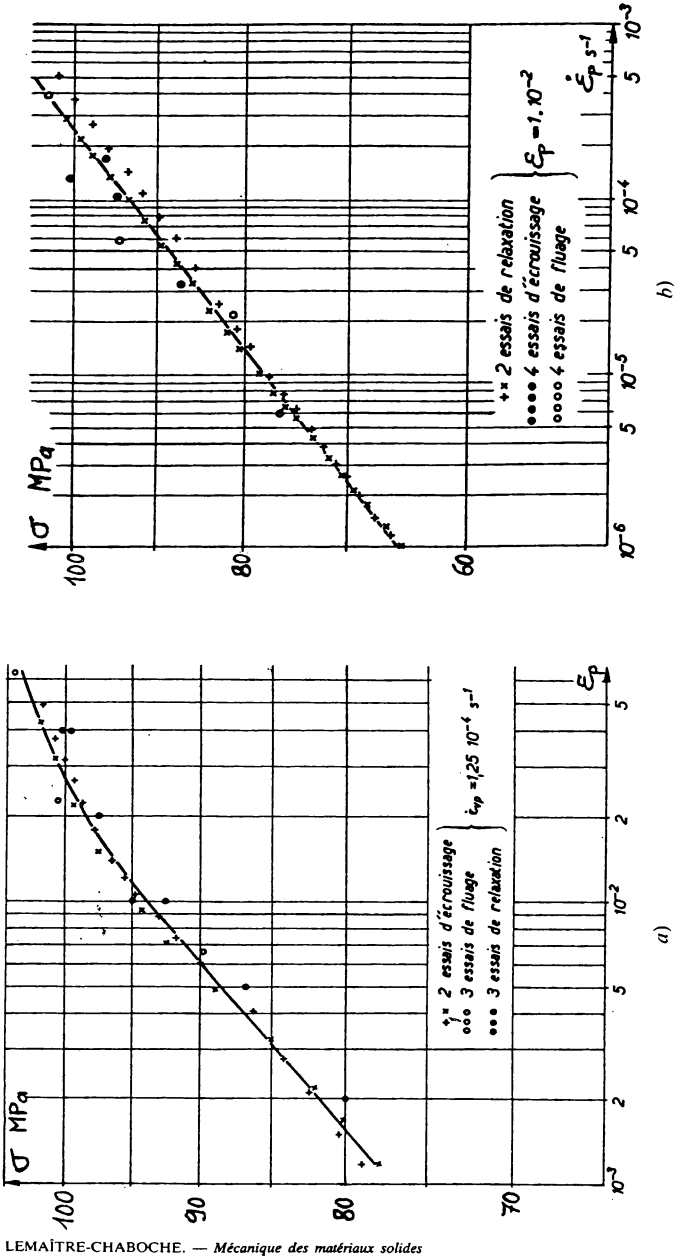


Fig. 12. Graphes des fonctions d'écrouissage (*a*) et de relaxation (*b*) Alliage AU4G recuit, $T = 208$ °C.

— la loi d'écrouissage la plus simple déjà utilisée au chapitre précédent dans le cadre de la plasticité (avec $\sigma_Y = 0$) : il suffit de prendre N suffisamment grand ;

— la loi d'Andrade pour le fluage primaire : en intégrant l'équation $\sigma = K\varepsilon_p^{1/M}\,\dot{\varepsilon}_p^{1/N}$ pour une contrainte constante (avec comme condition initiale $\varepsilon_p(0) = 0$), on obtient en effet :

$$\varepsilon_p = \left[\frac{N+M}{M}\left(\frac{\sigma}{K}\right)^N\right]^{\frac{M}{N+M}} t^{\frac{M}{N+M}}$$

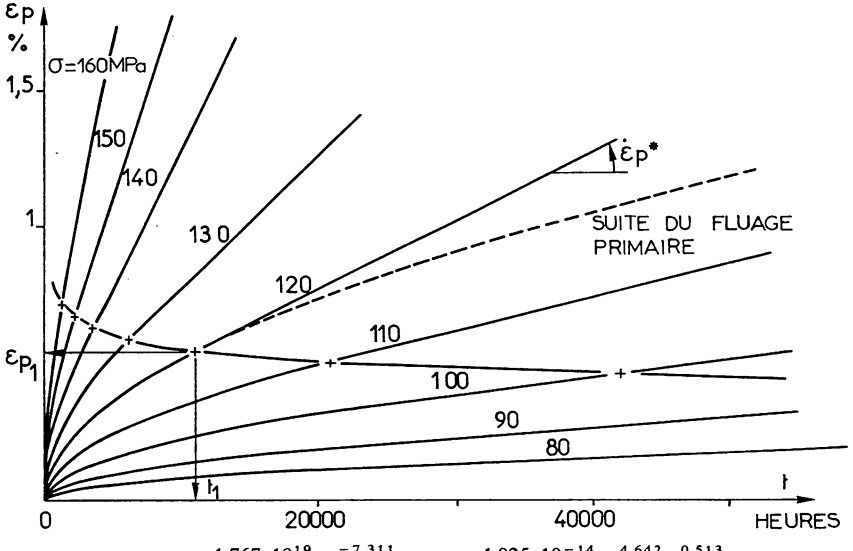
pour les valeurs usuelles de N et M on retrouve bien un exposant $\dfrac{1}{q} = \dfrac{M}{N+M}$ avec q compris entre 1,5 et 4 ;

— la loi de Norton pour le fluage secondaire n'est pas retrouvée directement mais elle peut être obtenue comme cas limite en posant (fig. 13)

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_p^* = \text{Cte} \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_1 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_p \geqslant \varepsilon_{p_1}$$

où t_1 dépend de la contrainte appliquée. On prendra par exemple une relation puissance entre t_1 et la déformation au début du fluage secondaire, ε_{p_1} :

$$\varepsilon_{p_1} = A^* t_1^{-\alpha}.$$



$t < t_1 = 1{,}767\ 10^{19}\ \sigma^{-7{,}311} \rightarrow \varepsilon_p = 1{,}025\ 10^{-14}\ \sigma^{4{,}642}\ t^{0{,}513}$
$t > t_1 \rightarrow \varepsilon_p = 2{,}268\ 10^{-24}\ \sigma^{8{,}2}(t - t_1) + 7{,}666\ 10^{-5}\ \sigma^{-2{,}669}$
$N^* = 8{,}2 \quad \lambda^* = 764{,}6 \quad N = 9{,}04 \quad M = 9{,}54 \quad K = 1\,111{,}3$

Fig. 13. Réseau de courbes de fluage calculées (acier inoxydable 316 SPH à 550 °C).

Une telle décroissance est généralement constatée. La combinaison des relations précédentes permet d'identifier la vitesse $\dot{\varepsilon}_p^* = \dot{\varepsilon}_p(\varepsilon_{p_1})$ avec celle donnée par la relation de Norton. On trouve alors α et A^* :

$$\alpha = \frac{1 - \frac{N^*}{N}}{N^* \frac{N+M}{NM} - 1}, \quad A^* = \left[\left(\frac{N+M}{M}\right)^{1-\frac{N^*}{N}} \left(\frac{K}{\lambda^*}\right)^{N^*}\right]^{\frac{1}{1-N^*\frac{N+M}{NM}}}.$$

Le fait que la déformation de début de fluage secondaire soit d'autant plus faible que la contrainte est faible montre que l'exposant de Norton vérifie

$$\frac{NM}{N+M} < N^* < N.$$

2.5. Influence de la température

Les phénomènes de viscosité qui interviennent dans les grains et aux joints de grains dans les métaux ou aux liaisons intermoléculaires dans les polymères sont très influencés par la température. Un réseau de courbes, tel que celui de la figure 14, montre combien la contrainte qui engendre une déformation viscoplastique donnée en un temps donné diminue en fonction de la température. Chaque point expérimental de ce réseau est le point ($\varepsilon_p = 0{,}2\ \%$, t) d'une courbe de fluage définie par la contrainte σ et la température T.

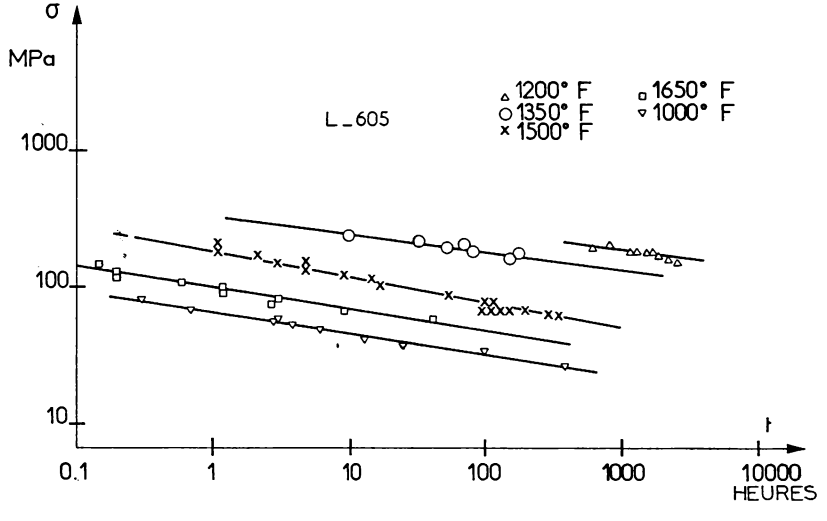


Fig. 14. Temps pour lequel la contrainte σ a provoqué un fluage de 0,2 %. Alliage base cobalt L-605 à plusieurs températures.

Un moyen de rendre compte de cette influence de la température est de considérer le fluage comme un phénomène thermiquement activé. La vitesse de fluage est considérée comme proportionnelle au nombre de sources activées, supposé donné par la loi de probabilité de Maxwell. Si h est l'énergie associée à une source et si ΔH est l'énergie d'activation de chaque source :

$$\dot{\varepsilon}_p \sim \int_{\Delta H}^{\infty} \frac{1}{kT} \exp\left(-\frac{h}{kT}\right) dh = \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right).$$

On définit ainsi une « équivalence » vitesse de fluage-température représentée par le paramètre de Dorn :

$$\dot{\varepsilon}_p \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right).$$

Le coefficient $\Delta H/k$ est de l'ordre de 15 000 °K à 35 000 °K pour les métaux usuels considérés entre 500 et 1 000 °K.

La loi d'écrouissage-viscosité tenant compte de la température s'écrit donc :

$$\sigma = K' \varepsilon_p^{1/M} \left[\dot{\varepsilon}_p \exp\left(\frac{\Delta H}{kT}\right)\right]^{1/N}.$$

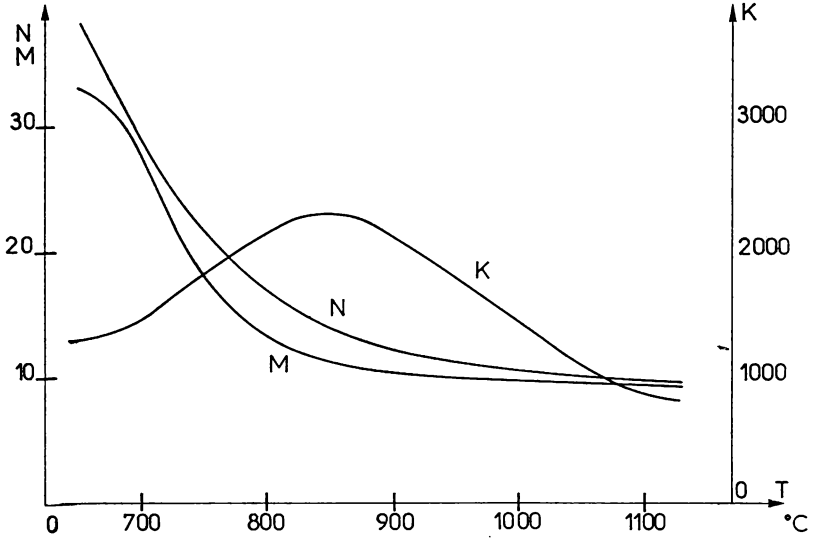


Fig. 15. Evolution des coefficients N, M, K en fonction de la température. Alliage réfractaire IN100 (non protégé).

Malheureusement l'énergie d'activation ΔH varie avec la contrainte et la température, si bien que cette écriture n'apporte pas de simplification par rapport au fait de considérer les coefficients K, M et N comme des fonctions de la température, sauf toutefois pour des faibles variations de température :

— si $T_0 < T\,(^\circ\mathrm{K}) < T_1$ tel que $\left|\dfrac{T_1 - T_0}{T_1}\right| \leqslant 5\,\%$, l'exploitation de la formule ci-dessus permet de définir la loi d'écrouissage-viscosité à une température T quelconque comprise entre T_0 et T_1, à partir de la valeur des coefficients $K_0\ M_0\ N_0$ déterminée à la température T_0 et de la valeur de K_1 déterminée à T_1 :

$$K = \frac{K_0^{T_0/T}}{K_1^{\frac{T_1}{T}\,\frac{T-T_0}{T_0-T_1}}}$$

— si $\dfrac{T - T_0}{T} > 5\,\%$ il faut introduire les trois fonctions de la température $K(T)$, $M(T)$ et $N(T)$ dont la figure 15 donne l'allure pour un exemple particulier.

2.6. Résultats tirés des essais cycliques

Les résultats d'essais cycliques à amplitude de contrainte ou de déformation imposées, réalisés sur des métaux aux températures qui engendrent un fluage sensible, mettent en évidence les mêmes phénomènes de durcissement ou d'adoucissement cycliques qu'aux températures moins élevées de la plasticité pure. La figure 16*a* montre un exemple d'évolution de l'amplitude de déformation plastique en fonction du nombre de cycles en contrainte imposée, pour un matériau qui s'adoucit cycliquement. Un matériau qui présente un durcissement cyclique à température ambiante donne des effets similaires à température élevée (exemple figure 16*b* pour l'acier 316 en déformation contrôlée).

Des effets du temps de deux types peuvent être mis en évidence par des essais cycliques :

— *L'influence de la viscosité du matériau* se décèle par des essais de fluage cyclique (temps de maintien égaux en traction et compression avec un contrôle en contrainte) (la figure 17*a* donne un exemple au cycle stabilisé), des essais de relaxation cyclique (maintien à déformation constante, généralement en traction comme sur la figure 18) et des essais à des fréquences différentes (exemple fig. 17*b*).

Dans chaque cas la déformation plastique, pour une même contrainte, a plus de temps pour se développer. En conséquence, la courbe cyclique (amplitude de contrainte-amplitude de déformation) n'est plus unique comme en plasticité ; elle dépend de la fréquence ou du temps de maintien (exemple de l'acier 316 sur la figure 19).

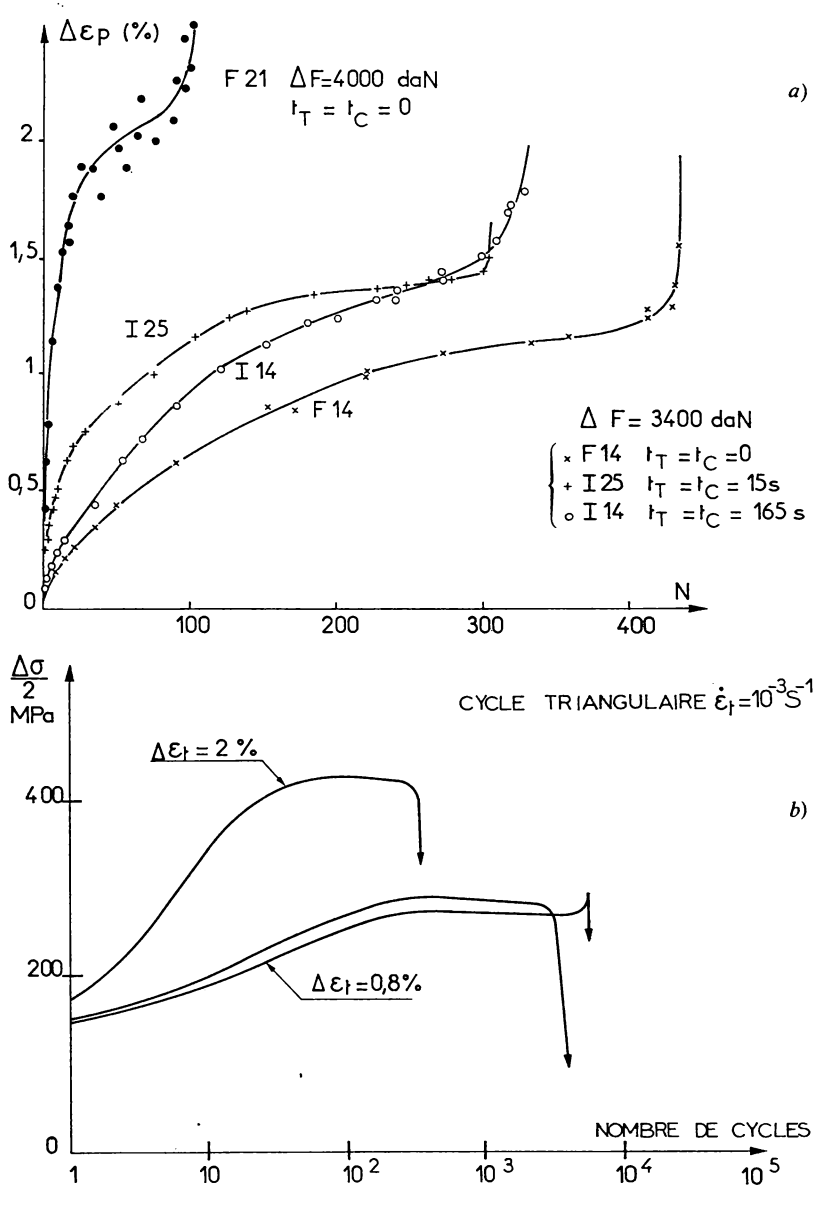


Fig. 16. (*a*) Adoucissement cyclique à contrainte contrôlée pour l'alliage INCO 718 à 550 °C.
(*b*) Durcissement cyclique à déformation contrôlée sur l'acier inoxydable 316 à 550 °C.

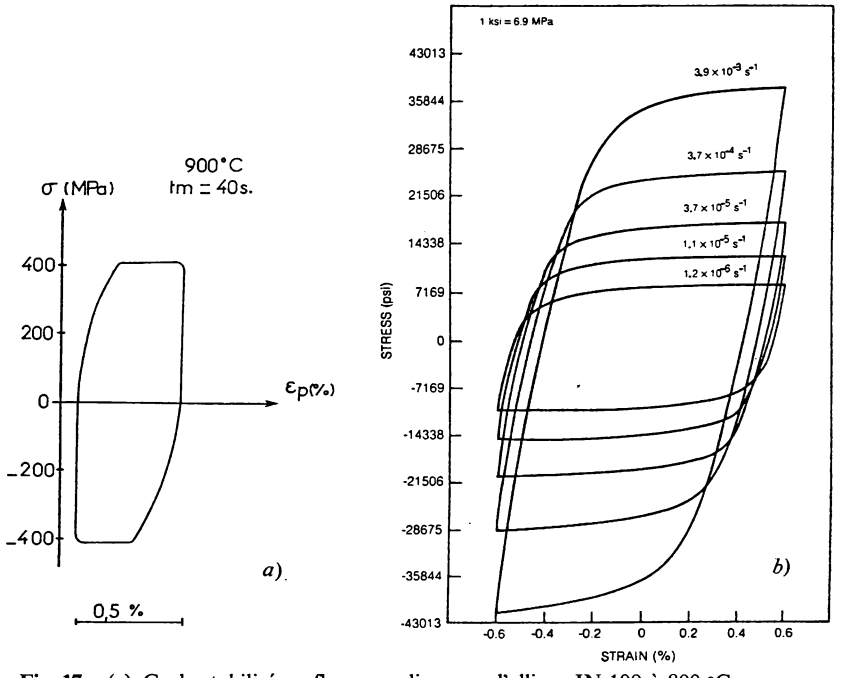


Fig. 17. (*a*) Cycle stabilisé en fluage cyclique sur l'alliage IN 100 à 800 °C.
(*b*) Effet de la vitesse de déformation sur les cycles stabilisés de l'alliage Hastelloy-X à 871 °C (d'après Walker).

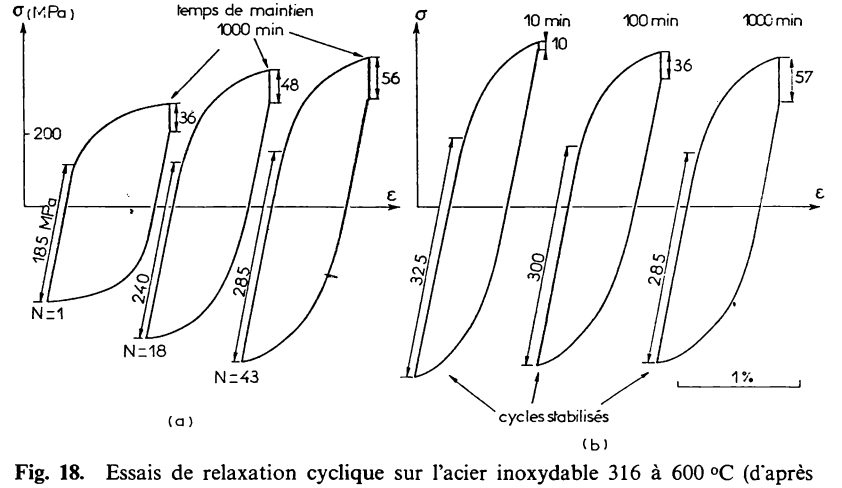


Fig. 18. Essais de relaxation cyclique sur l'acier inoxydable 316 à 600 °C (d'après Goodall).
(*a*) Evolution entre le premier cycle et le cycle stabilisé.
(*b*) Influence du temps de maintien sur le cycle stabilisé.

Pour un matériau avec fort durcissement cyclique,on peut observer au cours du cyclage une augmentation de la contrainte maximale correspondant à une augmentation du domaine d'élasticité apparent (fig. 18*a*) et une augmentation de la contrainte relaxée au cours du temps de maintien.

— *Les effets de restauration ou de recouvrance* qui peuvent être observés indirectement, soit par des décharges en fluage, soit dans les essais cycliques eux-mêmes. Dans le premier cas, après décharge complète on peut mesurer une recouvrance partielle de la déformation viscoplastique, après un temps suffisamment long (c'est l'essai de recouvrance, schématisé sur la figure 20*a*). Par fluage après décharge partielle de $\delta\sigma$, on peut observer le phénomène d'hésitation au fluage décrit schématiquement sur la figure 20*b* : la vitesse de déformation, d'abord nulle pendant un temps d'incubation δt s'accroît progressivement jusqu'à atteindre la vitesse nominale (sous la contrainte $\sigma - \delta\sigma$). Notons que ces essais permettent de prouver l'existence d'une contrainte interne σ_i telle que la vitesse de fluage soit proportionnelle à $\sigma - \sigma_i$:

$$\dot{\varepsilon}_p = f(\sigma, \ldots)\,(\sigma - \sigma_i)$$

et de quantifier l'effet de restauration de cette contrainte interne, correspondant à une restauration lente de la structure cristalline. Dans le cas des essais cycliques à déformation imposée l'influence de la restauration engendre une diminution de l'amplitude de contrainte au cycle stabilisé lorsque le temps de maintien augmente (exemple de l'acier inoxydable 316 à 600 °C sur la figure 18*b*) ; l'effet de restauration, d'autant plus important que la durée d'essai est grande, compense en partie l'effet d'écrouissage cyclique par déformation.

Les différentes observations présentées dans ce paragraphe n'ont bien sûr valeur que d'exemple car de nombreux effets complexes peuvent interagir et conduire à des résultats quelquefois contradictoires : dans le domaine des températures élevées, les métaux sont quelquefois imparfaitement stables, ce qui complique singulièrement l'étude de leur comportement mécanique, puisqu'alors le temps, caractérisant l'âge, intervient comme variable d'état (voir § 4.4).

2.7. Résultats tirés d'essais multi-axiaux

Il existe malheureusement peu de résultats d'essais multidimensionnels car, à la difficulté des chargements complexes, s'ajoutent les problèmes liés aux températures moyennes et élevées. Les quelques résultats d'expériences en traction-torsion-pression interne sur des éprouvettes tubulaires ou d'expériences en bitraction sur des éprouvettes en croix montrent qu'en chargement radial, les notions de contrainte équivalente et de déformation équivalente

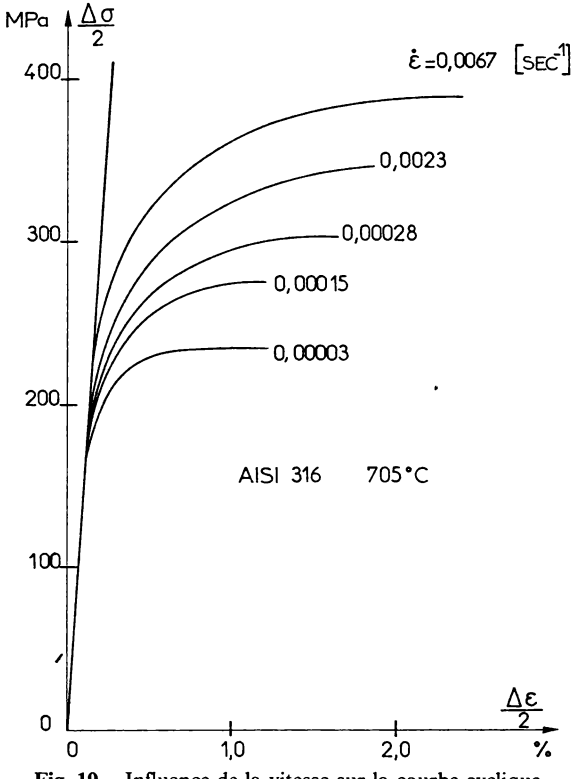


Fig. 19. Influence de la vitesse sur la courbe cyclique de l'acier inoxydable 316 à 705 °C (d'après Franklin).

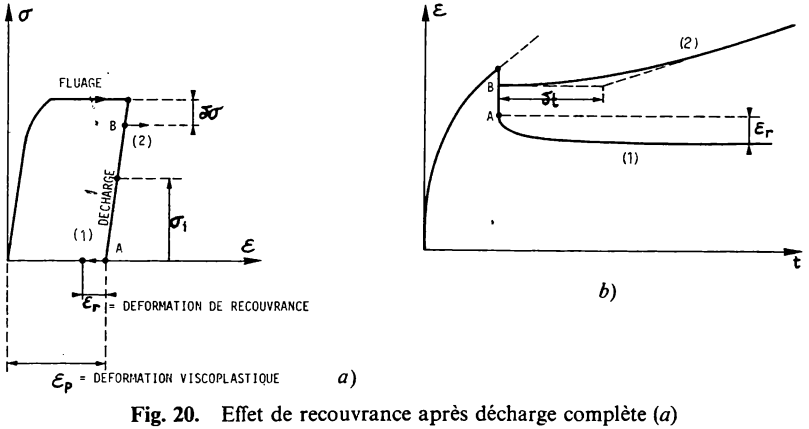


Fig. 20. Effet de recouvrance après décharge complète (*a*) et effet d'hésitation au fluage après décharge partielle (schématique) (*b*).

au sens du critère de Von Mises peuvent être utilisées pour définir, dans l'espace des contraintes, les surfaces isovitesse de déformation, à déformation donnée.

L'hypothèse d'incompressibilité viscoplastique est généralement bien confirmée expérimentalement pour les métaux et alliages. De même la règle de normalité est bien vérifiée et certaines expériences ont mis en évidence l'influence prépondérante du deuxième invariant du déviateur des contraintes (le troisième invariant ne jouant qu'un rôle mineur).

Les surfaces équipotentielles initiales vérifient généralement bien le critère de Von Mises. De plus, des essais de fluage pour différents états de contrainte (σ_{11}, σ_{12}), après un fluage initial, mettent en évidence le caractère essentiellement cinématique de l'écrouissage du matériau, même à température élevée. La figure 21 permet d'observer cette tendance par la mesure de la direction de l'écoulement ($\dot{\varepsilon}_{p_{11}}$, $\dot{\varepsilon}_{p_{12}}$). Le module de la vitesse de déformation est bien sûr d'autant plus grand que l'état de contrainte est plus éloigné du centre des surfaces (contrainte interne ou contrainte cinématique). Ces essais multiaxiaux confirment donc les observations déjà faites, par fluage en traction, sur l'existence d'une contrainte interne.

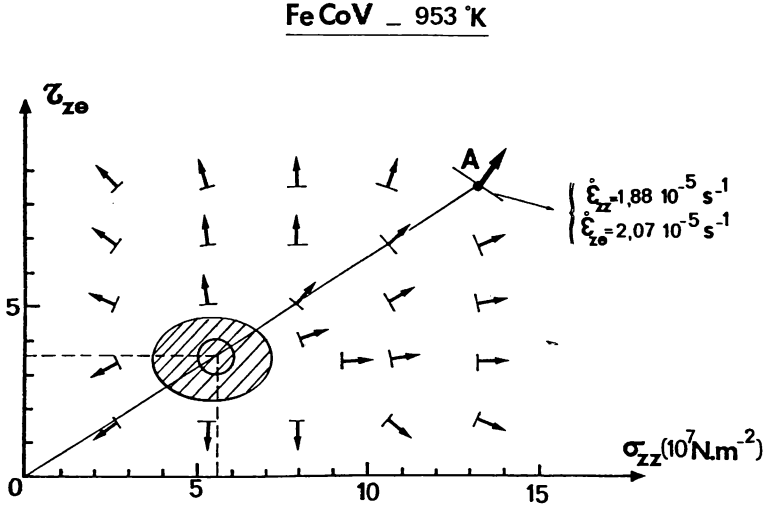


Fig. 21. Directions d'écoulements pour les chargements de fluage σ_{zz}-$\tau_{z\theta}$ après fluage initial en A. Alliage FeCoV à 680 °C (d'après C. Oytana).

3. FORMULATION GÉNÉRALE DES LOIS DE COMPORTEMENT

Le formalisme utilisé pour la viscoplasticité est tout à fait similaire à celui qui a été décrit pour la plasticité au chapitre 5. On se limite donc ici à un résumé de ce qui a été évoqué au chapitre précédent, en insistant seulement sur les aspects nouveaux liés à l'influence du temps.

3.1. Partition des déformations

On se place, là encore, dans le cadre de l'hypothèse de partition de la déformation totale en une déformation élastique (réversible) et une déformation inélastique. En petites déformations :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{in}} .$$

La déformation inélastique (non réversible instantanément) correspond à l'ensemble des phénomènes physiques suivants :

— une déformation plastique instantanée, indépendante du temps,

— une déformation viscoplastique (quelquefois qualifiée de déformation de fluage),

— une déformation anélastique ou à élasticité retardée.

Le premier type de déformation inélastique, déjà étudié au chapitre 5 sera supposé inexistant dans le cadre du présent développement. Sa prise en compte sera cependant évoquée au paragraphe 4.4.4 bien que, pour la plupart des matériaux et dans un large domaine de température, la théorie de la viscoplasticité seule soit suffisante pour décrire l'ensemble des observations expérimentales.

La déformation anélastique est susceptible d'être traitée dans le cadre de la viscoélasticité (chap. 4). Sa mise en évidence dans les métaux et alliages est difficile, elle ne sera donc pas étudiée ici en tant que telle. Par contre, les effets de recouvrance partielle de la déformation plastique (c'est ce qui a justifié quelquefois l'introduction de l'anélasticité) pourront être décrits par un choix adéquat des variables internes.

Conformément aux remarques précédentes, une seule déformation irréversible est donc considérée et l'hypothèse de partition s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est la déformation viscoplastique.

3.2. Choix des variables thermodynamiques

Les variables thermodynamiques ou variables indépendantes sont les variables observables, la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la température T, et les

variables internes décrivant l'état actuel du matériau : ε^p, V_k. Par le traitement général indiqué au chapitre 2, on montre que l'énergie libre dépend de la déformation élastique, de la température et des variables internes V_k :

$$\Psi = \Psi(\varepsilon^e, T, V_k).$$

La contrainte et l'entropie sont les variables thermodynamiques associées à ε^e et T (ρ est la masse volumique) :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} \qquad s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}.$$

Comme pour le cas de la plasticité indépendante du temps, on utilise comme variables internes une variable d'écrouissage isotrope, de nature scalaire, notée r. Comme cas particulier on peut prendre la déformation plastique cumulée p :

$$p = \int_0^t \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p(\tau) : \dot{\varepsilon}^p(\tau) \right)^{1/2} d\tau .$$

On utilise aussi des variables d'écrouissage de nature tensorielle appelées variables cinématiques, comme la variable α déjà introduite.

Du point de vue physique, ces variables d'écrouissage sont associées, d'une part, à la densité de dislocation (nécessairement isotrope) et, d'autre part, aux incompatibilités des déformations viscoplastiques au sein du polycristal. La variable d'écrouissage isotrope r sera généralement croissante, sauf intervention éventuelle de processus de restauration (dans ce cas r n'est plus exactement la déformation plastique cumulée p). En cas de chargement cyclique la variable cinématique α, au contraire, n'évoluera pas de façon monotone.

A ces variables d'écrouissage pourront s'ajouter d'autres variables internes m_k permettant de décrire l'état actuel de la microstructure. Ces variables interviennent de façon macroscopique, introduisant la différence entre l'état normal, métastable, du matériau et l'état actuel en cours d'instabilité microstructurale. Dans le cas des matériaux physicochimiquement stables, de telles variables n'interviennent évidemment pas.

Là encore on suppose le découplage entre le comportement élastique et l'écrouissage, l'énergie libre spécifique se décomposant en :

$$\Psi = \Psi_e(\varepsilon^e, T) + \Psi_p(\alpha, r, m_k, T)$$

et les variables thermodynamiques associées aux variables d'écrouissage

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r} \qquad \mathbf{X} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}$$

représentent d'une part la dimension du domaine actuel d'élasticité (ou taille des équipotentielles de dissipation), d'autre part le centre de ce domaine, comme l'indique schématiquement la figure 18 du chapitre 5.

On notera de plus :

$$M_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial m_k}.$$

De la même façon qu'en plasticité, on fait l'hypothèse du découplage entre dissipation thermique et dissipation intrinsèque. Le second principe se ramène alors à :

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - R\dot{r} - M_k \dot{m}_k \geqslant 0 . \quad *$$

3.3. Potentiel de dissipation

3.3.1. *Lois de normalité*

La notion de surface de charge et de critère de charge-décharge n'est plus nécessaire comme en plasticité. Elle est remplacée par une famille de surfaces équipotentielles : ce sont les surfaces de l'espace des contraintes en chaque point desquelles le module de la vitesse de déformation est le même (la dissipation est la même). La surface de potentiel nul est la surface limitant le domaine d'élasticité. On retrouve ainsi la figure 19 du chapitre 5 dans laquelle la surface de potentiel infini est rejetée à l'infini : les déformations plastiques instantanées sont considérées comme négligeables.

La généralisation à toutes les variables de la notion de surfaces équipotentielles conduit à la définition du potentiel de dissipation qui s'exprime sous la forme duale :

$$\varphi^* = \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, M_k ; T, \boldsymbol{\alpha}, r, m_k)$$

où les variables d'état T, $\boldsymbol{\alpha}$, r, m_k jouent uniquement le rôle de paramètres. On en déduit les lois de normalité des matériaux standards généralisés comme on l'a vu au chapitre 2 :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\dot{r} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial R}$$

$$\dot{m}_k = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial M_k}.$$

La dissipation intrinsèque s'exprime maintenant par :

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{X} : \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{X}} + R \frac{\partial \varphi^*}{\partial R} + M_k \frac{\partial \varphi^*}{\partial M_k}.$$

* Les deux points : désignent le produit tensoriel contracté sur deux indices.

On suppose que le potentiel de dissipation vérifie les propriétés suivantes :

φ^* est une fonction convexe des composantes de chacune des variables dépendantes $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{X}$, R, M_k.

φ^* est toujours positif et contient l'origine, c'est-à-dire s'annule pour $\sigma_{ij} = X_{ij} = R = M_k = 0$:

$$\varphi^*(0, 0, 0, 0\,; T, \boldsymbol{\sigma}, r, m_k) = 0$$

quels que soient T, $\boldsymbol{\alpha}$, r, m_k.

Sous ces deux conditions la dissipation mécanique est telle que (cf. chap. 2) :

$$\Phi_1 \geqslant \varphi^* \geqslant 0$$

ce qui permet de vérifier le second principe de la Thermodynamique.

3.3.2. *Particularisation du potentiel*

Dans la pratique les lois de viscoplasticité, qui comprennent éventuellement des effets de restauration, font intervenir un potentiel de dissipation se décomposant en :

$$\varphi^* = \Omega_p + \Omega_r$$

$$\Omega_p = \Omega_p(J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k, \mathbf{X}, R, M_k\,; T, \boldsymbol{\alpha}, r, m_k)$$

$$\Omega_r = \Omega_r(\mathbf{X}, R, M_k\,; T, \boldsymbol{\alpha}, r, m_k).$$

Ω_p donne l'expression des surfaces équipotentielles dans l'espace des contraintes. Celles-ci dépendent éventuellement de $\mathbf{X}$, de R et des variables M_k. Ω_r est le potentiel de restauration. Il intervient même lorsque $\Omega_p = 0$.

$J(.)$ désigne une norme de l'espace des contraintes, $J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k = 0$ correspondant, comme en plasticité, à l'expression du domaine actuel d'élasticité. La convexité de Ω_p est alors nécessaire seulement vis-à-vis des quantités $J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k$, X_{ij}, R, M_k, celle de Ω_r vis-à-vis de X_{ij}, R, M_k.

Notons déjà que, sous la décomposition qui précède, la règle de normalité implique nécessairement :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega_p}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{r} = -\frac{\partial \Omega_p}{\partial J} - \frac{\partial \Omega_r}{\partial R}.$$

Dans le cas particulier d'un matériau de Von Mises et lorsque la variable isotrope R n'intervient que dans l'expression

$$J - R - k = J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k = \left[\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}')\right]^{1/2} - R - k$$

où $\boldsymbol{\sigma}'$ et $\mathbf{X}'$ sont les déviateurs de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{X}$, on trouve :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2}\frac{\partial \Omega_p}{\partial J}\frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J} = \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J}$$

$$\dot{r} = \dot{p} - \frac{\partial \Omega_r}{\partial R}\,.$$

p est bien la déformation plastique cumulée puisque :

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right)^{1/2}$$

et la variable interne r s'identifie avec p lorsque les effets de restauration sont négligeables ($\Omega_r = 0$).

4. LOIS DE COMPORTEMENT PARTICULIÈRES

Un certain nombre de lois sont présentées dans les paragraphes suivants dans un ordre croissant de complexité, auquel correspondent des possibilités de modélisation également croissantes. Pour chaque type de loi on développe la formulation générale, le cas particulier du chargement uniaxial, le procédé d'identification à partir de l'expérience et on indique quelques résultats caractéristiques relatifs à divers matériaux métalliques. Ces lois sont introduites dans le cadre de la formulation générale. Le potentiel φ^* s'écrit le plus souvent à partir du potentiel de viscoplasticité $\Omega = \Omega_p$. Remarquons que ce potentiel pourrait être employé, dans l'espace des contraintes, sans faire appel à l'hypothèse de normalité généralisée.

4.1. Lois de viscoplasticité parfaite

4.1.1. *Formulation tridimensionnelle*

4.1.1.1. *Forme générale*

La loi de viscoplasticité parfaite est la généralisation tridimensionnelle de la relation entre vitesse de déformation viscoplastique et contrainte, établie en traction pour le fluage secondaire (§ 2.2). Elle est présentée ici dans le cadre d'un matériau isotrope pour lequel les déformations viscoplastiques se font à volume constant.

La viscoplasticité parfaite correspond au cas du matériau sans effet d'écrouissage (pas de fluage primaire) ; aucune variable interne n'est donc utilisée. Suivant le formalisme général du paragraphe précédent on définit un potentiel de dissipation :

$$\varphi^* = \Omega = \Omega(\boldsymbol{\sigma}\,;\, T)$$

représentant plus concrètement une famille de surfaces équipotentielles de l'espace des contraintes. Les hypothèses d'incompressibilité et d'isotropie permettent de ne retenir que les invariants J_2 et J_3 :

$$\Omega(J_2(\boldsymbol{\sigma}), J_3(\boldsymbol{\sigma}); T).$$

En général on néglige l'influence du troisième invariant, ce qui est justifié en partie par l'expérience, et permet une simplification supplémentaire. On est ainsi ramené à un matériau viscoplastique analogue aux matériaux plastiques obéissant au critère de Von Mises (les équipotentielles sont des cylindres axés sur la trissectrice de l'espace des contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3) :

$$\Omega = \Omega(\sigma_{eq}, T) \quad \text{avec} \quad \sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'\right)^{1/2}$$

$\boldsymbol{\sigma}'$ étant, rappelons-le, le déviateur de $\boldsymbol{\sigma}$.

La loi de viscoplasticité est entièrement définie par la connaissance de ce potentiel puisque la règle de normalité donne :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{eq}}\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}}.$$

Si l'on désire prendre en compte un domaine d'élasticité pure, le potentiel s'exprime sous la forme :

$$\Omega = \Omega^*(\langle\, \sigma_{eq} - k(T)\,\rangle)$$

où Ω^* s'annule en même temps que $\langle\, \sigma_{eq} - k(T)\,\rangle$, avec $\langle\, x\,\rangle$ défini, rappelons-le, par $\langle\, x\,\rangle = x$ si $x > 0$ et $\langle\, x\,\rangle = 0$ si $x \leqslant 0$. La limite d'élasticité k, dépend de la température. Le potentiel viscoplastique Ω est entièrement défini par la connaissance de la loi de fluage secondaire en uniaxial (voir § 4.1.2).

4.1.1.2. *Loi d'Odqvist*

Elle correspond à une généralisation directe de la loi de Norton, en considérant un domaine d'élasticité négligeable, réduit à l'origine :

$$\Omega = \frac{\lambda^*}{N^* + 1}\left(\frac{\sigma_{eq}}{\lambda^*}\right)^{N^*+1}$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2}\left(\frac{\sigma_{eq}}{\lambda^*}\right)^{N^*}\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}}}.$$

Cette loi de viscoplasticité parfaite est très souvent utilisée, pour les raisons suivantes :

— sa simplicité d'emploi dans les calculs numériques, liée à l'absence d'écrouissage et de domaine d'élasticité,

— son incorporation immédiate dans le moule des matériaux standard généralisés qui permet la démonstration de théorèmes d'existence et d'unicité et l'obtention de solutions analytiques simples (analogie élastique, bornes supérieures et inférieures, analyse limite, flambement viscoplastique...). En ce sens elle correspond bien, pour la viscoplasticité, à la loi de plasticité parfaite.

4.1.1.3. *Loi avec domaine élastique*

Si l'approximation par une fonction puissance est satisfaisante, on peut par exemple exprimer le potentiel sous la forme :

$$\Omega = \frac{\lambda_Y}{N_Y + 1} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - k}{\lambda_Y} \right\rangle^{N_Y + 1}$$

où N_Y et λ_Y sont des coefficients qui dépendent aussi de la température. La vitesse de déformation viscoplastique s'écrit alors :

$$\boxed{\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - k}{\lambda_Y} \right\rangle^{N_Y} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}}}.$$

Notons que cette relation n'est intéressante que dans le cas où l'exposant apparent de la loi de Norton a tendance à augmenter pour les contraintes faibles (voir paragraphe suivant).

4.1.1.4. *Loi avec terme exponentiel*

Cette loi permet d'élargir le domaine de validité de la loi de viscoplasticité parfaite lorsque l'exposant de la loi de Norton diminue pour les faibles contraintes (exemple de la fig. 5). Le potentiel de dissipation s'écrit :

$$\Omega = \frac{\exp(\alpha_0 \, \sigma_{eq}^{N_0 + 1})}{\alpha_0 (N_0 + 1) \, \lambda_0^{N_0}}$$

et conduit à la vitesse de déformation :

$$\boxed{\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\lambda_0} \right)^{N_0} \exp(\alpha_0 \, \sigma_{eq}^{N_0 + 1}) \, \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}}}$$

dans laquelle le matériau est représenté par les trois coefficients λ_0, N_0, et α_0.

4.1.2. *Identification d'après des essais de traction*

Pour un état de contrainte uniaxial, sous la contrainte σ de traction, on a évidemment $\sigma_{eq} = \sigma$ et la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_{11}^p = \dot{\varepsilon}_p$ s'exprime immé-

diatement d'après la loi tridimensionnelle. Par exemple on obtient respectivement pour les trois lois présentées ci-dessus :

$$\dot{\varepsilon}_p = \left(\frac{\sigma}{\lambda^*}\right)^{N^*}$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \left\langle \frac{\sigma - k}{\lambda_Y} \right\rangle^{N_Y}$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \left(\frac{\sigma}{\lambda_0}\right)^{N_0} \exp(\alpha_0 \, \sigma^{N_0+1}) .$$

Dans les trois cas la loi est complètement identifiée à partir des résultats de fluage secondaire : deux interprétations du fluage secondaire peuvent être faites; elles sont schématisées sur la figure 22 :

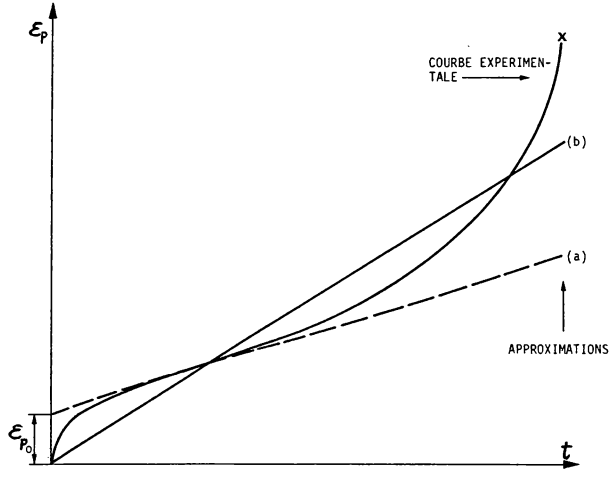


Fig. 22. Deux schématisations du fluage secondaire.

— La vitesse de fluage secondaire est définie par la valeur minimale de la vitesse au cours de l'essai de fluage (tangente au point d'inflexion de la courbe). Dans ce cas la déformation au cours du fluage primaire, représentée par l'ordonnée à l'origine ε_{p_0}, est négligée.

— La vitesse de fluage est donnée par la droite passant par l'origine ($\varepsilon_{p_0} = 0$) et le point d'inflexion de la courbe de fluage. Cette seconde approximation prend en compte d'une manière grossière le fluage primaire.

Pour la première loi (de Norton) les deux coefficients λ^* et N^* se déduisent du graphe ($\ln \sigma$, $\ln \dot{\varepsilon}_p$) par lissage manuel (exemples fig. 4) ou par moyens numériques (méthode des moindres carrés linéaires décrite au chapitre 3). Les

valeurs obtenues pour l'exposant N^* avec les deux définitions ci-dessus de la vitesse de fluage secondaire sont pratiquement identiques; seul le coefficient λ^* est différent.

Pour la seconde loi on obtient les coefficients N_Y, λ_Y, k en procédant par approximations successives pour le choix de la limite d'élasticité k, en reportant, par exemple, les valeurs de couples $(\ln(\sigma - k), \ln \dot{\varepsilon}_p)$. Un critère de choix peut être d'obtenir un exposant N_Y aussi constant que possible (voir § 2.2 et 4.2.2.1). Notons que la limite d'élasticité k a toujours une valeur très faible, largement inférieure à la limite d'élasticité apparente de l'essai d'écrouissage; ceci est dû à deux raisons :

— la grande non-linéarité du phénomène de viscoplasticité,

— la possibilité d'écoulements viscoplastiques (lents mais non nécessairement négligeables) pour des contraintes très faibles, par exemple au cours d'essais de relaxation.

On remarque aussi que l'introduction d'un domaine d'élasticité conduit à une diminution de l'exposant N ($N_Y < N^*$).

L'identification de la troisième loi peut se faire par moyens numériques à partir des valeurs mesurées de σ et $\dot{\varepsilon}_p$ (méthode des moindres carrés non linéaire exposée au chapitre 3). Un autre procédé peut être utilisé par identification de la variation de l'exposant de Norton en fonction de la contrainte. Cet exposant est déterminé par la tangente à la courbe de la figure 23*a*. Son évolution est indiquée pour cet exemple sur la figure 23*b*. On établit la variation de l'exposant équivalent à partir de la 3e loi par :

$$N^*(\sigma) = \frac{d \ln \dot{\varepsilon}_p}{d \ln \sigma} \doteq N_0 + \alpha(N_0 + 1)\, \sigma^{N_0+1}.$$

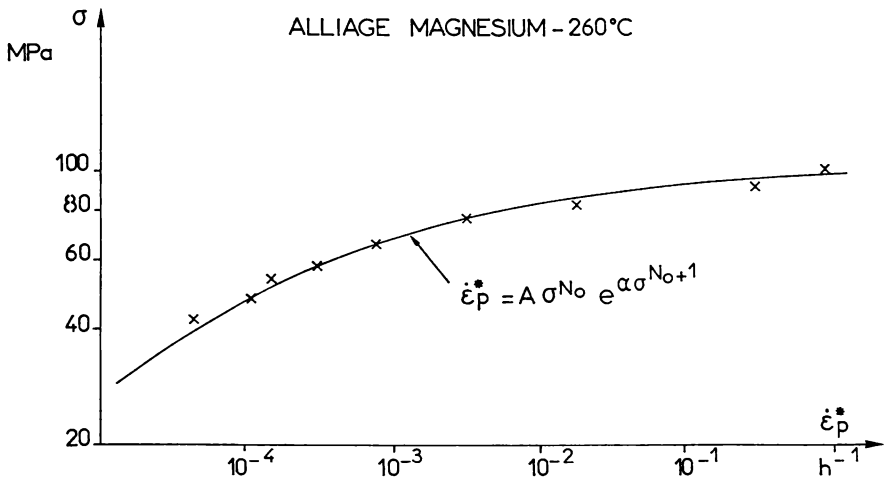
La valeur de N_0 est facilement déterminée par approximations successives; par exemple la courbe de la figure 23*b* est obtenue avec $N_0 = 4$ et $\alpha = 65.10^{-9}$. L'amélioration de la relation entre σ et $\dot{\varepsilon}_p$ est sensible en utilisant ces valeurs (et une valeur $\lambda_0 = 86{,}3$).

4.1.3. *Domaine de validité*

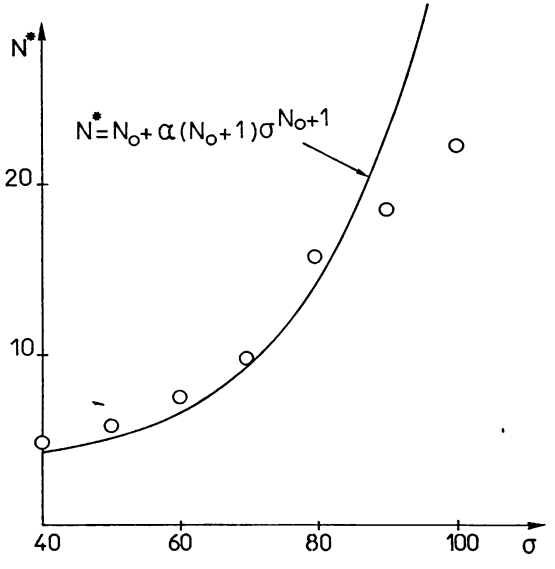
Un certain nombre de résultats concernant la loi de Norton et ses généralisations ont déjà été présentés dans les paragraphes précédents. Quelques valeurs caractéristiques de la loi de Norton sont indiquées dans le tableau 7. La figure 6 montre l'évolution de l'exposant de Norton en fonction de la température pour quelques matériaux.

Le domaine de validité de la loi de Norton est limité par :

— la possibilité d'approximer les courbes de fluage par une droite : la loi constitue évidemment une meilleure approximation pour les matériaux dans lesquels la déformation de fluage primaire est faible en regard de la déformation au cours du fluage secondaire;



a)



b)

Fig. 23. Détermination de la loi avec un terme exponentiel pour un alliage de magnésium à 260 °C.
(*a*) Points de fluage secondaire.
(*b*) Exposant de fluage secondaire apparent.

— la relation obtenue expérimentalement entre σ et $\dot{\varepsilon}_p^*$: suivant le matériau (et la température) l'approximation par une fonction puissance est valable dans un domaine de vitesse plus ou moins étendu;

— le domaine de température lui-même : pour les faibles températures deux difficultés apparaissent généralement :

- une viscosité faible qui conduit à des valeurs d'exposant N^* très élevées,
- un fluage à caractère plutôt logarithmique (sans fluage secondaire réel).

La dernière limitation, sans doute la plus importante, est liée aux histoires de chargements : la loi de Norton est essentiellement établie pour l'essai de fluage (sous contrainte constante); elle ne donne généralement qu'une mauvaise approximation des courbes de traction, en raison de la non-prise en compte des effets d'écrouissage. L'exemple du matériau IN 100 sur la figure 24 illustre bien ce fait, en comparant courbes expérimentales et courbes calculées (les coefficients N^* et λ^* ont été déterminés par la deuxième interprétation du fluage secondaire). Par ailleurs la loi de Norton ne peut rendre compte ni des essais cycliques, ni des effets liés à la restauration.

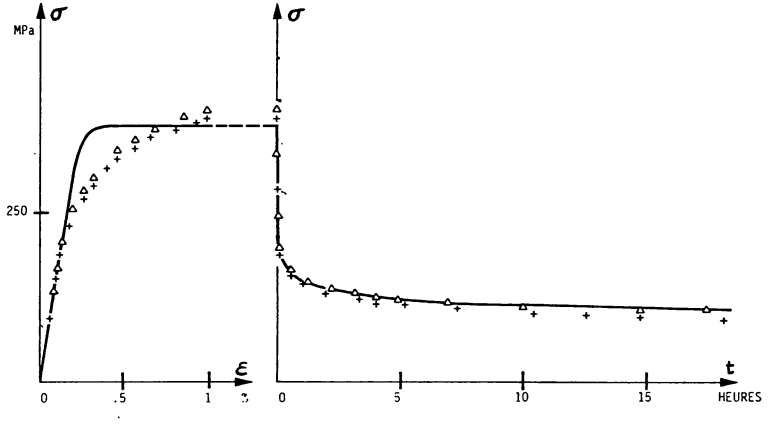


Fig. 24. Ecrouissage puis relaxation sur l'alliage réfractaire IN 100.

L'avantage essentiel de la loi de Norton réside dans les facilités d'intégration analytique qui se traduisent, pour les calculs de structures, par la possibilité d'effectuer des analyses simplifiées. Ces facilités peuvent être illustrées par l'exemple de la relaxation en traction :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \left(\frac{\sigma}{\lambda^*}\right)^{N^*} = 0 .$$

L'intégration de l'équation différentielle sans second membre donne facilement :

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 + (N^* - 1) \frac{E}{\dot{\lambda}^*} \left(\frac{\sigma_0}{\dot{\lambda}^*} \right)^{N^*-1} t \right]^{-\frac{1}{N^*-1}}$$

où σ_0 est la contrainte au début de la relaxation.

4.2. Lois de viscoplasticité à écrouissage isotrope

4.2.1. *Formulation tridimensionnelle*

4.2.1.1. *Forme générale*

La seule variable interne est la variable scalaire r : elle indique l'état actuel d'écrouissage du matériau et se réduit à la déformation plastique cumulée p lorsqu'il n'y a pas de processus de restauration. L'énergie libre spécifique dépend donc de $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, T et r. La force thermodynamique associée à r est :

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

et le potentiel de dissipation dépend du tenseur des contraintes, de la contrainte interne R, et éventuellement de la variable d'état r qui joue le rôle de paramètre :

$$\varphi^* = \Omega = \Omega(\boldsymbol{\sigma}, R; T, r).$$

Pour les matériaux métalliques, les hypothèses d'incompressibilité et d'isotropie font apparaître la contrainte au travers des invariants J_2 et J_3 du déviateur :

$$\Omega = \Omega(J_2(\boldsymbol{\sigma}), J_3(\boldsymbol{\sigma}), R; T, r)$$

et l'on néglige le plus souvent l'influence du troisième invariant (matériau de Von Mises) :

$$\Omega = \Omega(\sigma_{eq}, R; T, r).$$

La variable R est associée à la dimension du domaine actuel d'élasticité. On peut alors exprimer le potentiel de dissipation en fonction de $\sigma_{eq} - R - k$ où k est la limite d'élasticité initiale. De plus on peut faire apparaître indépendamment un potentiel d'écoulement (avec écrouissage) et un potentiel de restauration :

$$\Omega = \Omega_p(\sigma_{eq} - R - k; T, r) + \Omega_r(R; T).$$

La fonction Ω_p s'annule avec $\sigma_{eq} - R - k$, et Ω_r s'annule avec R. La loi de normalité généralisée donne alors les équations suivantes :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega_p}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}}$$

$$\dot{r} = -\frac{\partial \Omega}{\partial R} = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \sigma_{eq}} - \frac{\partial \Omega_r}{\partial R} = \dot{p} - \frac{\partial \Omega_r}{\partial R}$$

où $\dot{p}$ est l'invariant de la vitesse de déformation plastique :

$$\dot{p} = (\tfrac{2}{3}\,\dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p)^{1/2}$$

on voit ainsi clairement apparaître l'écrouissage et l'effet éventuel de restauration dans l'évolution de la variable r.

La connaissance des trois potentiels Ψ, Ω_p et Ω_r définit complètement la loi de viscoplasticité avec écrouissage et restauration. Dans les deux paragraphes qui suivent, on étudie les deux formes classiques pour traduire l'écrouissage et l'on néglige l'effet de restauration ($\Omega_r \equiv 0$).

4.2.1.2. *Loi d'écrouissage-viscosité additive*

L'écrouissage agit par diminution de la contrainte effective et la variable r est absente du potentiel Ω_p. Celui-ci s'exprime souvent sous la forme d'une fonction puissance :

$$\Omega = \Omega_p = \frac{K_a}{N_a + 1} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a + 1}$$

ce qui conduit à une vitesse de déformation définie par :

où

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \frac{3}{2}\,\dot{p}\,\frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} \\ \dot{p} &= \dot{r} = \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a} \end{aligned}}$$

La relation entre R et p doit être choisie de façon à approcher correctement les courbes d'écrouissage et de fluage primaire. Une relation simple utilise un terme linéaire et un terme exponentiel :

$$R = Q_1\, p + Q_2[1 - \exp(-\,bp)]$$

ou sous forme différentielle :

$$\boxed{\dot{R} = b(Q_1\, p + Q_2 - R)\,\dot{p} + Q_1\,\dot{p}}$$

Ce choix correspond à une expression de l'énergie libre de la forme :

$$\rho\Psi_p = \frac{1}{2}\,Q_1\, p^2 + Q_2\left(p + \frac{1}{b}\exp(-\,bp) - \frac{1}{b}\right).$$

Les coefficients N_a, K_a, k, Q_1, Q_2, b peuvent bien sûr dépendre de la température. Ce type de loi, bien qu'appartenant directement au formalisme des matériaux standards, est peu employé. On lui préfère la forme produit plus facile à identifier et à utiliser.

4.2.1.3. *Loi d'écrouissage-viscosité multiplicative*

Il ne s'agit plus d'une loi standard au sens strict puisque l'emploi de la variable r sous forme de paramètre est nécessaire (dans le cas présent on a $r = p$). On suppose que le potentiel de dissipation se met sous la forme :

$$\Omega = \Omega_p(\sigma_{eq} - R - k + h'(p)).\zeta(p)$$

et que l'énergie libre s'écrit :

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e + h(p)\,.$$

Le plus souvent on choisit pour Ω_p et ζ des fonctions puissance :

$$\Omega_p = \frac{K}{N+1}\left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k + h'(p)}{K} \right\rangle^{N+1} p^{\gamma}$$

où les coefficients N, K, k, γ ainsi que la fonction h, peuvent dépendre de la température.

La vitesse de déformation s'exprime par :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} = \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\sigma'}{\sigma_{eq}}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial\Omega}{\partial R} = \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k + h'(p)}{K} \right\rangle^{N} p^{\gamma}$$

on peut alors tenir compte du fait que

$$R = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial p} = h'(p)$$

ce qui fait disparaître R de la loi d'écoulement :

$$\dot{p} = \left\langle \frac{\sigma_{eq} - k}{K} \right\rangle^{N} p^{\gamma}\,.$$

L'écrouissage, traduit par la variable p, a pour effet de diminuer la vitesse d'écoulement : l'exposant γ est donc négatif. En posant $\gamma = -\frac{N}{M}$ et en supposant que k est nul on obtient l'expression tridimensionnelle de la loi d'écrouissage-viscosité étudiée au paragraphe 2.4, à laquelle on associe la loi d'élasticité linéaire :

$$\boxed{\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sigma_{eq}}{Kp^{1/M}}\right)^N \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}}}\,.$$

Notons que cette loi s'exprime aisément sous forme intégrée pour donner une relation entre la déformation et la contrainte, fonction donnée du temps :

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p\right)^{1/2} = \left(\frac{\sigma_{eq}}{Kp^{1/M}}\right)^N \frac{\left(\frac{3}{2}\sigma' : \sigma'\right)^{1/2}}{\sigma_{eq}} = \left(\frac{\sigma_{eq}}{Kp^{1/M}}\right)^N$$

d'où l'expression $p(t)$ pour la condition initiale $t = 0 \rightarrow p = 0$:

$$p(t) = \left[\frac{N+M}{M}\int_0^t \left(\frac{\sigma_{eq}(t)}{K}\right)^N \mathrm{d}t\right]^{\frac{M}{N+M}}$$

et

$$\varepsilon^p(t) = \int_0^t \frac{3}{2}\left(\frac{\sigma_{eq}(t)}{Kp(t)^{1/M}}\right)^N \frac{\sigma'(t)}{\sigma_{eq}(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

4.2.1.4. *Etude de la dissipation*

La dissipation intrinsèque s'exprime par :

$$\Phi_1 = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - R\dot{r}\,.$$

Dans le cas général on vérifie immédiatement qu'elle est toujours positive :

$$\Phi_1 = \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\sigma' : \sigma'}{\sigma_{eq}} - R\dot{p} + R\frac{\partial \Omega_r}{\partial R} = \dot{p}(\sigma_{eq} - R) + R\frac{\partial \Omega_r}{\partial R}$$

$$\Phi_1 = \dot{p}(\sigma_{eq} - R - k) + R\frac{\partial \Omega_r}{\partial R} + k\dot{p} \geqslant 0\,.$$

En effet, si $\sigma_{eq} - R - k < 0$ on a $\dot{p} = 0$ et si Ω_r est une fonction convexe telle que $\Omega_r(0) = 0$, le produit $R\frac{\partial \Omega_r}{\partial R}$ est toujours positif.

Avec la loi à écrouissage additif, sans effet de restauration ($\Omega_r = 0$), les différents termes de la dissipation peuvent être visualisés sur la figure 25*a* qui s'applique à la traction. La puissance plastique dissipée $\sigma : \dot{\varepsilon}^p$ se divise en deux :

— une partie dissipée en chaleur, représentée par la dissipation intrinsèque $\Phi_1 = (\sigma_{eq} - R)\dot{p}$, qui correspond à la dissipation visqueuse (σ_v) et à la dissipation plastique parfaite (k) ;

— une partie bloquée dans le système (dans les systèmes de dislocations ou contraintes internes), qui est représentée par le terme $R\dot{p}$.

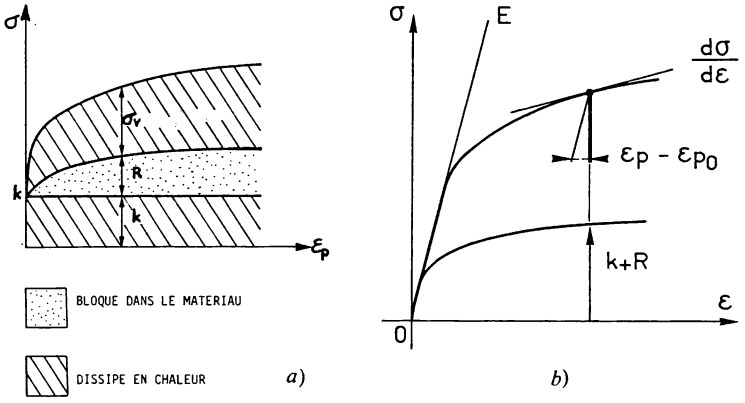


Fig. 25. Schématisations en traction.
(*a*) Décomposition de la dissipation.
(*b*) Evolution de la déformation plastique et de l'écrouissage pendant la relaxation.

Dans le cas de la loi sous forme produit la dissipation est positive, à condition de supposer que l'énergie libre est indépendante de r (ou de p), la fonction h est constante et $R = 0$. La dissipation mécanique se réduit alors à $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ ce qui signifie que toute la puissance plastique est dissipée en chaleur.

4.2.2. *Identification d'après des essais de traction*

4.2.2.1. *Loi d'écrouissage-viscosité additive*

En traction uniaxiale l'invariant des contraintes se réduit à $\sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma$ et la première composante du déviateur vaut $\frac{2}{3}\sigma$. La première des lois explicitées ci-dessus se ramène alors à :

$$\dot{\varepsilon}_p = \left\langle \frac{\sigma - R(\varepsilon_p) - k}{K_a} \right\rangle^{N_a}.$$

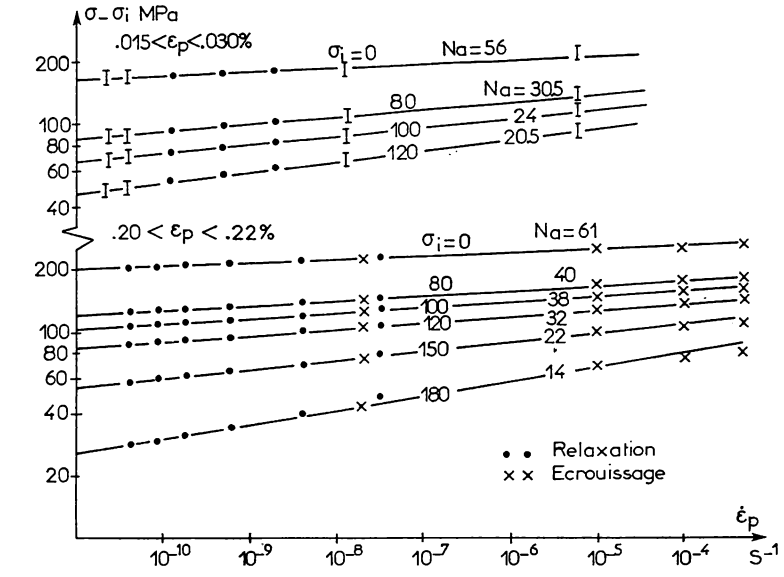
Cette relation peut s'inverser en :

$$\sigma = k + R(\varepsilon_p) + K_a \, \dot{\varepsilon}_p^{1/N_a}.$$

Il faut encore préciser la forme de la fonction d'écrouissage $R(\varepsilon_p)$. Elle peut par exemple se déduire directement de la relation du paragraphe précédent :

$$R(\varepsilon_p) = Q_1 \, \varepsilon_p + Q_2[1 - \exp(-b\varepsilon_p)].$$

La relation de comportement montre bien la décomposition de la contrainte en la somme d'un terme d'écrouissage représentant la taille actuelle du domaine



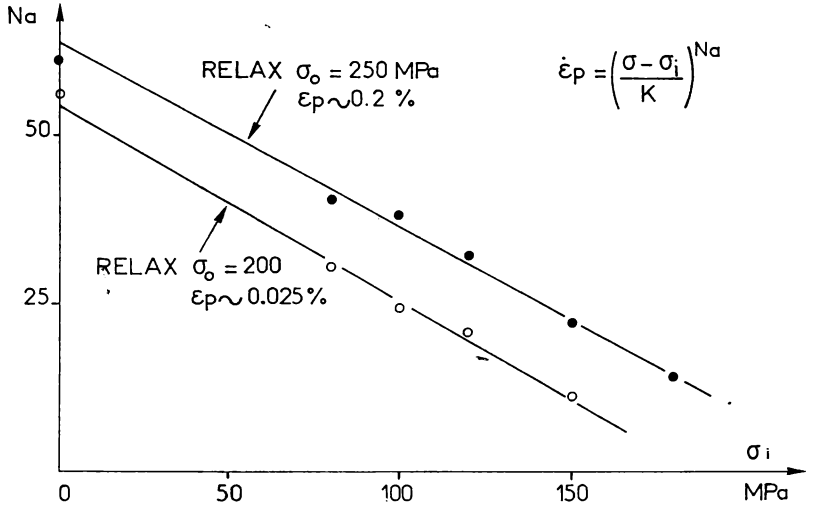


Fig. 26. Relation entre la contrainte interne et l'exposant de viscosité pour l'acier 316 à 20 °C.

d'élasticité et d'un terme de viscosité, souvent appelé contrainte visqueuse :

$$\sigma_v(\dot{\varepsilon}_p) = K_a \, \dot{\varepsilon}_p^{1/N_a}.$$

Comme pour la loi multiplicative il est préférable de disposer d'essais d'écrouissage et de relaxation car ils permettent de séparer l'influence de ε_p et de $\dot{\varepsilon}_p$. La figure 25*b* montre schématiquement que $\dot{\varepsilon}_p$ est approximativement constant dans la fin de l'essai d'écrouissage à vitesse de déformation constante :

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} = \dot{\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right) \simeq \dot{\varepsilon}.$$

Au contraire, dans l'essai de relaxation, c'est la déformation plastique qui varie peu et l'état d'écrouissage reste à peu près constant.

De l'essai d'écrouissage on tire donc une approximation de la fonction $R(\varepsilon_p)$ pour ε_p grand (à une constante additive près) : on identifie ainsi le coefficient Q_1. De l'essai de relaxation on tire une relation entre l'exposant N_a et la valeur de la contrainte non visqueuse $\sigma_i = k + R(\varepsilon_p)$. Cette relation est obtenue en reportant dans un graphe bilogarithmique $\sigma - \sigma_i$ en fonction de $\dot{\varepsilon}_p$ pour différents choix de σ_i (exemple sur la figure 26 pour l'acier inoxydable 316 L à température ambiante).

En choisissant une valeur de k dictée par la taille initiale du domaine apparent d'élasticité, il reste quatre coefficients à déterminer. Disposant de la relation expérimentale entre N_a et σ_i, ce nombre est en fait réduit à trois. On peut alors utiliser un procédé d'identification numérique, soit entièrement automatique (voir chap. 3), soit en faisant appel à un système interactif.

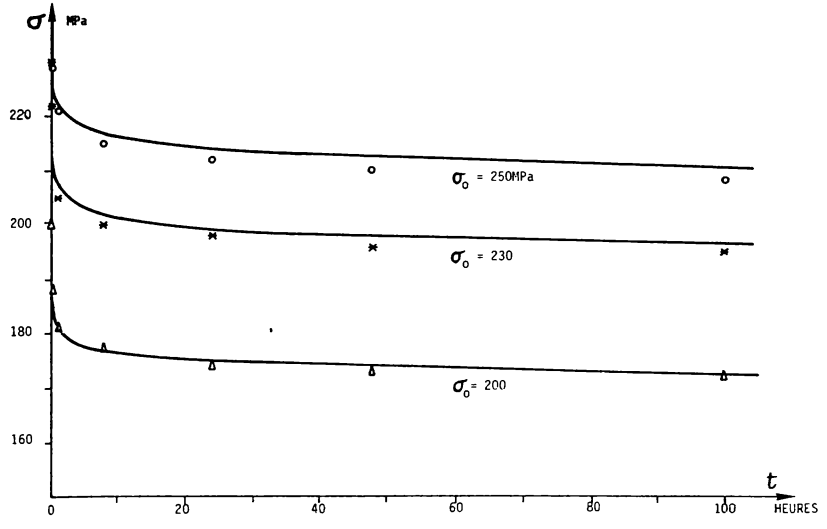


Fig. 27. Description des essais de relaxation par la loi additive (acier 316-20 °C).

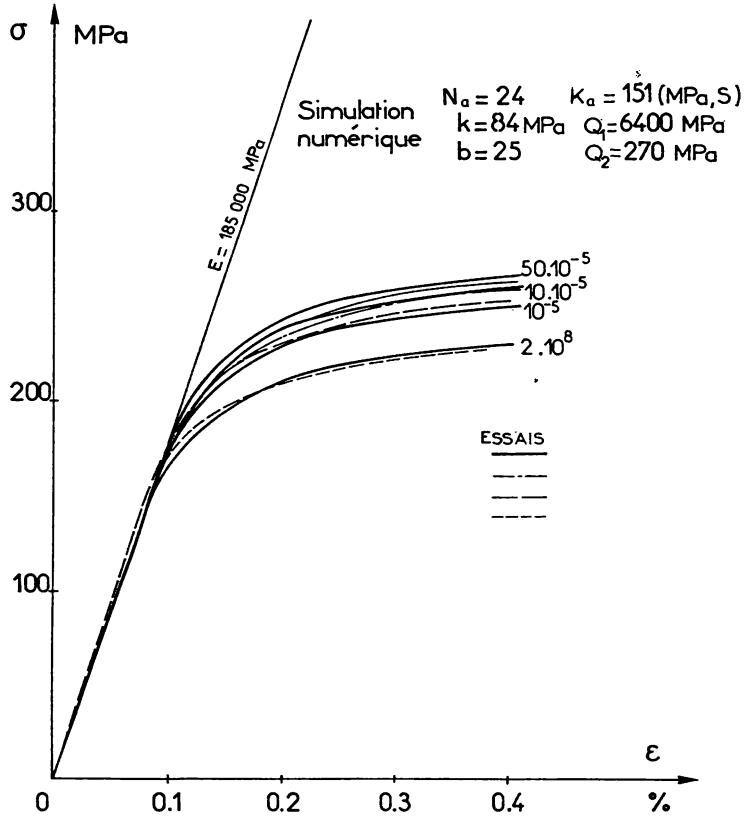


Fig. 28. Description des essais d'écrouissage à différentes vitesses par la loi additive (acier 316 à 20 °C).

Comme le montre le cas de l'acier 316 à température ambiante (cas difficile puisque la viscosité est faible) cette loi fournit une excellente modélisation des essais de relaxation (fig. 27) et des essais d'écrouissage à différentes vitesses (fig. 28).

4.2.2.2. *Loi d'écrouissage-viscosité multiplicative*

Son expression uniaxiale (traction simple) :

$$\dot{\varepsilon}_p = \left(\frac{\sigma}{K\varepsilon_p^{1/M}}\right)^N \qquad \text{ou} \qquad \sigma = K\varepsilon_p^{1/M}\,\dot{\varepsilon}_p^{1/N}$$

est celle déjà étudiée au paragraphe 2.4 qui permet de rendre compte à la fois d'essais de fluage, d'écrouissage et de relaxation.

L'identification de cette loi est particulièrement aisée, c'est pourquoi elle est très employée. Trois types de méthodes peuvent être utilisées pour l'identification des coefficients caractéristiques K, M, N :

(*i*) Si l'on dispose d'une gamme de résultats expérimentaux (généralement en écrouissage, en relaxation, et en fluage primaire) assez étendue, c'est-à-dire faisant apparaître des variations suffisamment importantes des valeurs expérimentales de σ, ε_p, $\dot{\varepsilon}_p$ (au même instant) on peut utiliser la méthode des moindres carrés linéaire. La loi peut en effet s'écrire pour chaque point expérimental j :

$$\frac{1}{N} \ln \dot{\varepsilon}_{pj} + \frac{1}{M} \ln \varepsilon_{pj} + \ln K = \ln \sigma_j$$

relation linéaire en $1/N$, $1/M$ et $\ln K$. En trouvant le plan de l'espace $\ln \dot{\varepsilon}_p$, $\ln \varepsilon_p$, $\ln \sigma$ qui passe au mieux parmi les points expérimentaux, on obtient les valeurs de N, M et K.

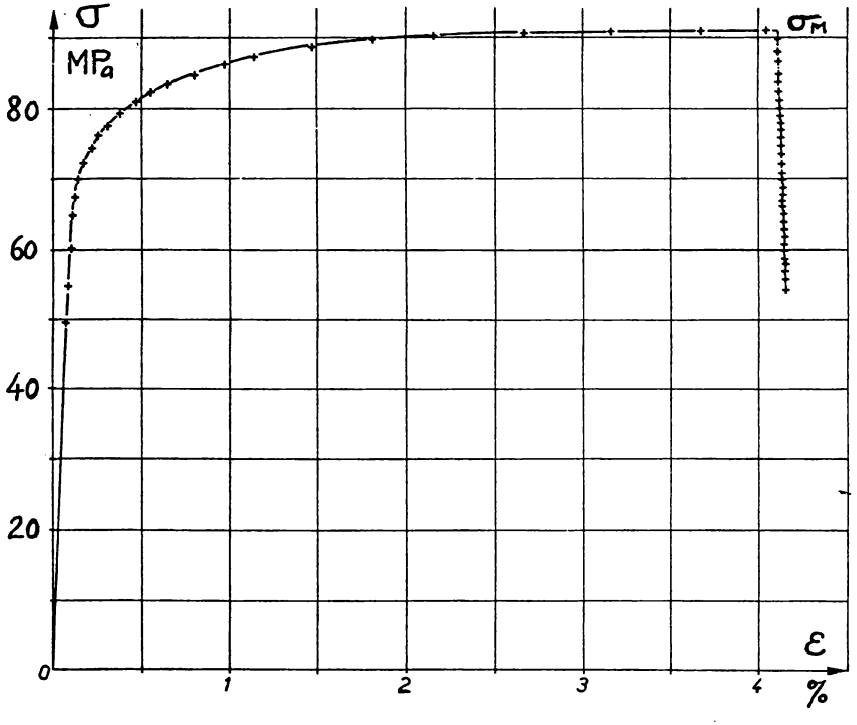


Fig. 29. Essai d'écrouissage-relaxation (Alliage AU4G recuit, 208 °C).

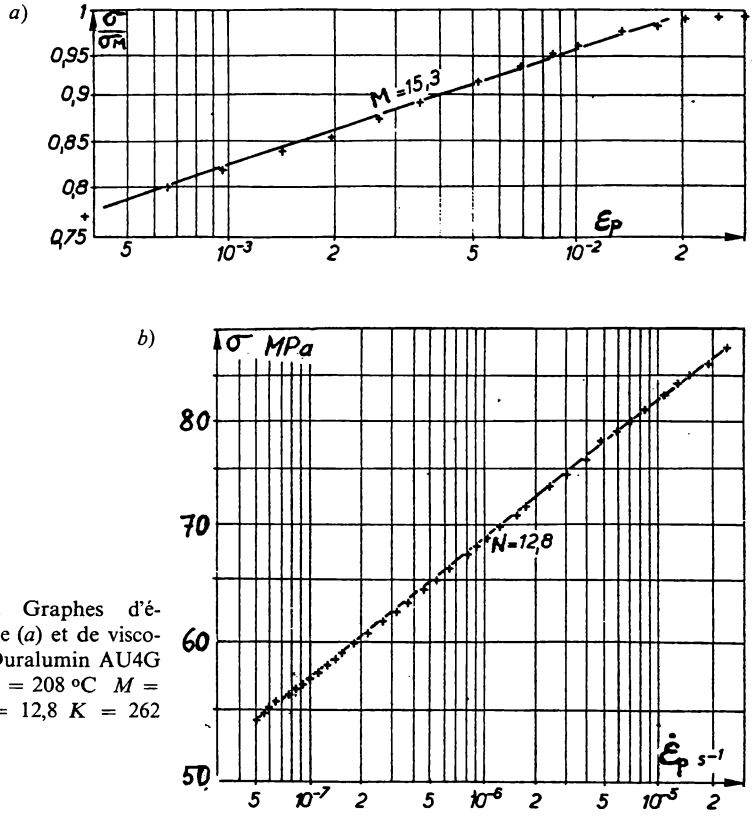


Fig. 30. Graphes d'écrouissage (*a*) et de viscosité (*b*) Duralumin AU4G recuit $T = 208$ °C $M = 15{,}3$ $N = 12{,}8$ $K = 262$ (MPa, *s*).

(*ii*) Les essais d'écrouissage-relaxation fournissent un moyen rapide d'identification. Comme on l'a vu plus haut (fig. 25*b*), l'essai d'écrouissage s'effectue avec une vitesse de déformation plastique presque constante tandis que la relaxation correspond à une déformation plastique approximativement constante. En reportant les points (σ, ε_p) et $(\sigma, \dot{\varepsilon}_p)$ dans deux diagrammes bi-logarithmiques on obtient immédiatement (par la meilleure droite) les coefficients $1/M$ et $1/N$. Les figures 29 et 30 fournissent un exemple d'une telle détermination.

Pour les relaxations à faible déformation, la variation de déformation plastique peut être assez importante. De même le début de l'essai d'écrouissage est à vitesse $\dot{\varepsilon}_p$ variable. On est alors amené à effectuer une correction qui constitue le premier pas d'une itération en reportant sur papier bilogarithmique les points suivants :

- valeurs de $\sigma/\varepsilon_p^{1/M}$ en fonction de ε_p
- valeurs de $\sigma/\dot{\varepsilon}_p^{1/N}$ en fonction de $\dot{\varepsilon}_p$,

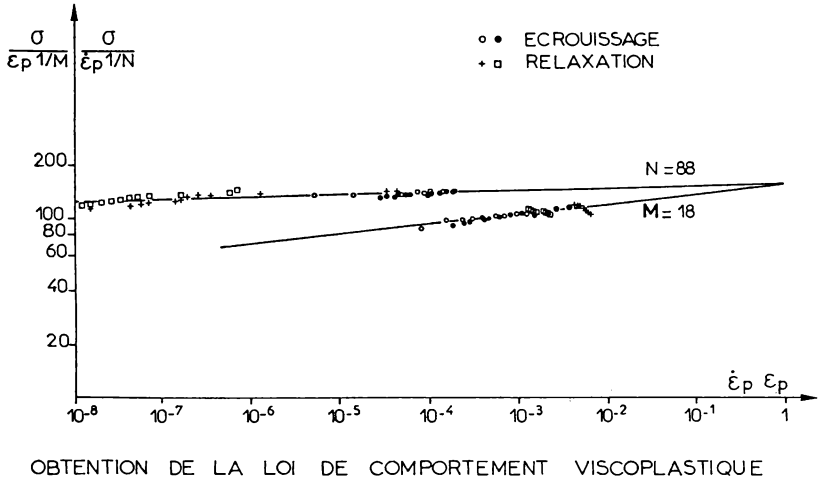


Fig. 31. Loi de viscoplasticité de l'alliage INCO 718 à 600 °C.

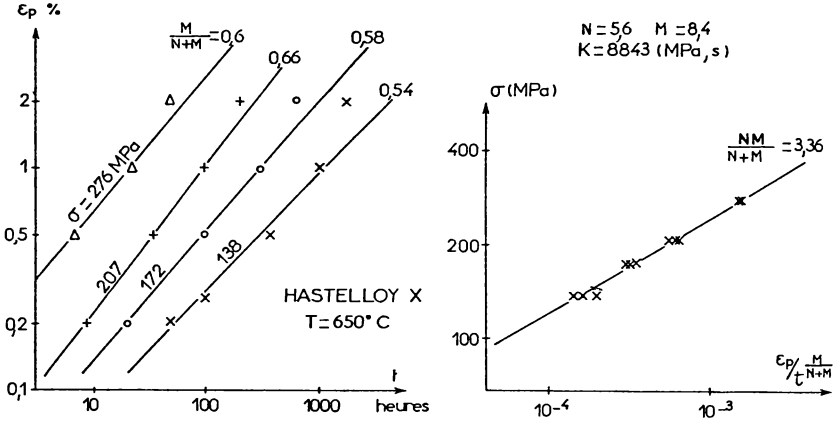


Fig. 32. Détermination de la loi multiplicative par les essais de fluage.

M et N étant les valeurs déterminées d'après le premier graphe. On peut utiliser à la fois des points d'essais d'écrouissage et de relaxation (ou même de fluage). Les deux droites passant au mieux par les deux ensembles de points et se coupant pour une abscisse $\ln \varepsilon_p = \ln \dot{\varepsilon}_p = 0$ fournissent les valeurs finales de $1/N$ et $1/M$. L'ordonnée à l'origine donne $\ln K$. Une telle procédure est illustrée sur la figure 31.

Avec cette procédure et éventuellement avec la précédente, il est préférable d'opérer une vérification des coefficients obtenus en recalculant des essais de fluage dans le domaine primaire (voir plus loin).

(*iii*) Lorsque l'on dispose surtout de résultats d'essais de fluage, la loi produit présente l'avantage d'être intégrable explicitement (pour une contrainte imposée) à cause de la séparabilité des variables. En fluage, on retrouve une loi du type Andrade pour la relation entre la déformation plastique et le temps :

$$\varepsilon_p = \left[\frac{M+N}{M}\left(\frac{\sigma}{K}\right)^N t\right]^{\frac{M}{N+M}}.$$

En reportant les points de fluage primaire (ε_p, t) dans un diagramme bilogarithmique on détermine une valeur moyenne de l'exposant $\frac{M}{M+N}$, puis on reporte pour des contraintes différentes les valeurs de $\varepsilon_p / t^{\frac{M}{M+N}}$ en fonction de σ. De la valeur obtenue pour l'exposant $MN/(M+N)$ on tire facilement les coefficients M et N, puis une valeur moyenne de K par l'ensemble des essais. La figure 32 montre un exemple d'une telle détermination. Avec cette procédure, il est utile de vérifier les valeurs des coefficients en recalculant un essai d'écrouissage-relaxation.

4.2.3. *Cas des chargements cycliques*

Les lois à écrouissage isotrope peuvent s'employer sous chargement cyclique. En traction-compression les deux lois exposées plus haut s'écrivent respectivement :

$$\dot{\varepsilon}_p = \left\langle \frac{|\sigma| - R(\tilde{\varepsilon}_p) - k}{K_a} \right\rangle^{N_a} \mathrm{Sgn}(\sigma)$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \left(\frac{|\sigma|}{K \tilde{\varepsilon}_p^{1/M}}\right)^N \mathrm{Sgn}(\sigma)$$

où $\tilde{\varepsilon}_p$ est la déformation plastique cumulée unidimensionnelle définie par :

$$\tilde{\varepsilon}_p = \int_0^t | \dot{\varepsilon}_p(\tau) | \, d\tau .$$

Après un premier écoulement les évolutions ultérieures sont identiques en traction et compression (au signe près). La figure 33 illustre schématiquement cette propriété : aux points B et B', on a même valeur de $| \sigma |$ et même valeur de déformation plastique cumulée $\tilde{\varepsilon}_p$. Cette propriété est malheureusement mal vérifiée par l'expérience à cause de l'effet Bauschinger.

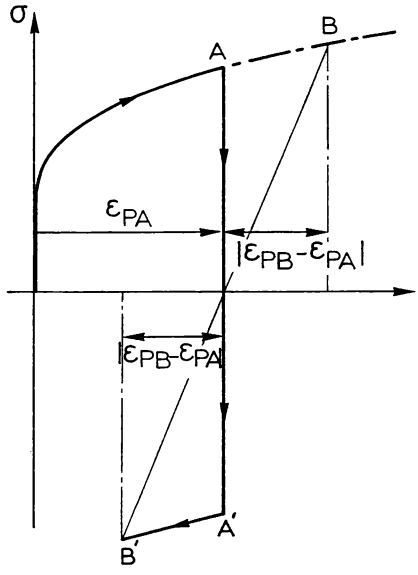


Fig. 33. Écrouissage isotrope et chargement cyclique : cas de la première traction, suivie de la première compression.

Sous chargement cyclique (avec déformation plastique) la variable d'écrouissage $\tilde{\varepsilon}_p$ augmente indéfiniment. Il en résulte soit une saturation de l'écrouissage avec la première loi, si $Q_1 = 0$, soit une non-saturation :

$$R(\tilde{\varepsilon}_p) = Q_1 \, \tilde{\varepsilon}_p + Q_2[1 - \exp(- b\tilde{\varepsilon}_p)] .$$

Dans le premier cas, on retrouve en cyclique les propriétés de la loi de Norton (plus de fluage primaire par exemple). Dans le second cas, la stabilisation ne se produit que lorsque le comportement est redevenu entièrement élastique. Cette adaptation, au bout d'un grand nombre de cycles est très rarement observée. Les lois à écrouissage isotrope (comme les lois sans écrouissage) sont donc mal adaptées aux cas de chargements cycliques.

4.2.4. *Méthode d'extrapolation. « Relaxation-fluage »*

Le problème de l'extrapolation aux temps longs des résultats d'essais de courte durée est un problème fondamental pour les calculs de structures dont la durée de vie se chiffre en années ou dizaines d'années. Les durées raisonnables d'essais couramment réalisables sont de l'ordre de la journée, de la semaine, du mois, voire de l'année mais pas plus.

Si des phénomènes essentiellement fonction du temps, comme la restauration et le vieillissement, interviennent, le problème de l'extrapolation est quasi insoluble. La température accélérant, en général, ces phénomènes, on peut utiliser des paramètres d'équivalence temps-température mais ils doivent être vérifiés pour chaque matériau sur les temps d'utilisation les plus longs ce qui n'avance pas à grand chose ! !

Si par contre, le matériau est stable et s'il vérifie une loi de viscoplasticité à écrouissage isotrope du type :

$$\sigma = f(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p)$$

en traction simple, on peut élaborer une méthode expérimentale qui permet d'obtenir, par relaxation, des vitesses $\dot{\varepsilon}_p$ en des temps considérablement plus courts que ceux qui correspondraient à des essais de fluage équivalents. D'où la possibilité de construire des courbes de fluage à long terme à partir d'essais de relaxation de courte durée.

Le principe en est très simple : soit à déterminer la courbe de fluage $\varepsilon(t)$ correspondant à une contrainte constante σ^* et à la température T^*. On réalise une série d'expériences de relaxation ou mieux un essai de relaxation multiple (voir § 2.1.4 du chap. 3), chacune des relaxations atteignant la contrainte σ^* (fig. 34).

En chacun des points des courbes de relaxation $\sigma(t)$ où $\sigma = \sigma^*$ l'état du matériau est caractérisé par :

$$\sigma = \sigma^*$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma^*}{E}$$

$$\dot{\varepsilon}_p = -\frac{\dot{\sigma}(\sigma^*)}{E}.$$

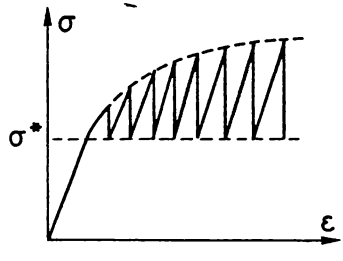


Fig. 34. Procédure de relaxation multiple.

La loi de comportement liant σ, ε_p, $\dot{\varepsilon}_p$ pour toute histoire de chargement, ces valeurs sont aussi représentatives d'un essai de fluage à $\sigma = \sigma^* = \text{Cte}$.

On peut donc tracer par points la trajectoire de l'essai de fluage dans le graphe $(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p)$ et par intégration de la fonction dont la courbe lisse au mieux ces points :

$$\dot{\varepsilon}_p = g(\varepsilon_p)$$

obtenir la courbe de fluage $\varepsilon_p(t)$ où

$$t = \int_{\varepsilon_{p0}}^{\varepsilon_p} \frac{1}{g(\varepsilon_p)} \, \mathrm{d}\varepsilon_p$$

avec la condition initiale $\varepsilon_p(t = 0) = \varepsilon_{p_0}$ donnée. La figure 35 résume schématiquement ces diverses opérations.

Ce calcul pouvant être répété pour toute valeur de contrainte atteinte au cours des relaxations, on voit donc qu'un ensemble d'essais de relaxation ou un essai de relaxation multiple permet de construire un ensemble de courbes de fluage à différentes contraintes.

Le grand intérêt de cette méthode est le gain de temps résultant de la grande non-linéarité du comportement pour les matériaux métalliques usuels. Le temps nécessaire pour atteindre un état caractérisé par des valeurs particulières de σ, ε_p et $\dot{\varepsilon}_p$ est de l'ordre de 5 à 50 fois plus court dans un cas de relaxation que dans un cas de fluage. Ce gain de temps peut être calculé par exemple à l'aide de la loi d'écrouissage-viscosité :

$$\sigma = E\varepsilon_e$$

$$\sigma = f(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p) = K\varepsilon_p^{1/M} \dot{\varepsilon}_p^{1/N} .$$

Le temps t_f^* nécessaire pour atteindre l'état σ^*, ε_p^*, $\dot{\varepsilon}_p^*$ dans un essai de fluage s'obtient par intégration de la loi pour $\sigma = \sigma^*$. Avec la condition initiale $\varepsilon_p(t = 0) = 0$

$$t_f^* = \frac{M}{M + N} \left(\frac{K}{\sigma^*} \right)^N \varepsilon_p^{*\frac{M+N}{M}}$$

Le temps t_r^* nécessaire pour atteindre le même état dans un essai de relaxation s'obtient par intégration de la loi pour $\varepsilon^* = \varepsilon_p^* + \varepsilon_e^* = \varepsilon_p^* + \dfrac{\sigma^*}{E} = \text{Cte}$. Avec la même condition initiale :

$$t_r^* = \left(\frac{K}{E} \right)^N \int_0^{\varepsilon_p^*} \frac{x^{N/M}}{(\varepsilon^* - x)^N} \, \mathrm{d}x .$$

Cette intégrale ne peut être calculée que numériquement.

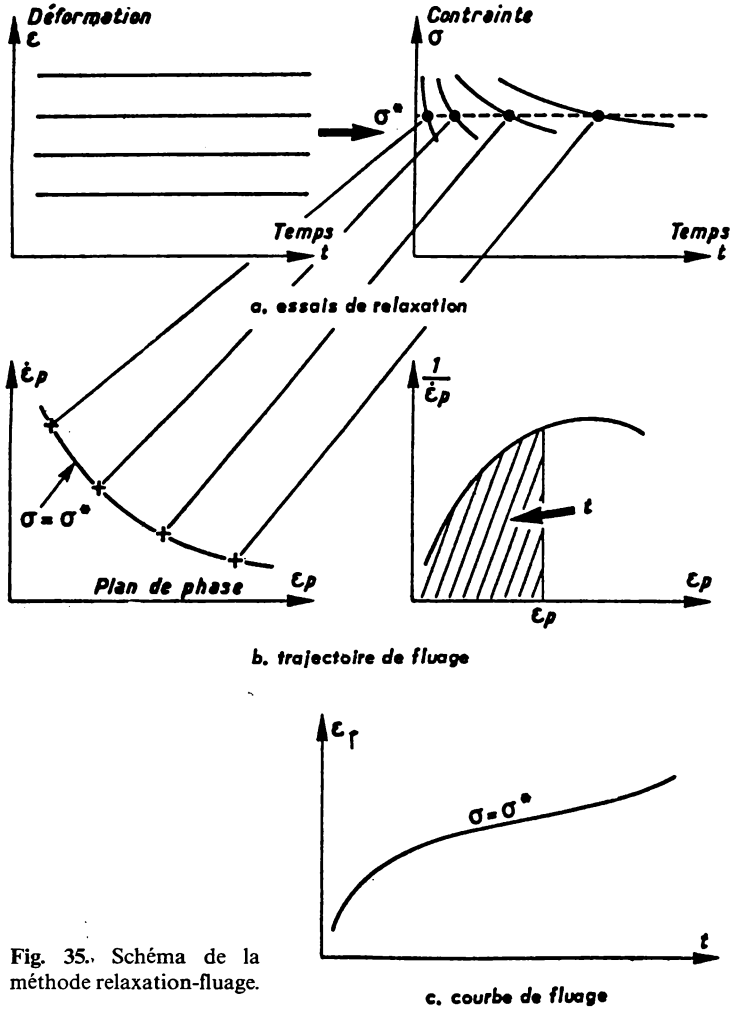


Fig. 35. Schéma de la méthode relaxation-fluage.

Le gain de temps s'exprime par :

$$\frac{t_f^*}{t_r^*} = \frac{M}{M+N} \frac{\varepsilon_p^{*\frac{M+N}{M}}}{\varepsilon_e^{*N}} \left(\int_0^{\varepsilon_p^*} \frac{x^{N/M}}{(\varepsilon^* - x)^N} \, dx \right)^{-1}.$$

Posant

$$\Gamma = \frac{M}{M+N} \frac{\varepsilon_p^{*N/M}}{\varepsilon_e^{*N-1}} \left(\int_0^{\varepsilon_p^*} \frac{x^{N/M}}{(\varepsilon^* - x)^N} \right)^{-1}$$

il s'avère que pour les valeurs usuelles de ε_e^* et ε_p^*, Γ varie peu avec ces variables si bien que l'on peut calculer Γ en fonction des seuls paramètres M et N. Le graphe de la figure 36 donne une représentation paramétrique de Γ pour

$$2 \leqslant M \leqslant 20$$

$$2 \leqslant N \leqslant 100$$

$$0{,}2.10^{-2} \leqslant \varepsilon_e^* \leqslant 0{,}4.10^{-2}$$

$$1 \leqslant \frac{\varepsilon_p^*}{\varepsilon_e^*} \leqslant 5$$

et le gain de temps vaut :

$$\boxed{\frac{t_f^*}{t_r^*} = \Gamma \frac{\varepsilon_p^*}{\varepsilon_e^*}}.$$

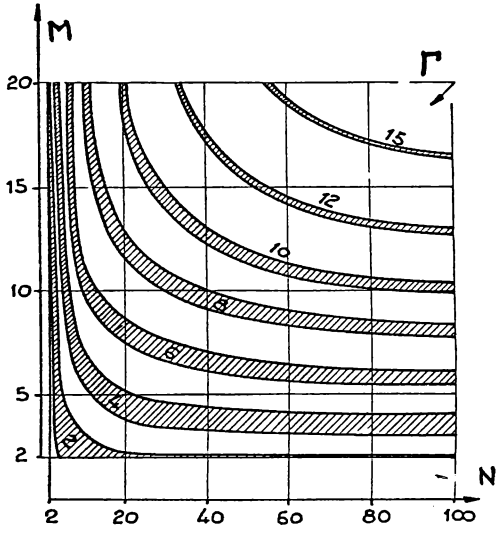


Fig. 36. Valeurs numériques de la fonction Γ.

La figure 37 montre un exemple d'application de cette méthode à des essais de fluage d'un peu plus de 1 000 heures sur un alliage léger AU2GN à 130 °C, retrouvés par des essais de relaxation ne dépassant pas 100 heures, soit un gain de temps un peu supérieur à 10 ($M = 13$, $N = 71$, $\varepsilon_p^*/\varepsilon_e^* \simeq 1$).

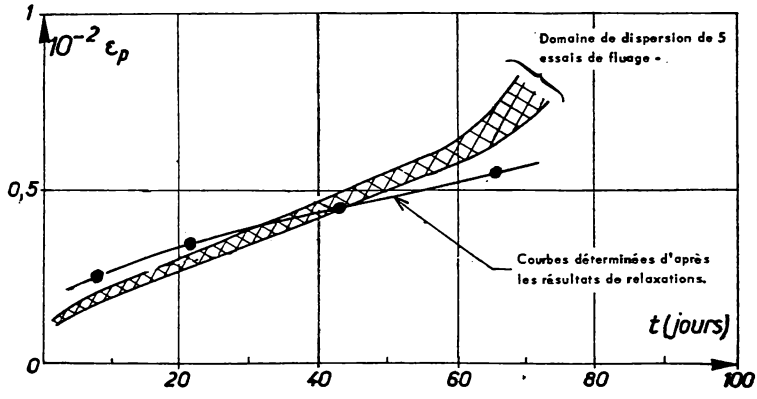


Fig. 37. Application de la méthode « Relaxation-Fluage ».
Alliage AU2GN, $T = 130$ °C, $\sigma = 324$ MPa.

4.2.5. *Domaine de validité*

Le tableau 11 donne un ensemble de coefficients caractéristiques N, M, K de la loi d'écrouissage-viscosité multiplicative pour un certain nombre de matériaux et à différentes températures. Ces coefficients ont été déterminés par l'une des méthodes décrites plus haut.

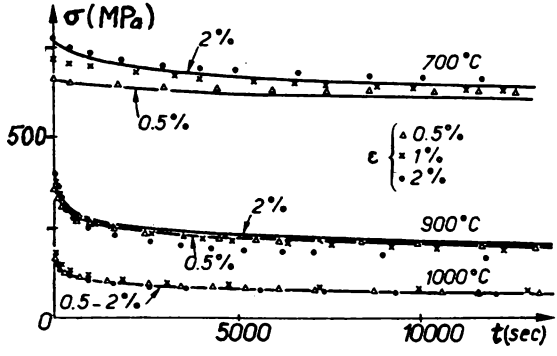
Pour de faibles variations de température on peut considérer M et N comme constants et se limiter à l'introduction d'un coefficient d'énergie d'activation, tel que celui décrit au paragraphe 2.5 :

$$\sigma = K' \varepsilon_p^{1/M} \left(\dot{\varepsilon}_p \exp\left(\frac{\Delta H}{kT}\right)\right)^{1/N}$$

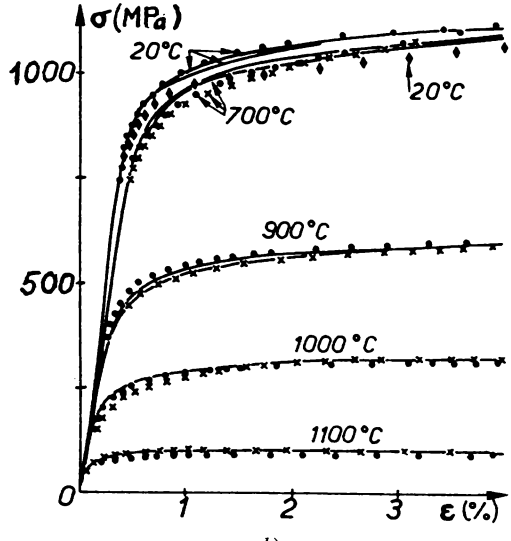
un tel terme rend compte de la diminution du coefficient de résistance lorsque la température augmente. Pour des variations de température importantes (supérieures à 50 °C par exemple), on est obligé de considérer des coefficients K, M et N variables en fonction de la température. La figure 15 montre un exemple de telles évolutions, interpolées par des paraboles définies par morceaux, avec continuité des tangentes (voir chap. 3).

Les deux lois développées au paragraphe 4.2.1 (forme multiplicative et forme additive) rendent bien compte de l'ensemble des résultats d'essais d'écrouissage, de relaxation et de fluage. La figure 38 présente quelques exemples de confrontations pour ces trois types d'essais, avec la loi produit, qui s'ajoutent à ceux montrés précédemment. La comparaison des deux formes, multiplicative et additive, peut être faite sur les figures 39 et 40 pour l'alliage IN100 à 1 000 °C.

Le domaine de validité de ces deux lois est approximativement le même. Les limitations sont essentiellement les suivantes :



a)



b)

Fig. 38. Modélisation du comportement monotone de l'alliage forgé UDIMET 700 par la loi de viscoplasticité à écrouissage multiplicatif (*a*) relaxation, (*b*) écrouissage.

× △ ● ◆ Essais

——— modèle

— le domaine des vitesses de déformation de 10^{-8} s^{-1} à 10^{-3} s^{-1} environ. Pour les vitesses faibles ($< 10^{-8}$) l'exposant N évolue quelquefois avec la contrainte : on peut alors utiliser un terme exponentiel supplémentaire comme pour le cas de la loi de Norton (cf. § 4.1.1.4) ou introduire des effets de restauration comme on le montre au paragraphe 4.4.2 (le modèle à écrouissage additif se prête mieux à l'introduction de tels effets) ;

— le domaine de déformation dépend des essais employés pour l'identification. D'une façon plus générale le domaine de validité peut s'étendre entre 10^{-4} et 2 à 4.10^{-2}. Il peut être étendu à des valeurs plus importantes avec le modèle additif grâce au terme d'écrouissage linéaire (Q_1 ε_p).

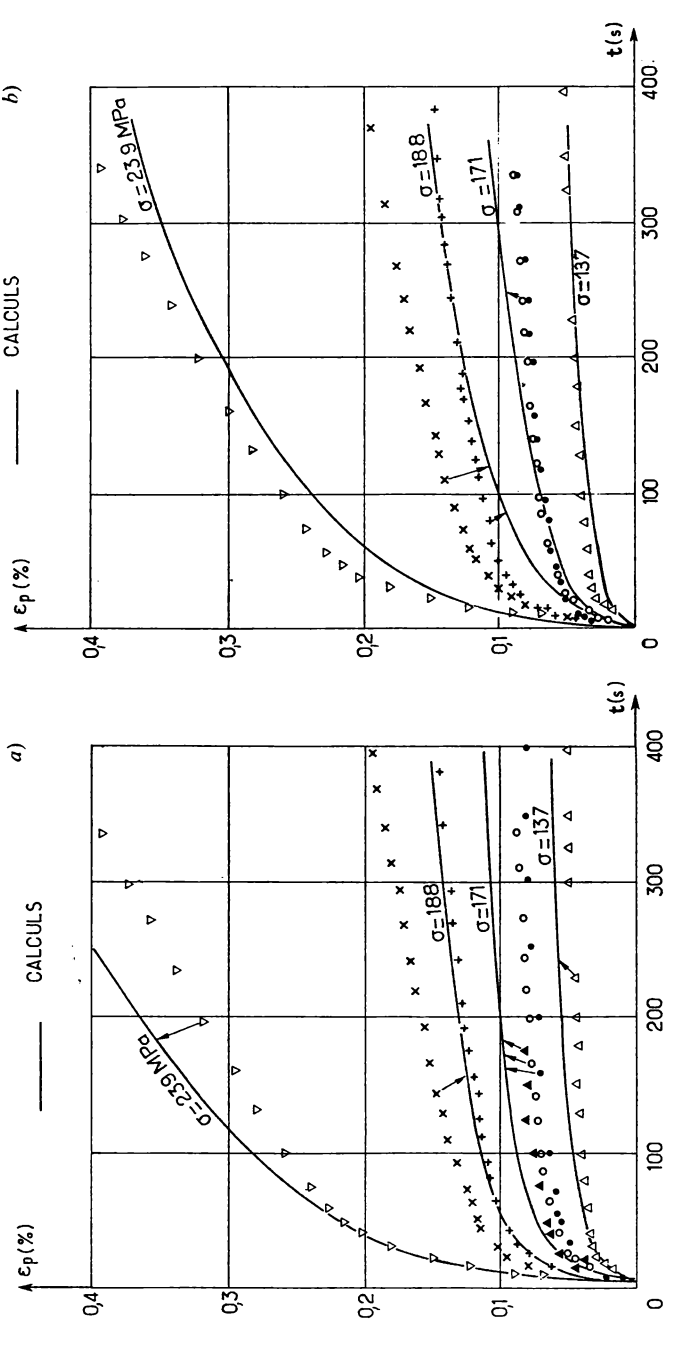


Fig. 39. Comparaison des deux formes de lois avec le fluage primaire de l'alliage IN 100 (non protégé). Ces lois ont été identifiées par écrouissage et relaxation. (*a*) Loi additive, (*b*) Loi multiplicative.

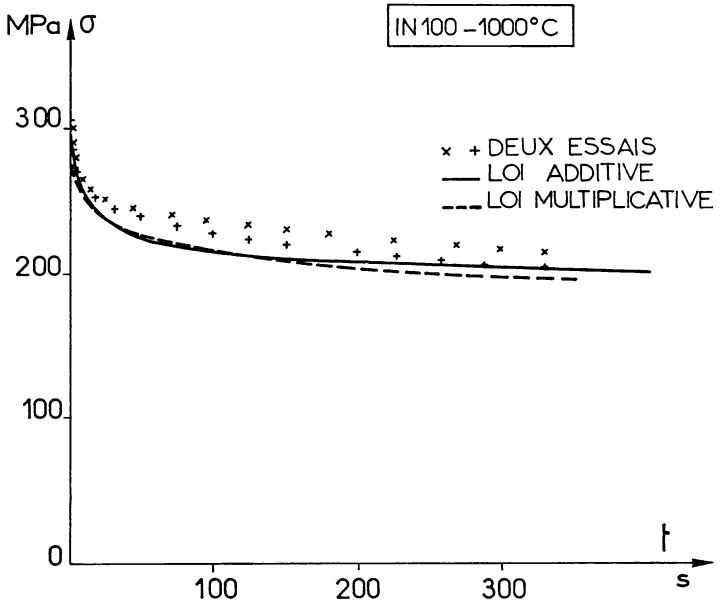


Fig. 40. Comparaison des lois additive et multiplicative sur la relaxation de l'alliage IN 100 à 1 000 °C.

— les trois types d'essais (écrouissage-relaxation-fluage) peuvent être décrits correctement par les deux modèles, sous réserve que les effets du temps (restauration) ne soient pas trop importants,

— le modèle additif rend compte du fluage secondaire si le terme $Q_1\ \varepsilon_p$ est négligeable (ou lorsque la restauration est introduite). Le fluage secondaire est atteint lorsque le processus d'écrouissage, représenté par $R(\varepsilon_p)$ est saturé. D'après les équations du paragraphe 4.2.2.1 on trouve alors :

$$\dot{\varepsilon}_p = \left\langle \frac{\sigma - Q_2 - k}{k_a} \right\rangle^{N_a}.$$

Si $\sigma \prec Q_2 + k$ le fluage a un caractère logarithmique (pas de fluage secondaire proprement dit). Avec la loi à écrouissage multiplicatif, on ne peut retrouver le fluage secondaire directement (voir § 2.4).

4.3. Loi de viscoplasticité à écrouissage cinématique

Cette loi est issue de divers travaux de plasticité se rapportant à l'écrouissage cinématique non linéaire. Son but essentiel est de rendre compte correctement des chargements cycliques, en incorporant les effets de viscoplasticité. Elle

permet de bien dissocier les différents effets et se rattache assez directement au moule thermodynamique général (cf. § 3). Notons par ailleurs que le caractère cinématique de l'écrouissage dans le domaine viscoplastique a bien été mis en évidence expérimentalement, comme cela sera souligné au paragraphe 4.3.2.

Par contre, d'autres moyens pourraient être employés pour traduire la non-linéarité de l'écrouissage cinématique : généralisation des modèles multicouches évoqués au chapitre 5, superposition de l'écrouissage cinématique linéaire et de l'effet de restauration (voir § 4.4.2).

4.3.1. *Formulation générale*

Pour simplifier l'exposé, on néglige d'abord les effets de restauration. L'incorporation de ceux-ci sera étudiée au paragraphe 4.4.2. Dans la suite immédiate la variable interne r est donc assimilée à la déformation plastique cumulée p.

4.3.1.1. *Ecrouissage cinématique pur*

L'écrouissage cinématique correspond à une translation du domaine d'élasticité ou des surfaces équipotentielles (dans l'espace des contraintes), au cours de l'écoulement viscoplastique. Ce sont donc la variable interne tensorielle $\boldsymbol{\alpha}$ et la force thermodynamique associée

$$\mathbf{X} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$$

qui sont utilisées pour formuler la théorie. Le potentiel de dissipation s'exprime en fonction des variables thermodynamiques associées et dépend éventuellement des variables d'état elles-mêmes, traitées comme paramètres :

$$\varphi^* = \Omega(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}; T, \boldsymbol{\alpha}) .$$

Dans ce qui suit on suppose que le matériau est initialement isotrope (l'écrouissage cinématique est la seule anisotropie considérée) et que l'écoulement viscoplastique conserve le volume. $\mathbf{X}$ est considéré comme le centre actuel du domaine d'élasticité. Le potentiel de dissipation s'exprime donc en fonction des invariants élémentaires de $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}$, de $\mathbf{X}$ et de $\boldsymbol{\sigma}$.

Dans la pratique on néglige souvent l'influence du troisième invariant : pour simplifier le développement de la théorie nous écrivons donc le potentiel sous la forme :

$$\Omega = \Omega(J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}), J_2(\mathbf{X}); T, J_2(\boldsymbol{\alpha}))$$

avec $$J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) = \left[\tfrac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}') : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}')\right]^{1/2} .$$

L'écrouissage cinématique non linéaire, initialement introduit par Armstrong et Frederick pour la plasticité indépendante du temps, et repris par Malinin et Khadjinsky pour la viscoplasticité, utilise une équation d'évolution de la variable $\mathbf{X}$ comprenant deux termes : le terme d'écrouissage cinématique

(linéaire) et un terme de rappel fournissant un effet de mémoire évanescente du trajet de déformation :

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} C\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma \mathbf{X}\dot{p}$$

Notons que ce terme de rappel fait intervenir le module $\dot{p}$ de la vitesse de déformation plastique. Il est homogène au premier terme et l'effet de rappel est donc instantané, indépendant du temps ou de la vitesse. Le modèle traduit ainsi un écrouissage non linéaire par la déformation, sans effet de restauration par le temps.

Pour incorporer une telle modélisation dans le moule thermodynamique général, il est nécessaire de conserver dans le potentiel la variable $\boldsymbol{\alpha}$. On écrira :

$$\Omega = \Omega\left(J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - k + \frac{\gamma}{2C} J_2^2(\mathbf{X}) - \frac{2\gamma C}{9} J_2^2(\boldsymbol{\alpha}) \quad ; \quad T\right)$$

les coefficients k, γ, C pouvant dépendre eux aussi de la température.

Les vitesses de la déformation plastique et de la variable cinématique s'obtiennent par la loi de normalité généralisée :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{X}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{C} \mathbf{X}\dot{p}$$

où $\dot{p}$ est toujours le module de la vitesse $\dot{p} = \left(\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right)^{1/2} = \frac{2}{3} J_2(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$. Par ailleurs, on suppose que l'énergie libre spécifique fait intervenir un terme quadratique en $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e + \frac{2}{9} C J_2^2(\boldsymbol{\alpha}) = \rho\Psi_e + \frac{1}{3} C\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha}$$

si bien que :

$$\mathbf{X} = \frac{2}{3} C\boldsymbol{\alpha}.$$

L'emploi de cette relation conduit à :

$$\Omega = \Omega(J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - k; T)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma\boldsymbol{\alpha}\dot{p}$$

$$\mathbf{X} = \frac{2}{3} C\boldsymbol{\alpha}$$

qui définissent complètement la loi de comportement. En combinant les deux dernières relations on retrouve facilement l'équation gouvernant la variable $\mathbf{X}$:

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} C\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma \mathbf{X}\dot{p} .$$

Notons les rôles joués par les deux termes supplémentaires du potentiel initial : le premier, dépendant de $\mathbf{X}$ fait apparaître le terme de rappel dans l'équation gouvernant la variable cinématique ; le second, qui dépend de la variable $\boldsymbol{\alpha}$ elle-même, permet de retrancher l'effet du premier terme sur la limite d'élasticité k, à l'aide de la relation de dépendance entre $\mathbf{X}$ et $\boldsymbol{\alpha}$. Ce procédé assez artificiel est cependant compatible avec le cadre général que nous nous sommes fixé.

Dans les expressions ci-dessus les coefficients $\frac{2}{3}$ interviennent afin que les relations correspondantes en traction-compression s'écrivent de façon simple. Il est, de plus, facile de vérifier que si $\mathbf{X}(0)$ est un déviateur, la loi d'évolution implique que $\mathbf{X}$ reste un déviateur : notons que cette propriété n'est pas indispensable puisque toute théorie de viscoplasticité incompressible est invariante pour une translation des surfaces équipotentielles suivant l'axe d'incompressibilité (trissectrice des axes principaux du tenseur des contraintes).

Dans une large gamme de variation des variables, le potentiel de dissipation pourra être choisi sous forme de fonction puissance :

$$\Omega = \frac{K}{n+1} \left\langle \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - k}{K} \right\rangle^{n+1}$$

où les coefficients k, K, n ainsi que C et γ dépendent de la température. Les équations de l'écoulement et de l'écrouissage sont alors :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2}\dot{p}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})}$$

$$\dot{p} = \left\langle \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - k}{k} \right\rangle^n$$

$$\mathbf{X} = \frac{2}{3} C\boldsymbol{\alpha}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma\boldsymbol{\alpha}\dot{p}$$

C'est sous cette forme que la loi de viscoplasticité à écrouissage cinématique non linéaire est utilisée. Notons que cette forme est compatible avec des chargements à température variable. Pour une variation rapide de température, se produisant sans écoulement, la variable $\boldsymbol{\alpha}$ ne change pas. Par contre, la contrainte interne $\mathbf{X}$ évolue instantanément car le coefficient C dépend généralement de la température.

4.3.1.2. *Superposition de l'écrouissage isotrope*

A l'écrouissage cinématique non linéaire il est possible de superposer un écrouissage isotrope, soit pour améliorer la modélisation (en traction par exemple), soit parce que l'on observe effectivement une expansion des surfaces équipotentielles autour de leur centre, soit enfin pour décrire les effets de durcissement ou d'adoucissement cycliques.

L'écrouissage isotrope s'introduit dans l'énergie libre à l'aide de la variable indépendante p et la force thermodynamique associée :

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p}$$

intervient dans le potentiel de dissipation. Celui-ci peut aussi dépendre paramétriquement de la variable p :

$$\varphi^* = \Omega(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R; T, \boldsymbol{\alpha}, p) .$$

En faisant les mêmes hypothèses que précédemment on est amené à écrire les deux potentiels sous les formes suivantes :

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e + \frac{1}{3} C\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} + h(p)$$

$$\Omega = \Omega\Big(J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k + \frac{1}{2} \frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\mathbf{X}) - \\ - \frac{2}{9} C\gamma(p)\, J_2^2(\boldsymbol{\alpha}) \ ; \ T, p \Big) .$$

On en déduit les variables thermodynamiques associées :

$$\mathbf{X} = \frac{2}{3} C\boldsymbol{\alpha} \quad \text{et} \quad R = h'(p)$$

et les lois d'évolution :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})}$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} = \left(\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right)^{1/2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = - \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{X}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2} \frac{\gamma(p)}{C} \mathbf{X} \dot{p} .$$

A la place de la relation sur $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, on peut employer la relation sur $\dot{\mathbf{X}}$:

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} C\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma(p)\, \mathbf{X} \dot{p} .$$

Le rôle joué par chacun des deux termes supplémentaires dans le potentiel est le même que précédemment. L'emploi ultérieur de la relation entre $\mathbf{X}$ et $\boldsymbol{\alpha}$ permet de réduire le potentiel à :

$$\Omega = \Omega(J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k\,;\, T, p)\,.$$

Les potentiels peuvent encore être particularisés : l'énergie libre spécifique avec un terme exponentiel pour la fonction $h(p)$, comme au paragraphe 4.2.1.3, le potentiel de dissipation avec une fonction puissance :

$$h(p) = Qp - \frac{Q}{b}(1 - \exp(-bp))$$

$$\Omega = \frac{K(p)}{n+1}\left\langle \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k}{K(p)} \right\rangle^{n+1}$$

où les coefficients n, k, b, R_0, Q et la fonction $K(p)$ dépendent de la température.

L'ensemble des équations de la viscoplasticité cyclique avec écrouissage cinématique non linéaire et écrouissage isotrope sous conditions isothermes se ramène ainsi à :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2}\dot{p}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})}$$

$$\dot{p} = \left\langle \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k}{K(p)} \right\rangle^n$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3}C\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma(p)\,\mathbf{X}\dot{p}$$

$$\dot{R} = b(Q - R)\,\dot{p} \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}(0) = R(0) = 0$$

La dernière équation peut être remplacée par l'expression de R qui en découle :

$$R = Q(1 - \exp(-bp))\,.$$

Le terme linéaire de la relation d'écrouissage isotrope du paragraphe 4.2.1.2 a été omis, de façon à permettre la stabilisation cyclique : lorsque les cycles avec plasticité s'accumulent, p augmente indéfiniment, mais R se stabilise. Notons que l'on dispose de trois moyens pour introduire dans la loi de comportement des effets d'écrouissage à caractère isotrope, en jouant :

— sur la dimension du domaine d'élasticité et des surfaces équipotentielles par la fonction $R(p)$;

— sur la partie visqueuse de la contrainte (dimension des surfaces équipotentielles) par la fonction $K(p)$;

— sur le mouvement du centre $\mathbf{X}$ du domaine d'élasticité par la fonction $\gamma(p)$.

Le choix entre ces divers procédés, ou leur combinaison, ainsi que la détermination des coefficients n, k, C constituent une des difficultés du problème d'identification (voir le paragraphe sur la traction compression).

4.3.1.3. *Etude de la dissipation*

La puissance mécanique dissipée (ou dissipation intrinsèque) est donnée par

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - R\dot{p}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ et p étant les deux seules variables internes indépendantes, utilisées dans les deux paragraphes précédents.

Dans le cadre choisi, faisant appel à la règle de normalité généralisée, le second principe est facilement vérifié dès que le potentiel de dissipation Ω est une fonction convexe de ses variables et contient l'origine, c'est-à-dire s'annule à l'origine. Pour un potentiel s'exprimant sous forme de fonction puissance, proportionnel par exemple à :

$$\left\langle J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k + \frac{1}{2}\frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\mathbf{X}) - \frac{2}{9} C\gamma(p)\, J_2^2(\boldsymbol{\alpha}) \right\rangle^{n+1}$$

ces deux conditions découlent immédiatement du caractère positif des coefficients k, C et de la fonction $\gamma(p)$ (pour $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{X} = 0$, $R = 0$ la quantité entre crochets est négative, ce qui annule Ω).

On peut effectivement reporter la loi de comportement dans la dissipation mécanique. On trouve :

$$\Phi_1 = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) : \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}'}{J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} - R\dot{p} + \frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\mathbf{X})\, \dot{p}$$

ou encore :

$$\Phi_1 = \left[J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k + \frac{1}{2}\frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\mathbf{X}) - \frac{2}{9} C\gamma(p)\, J_2^2(\boldsymbol{\alpha}) \right] \dot{p} +$$

$$+ \left[k + \frac{1}{2}\frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\mathbf{X}) + \frac{2}{9} C\gamma(p)\, J_2^2(\boldsymbol{\alpha}) \right] \dot{p}\,.$$

Compte tenu de la relation entre $\mathbf{X}$ et $\boldsymbol{\alpha}$, on peut réduire chacun des deux termes ci-dessus et vérifier que chacun d'eux est positif séparément :

$$\Phi_1 = [J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k\,]\,\dot{p} + \left[k + \frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\mathbf{X}) \right] \dot{p}\,.$$

Le premier terme est positif ou nul puisque $\dot{p}$ est nul dès que le terme entre crochets est négatif, le second est positif puisque k, γ et C le sont.

4.3.2. *Identification d'après des essais de traction-compression*

4.3.2.1. *Propriétés de la loi à écrouissage cinématique non linéaire en traction-compression*

Les équations générales se particularisent facilement au cas de la traction compression dans lequel le déviateur des contraintes et le tenseur « contrainte interne cinématique » s'expriment par :

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}, \qquad X = X' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}X & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}X \end{bmatrix}$$

on a alors : $J_2(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) = | \sigma - X |$ et la loi d'écoulement devient :

$$\dot{\varepsilon}_p = \left\langle \frac{| \sigma - X | - R - k}{K(\tilde{\varepsilon}_p)} \right\rangle^n \mathrm{Sgn}\,(\sigma - X)$$

$$\dot{X} = C\dot{\varepsilon}_p - \gamma(\tilde{\varepsilon}_p)\, X\, | \dot{\varepsilon}_p |$$

$$\dot{R} = b(Q - R)\, | \dot{\varepsilon}_p |$$

où $\tilde{\varepsilon}_p$ est la déformation plastique cumulée définie par $\dot{\tilde{\varepsilon}}_p = | \dot{\varepsilon}_p |$. Les différentes composantes des tenseurs vitesses sont définies par :

$$\dot{\varepsilon}_{p_{11}} = \dot{\varepsilon}_p \qquad \dot{\varepsilon}_{p_{22}} = \dot{\varepsilon}_{p_{33}} = -\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_p$$

$$\dot{X}_{11} = \frac{2}{3}\dot{X} \qquad \dot{X}_{22} = \dot{X}_{33} = -\frac{1}{3}\dot{X}.$$

Les deux variables d'écrouissage peuvent s'expliciter pour un chargement donné : si l'on a $\varepsilon_p = \varepsilon_{p_0}$ et $X = X_0$ initialement, et si γ est constante :

$$X = v\frac{C}{\gamma} + \left(X_0 - v\frac{C}{\gamma}\right)\exp(-\, v\gamma[\varepsilon_p - \varepsilon_{p_0}])$$

où $v = \mathrm{Sgn}\,(\sigma - X) = \pm 1$ donne le sens de l'écoulement. Cela montre que la relation entre X et ε_p n'est pas biunivoque, la variable cinématique décrivant elle-même des boucles d'hystérésis (fig. 41*a*). Par contre, pour la variable isotrope on peut intégrer depuis l'instant initial :

$$R = Q(1 - \exp(-\, b\tilde{\varepsilon}_p)).$$

La loi d'écoulement peut être inversée, pour donner :

$$\sigma = X(\varepsilon_p, X_0, \varepsilon_{p_0}) + vR(\tilde{\varepsilon}_p) + vk + vK(\tilde{\varepsilon}_p)\, | \dot{\varepsilon}_p |^{1/n}$$

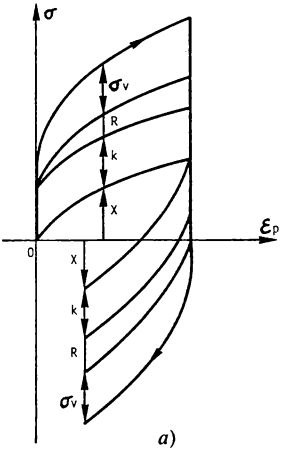
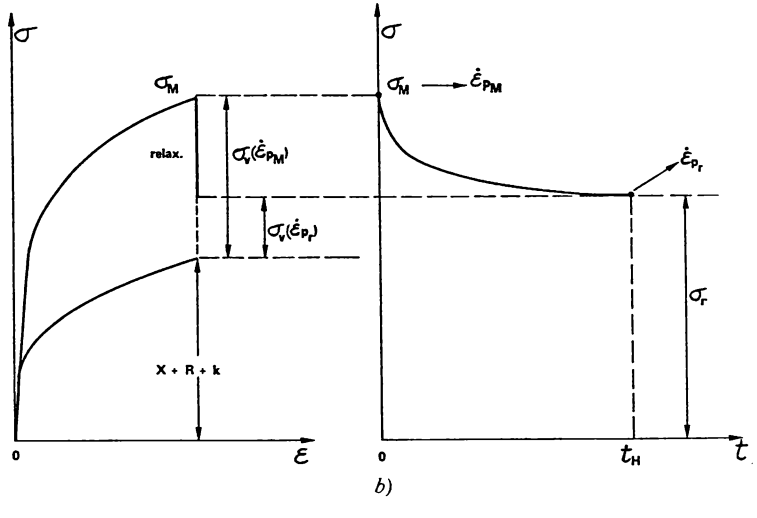


Fig. 41. Décomposition de la contrainte en contrainte interne et contrainte visqueuse.
(*a*) Chargement cyclique.
(*b*) Cas de la relaxation.



les fonctions X et R étant données par les relations ci-dessus. Cette forme fait bien apparaître la décomposition additive entre l'écrouissage et la contrainte visqueuse (qui est éventuellement influencée par l'écrouissage) :

$$\sigma_v(\tilde{\varepsilon}_p, \dot{\varepsilon}_p) = K(\tilde{\varepsilon}_p) \mid \dot{\varepsilon}_p \mid^{1/n}.$$

Parmi les propriétés importantes sous chargement cyclique, déjà évoquées dans le chapitre plasticité (§ 4.4.3.2), soulignons les suivantes, valables lorsque les effets de durcissement ou d'adoucissement cycliques sont stabilisés, c'est-à-dire lorsque R, γ, K sont constants :

— sous chargement à contrainte imposée la stabilisation de la réponse est obtenue en moins de deux cycles ;

— sous déformation imposée la stabilisation peut prendre quelques cycles, suivant la valeur initiale de X et les valeurs respectives de C et γ ;

— si la déformation est imposée avec la même vitesse en charge et décharge, le modèle donne l'effet de relaxation de la contrainte moyenne, la stabilisation (avec écoulement) ne pouvant avoir lieu que lorsque les valeurs minimale et maximale de X sont opposées. La relation sur X conduit à la valeur maximale :

$$X_M = \frac{C}{\gamma} \operatorname{th}\left(\gamma \frac{\Delta\varepsilon_p}{2}\right)$$

où $\Delta\varepsilon_p$ est l'amplitude de déformation au cours du cycle,

— en relaxation cyclique, c'est-à-dire à déformation imposée. avec un temps de maintien en traction par exemple, la contrainte relaxée à chaque cycle

$$\delta\sigma = \sigma_M - \sigma_r$$

évolue (ou n'évolue pas) en même temps que la fonction $K(\tilde{\varepsilon}_p)$. On peut montrer que la relation suivante, où l'indice s désigne les valeurs stabilisées, est approximativement vérifiée :

$$\frac{\delta\sigma_s}{\delta\sigma_1} = \frac{\sigma_{Ms} - \sigma_{rs}}{\sigma_{M_1} - \sigma_{r_1}} \simeq \frac{K_s}{K_1} \frac{\dot{\varepsilon}_{pMs}^{1/n} - \dot{\varepsilon}_{prs}^{1/n}}{\dot{\varepsilon}_{pM_1}^{1/n} - \dot{\varepsilon}_{pr_1}^{1/n}} \simeq \frac{K_s}{K_1}$$

avec les notations définies par la figure 41*b*. L'exemple de l'acier 316 L, donné au paragraphe 2.6, est une bonne illustration de cette évolution de la contrainte relaxée.

4.3.2.2. *Bilan des puissances dissipées*

La dissipation intrinsèque s'exprime maintenant par :

$$\Phi_1 = \sigma\dot{\varepsilon}_p - X\dot{\alpha} - R\,|\,\dot{\varepsilon}_p\,|$$

$$= (|\,\sigma - X\,| - R - k)\,|\,\dot{\varepsilon}_p\,| + k\,|\,\dot{\varepsilon}_p\,| + \frac{\gamma(\tilde{\varepsilon}_p)}{C} X^2\,|\,\dot{\varepsilon}_p\,|\,.$$

Le premier terme correspond à la dissipation visqueuse $\sigma_v\,|\,\dot{\varepsilon}_p\,|$, le second à la dissipation due aux contraintes internes initiales. le troisième à la dissipation cinématique. La figure 42 illustre cette décomposition de la dissipation au cours de la première traction. On peut écrire :

$$\sigma\dot{\varepsilon}_p = \left(\sigma - X - R + \frac{\gamma}{C} X^2\right)\dot{\varepsilon}_p + R\dot{\varepsilon}_p + \left(X - \frac{\gamma}{C} X^2\right)\dot{\varepsilon}_p\,.$$

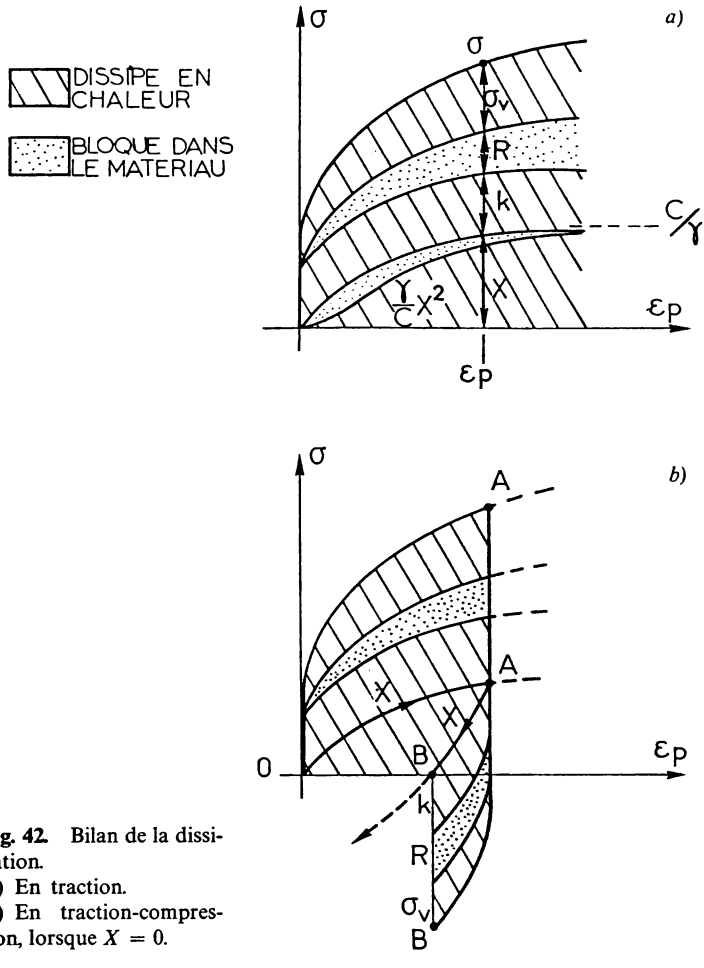


Fig. 42. Bilan de la dissipation.
(*a*) En traction.
(*b*) En traction-compression, lorsque $X = 0$.

A partir de l'état initial, le travail plastique dissipé :

$$\int_0^A \sigma \, d\varepsilon_p$$

peut être séparé en :

— la partie Φ_1, évacuée par le système (dissipée en chaleur par exemple),

— la partie $\int_0^A R \, d\varepsilon_p$ qui est bloquée dans le système,

— la partie $\int_0^A \left(X - \frac{\gamma}{C} X^2\right) d\varepsilon_p$ « bloquée » provisoirement, disponible pour permettre l'évanescence de la contrainte cinématique X au cours de la compression ultérieure. Elle sera dissipée en chaleur à ce moment. Notons que l'énergie bloquée dans le système n'est autre que la partie d'énergie libre correspondant aux variables internes :

$$\rho\Psi_p = \frac{1}{2} C\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} + Q\left(p + \frac{1}{b}\exp(-bp) - \frac{1}{b}\right)$$

et que l'on a donc :

$$\int_0^A R\, d\varepsilon_p = Q\left(\varepsilon_{p_A} + \frac{1}{b}\exp(-b\varepsilon_{p_A}) - \frac{1}{b}\right) \cdot$$

$$\int_0^A \left(X - \frac{\gamma}{C} X^2\right) d\varepsilon_p = \frac{1}{2} C\alpha_A^2 = \frac{1}{2}\frac{X_A^2}{C}.$$

Au point B, lorsque X est de nouveau nul, on retrouve les conditions initiales pour cette variable et la seule énergie emmagasinée est celle due à la variable isotrope. On voit alors clairement comment les mesures calorimétriques, donnant de l'ordre de 90 % d'énergie dissipée en chaleur, peuvent être prises en compte.

4.3.2.3. *Identification des coefficients*

La modélisation du comportement monotone et du comportement cyclique nécessite l'introduction d'un nombre élevé de coefficients. Leur identification pour un matériau donné (à une température) est un problème difficile. La méthode logique procède alors en trois temps :

— choix des essais caractéristiques et dépouillement en grandeurs mécaniques $(\sigma(t), \varepsilon_p(t))$. Ce choix dépend du domaine d'emploi envisagé (chargement initial, cycle stabilisé, effets cycliques transitoires) ;

— choix de la modélisation ; en particulier il faut décider sous quelle forme introduire l'écrouissage isotrope permettant de traduire les effets d'accommodation cyclique. La comparaison d'une courbe de traction initiale et des boucles d'hystérésis stabilisées (pour le même chargement) est d'une aide précieuse : changement de la taille du domaine d'élasticité apparent (variation de R) ou changement du module d'écrouissage apparent pour une même déformation (variation de γ). La figure 44 du chapitre plasticité illustre les variations correspondantes ;

— identification des coefficients proprement dits : c'est l'étape la plus difficile mais c'est aussi celle pour laquelle on peut employer l'identification assistée par ordinateur.

Dans la plupart des cas on se limite d'abord aux coefficients suivants :

n, K, k, C, γ pour le comportement initial,
n, K, $k + Q$, C, γ pour le comportement au cycle stabilisé,
b pour traduire éventuellement le comportement cyclique transitoire.

Ces sept coefficients sont identifiés séparément à partir des essais réalisés dans le domaine correspondant : la réponse au cycle stabilisé, le plus souvent indépendante du chargement antérieur, peut être obtenue directement en utilisant la loi en régime stabilisé ($b = 0$, $R = Q$). Le calcul de 2 ou 3 cycles successifs est alors suffisant, comme on l'a vu au paragraphe précédent. Notons aussi que la constante b n'intervient pas sur le comportement stabilisé et intervient peu dans la réponse au premier cycle. On a ainsi à déterminer successivement cinq coefficients pour le comportement initial, cinq coefficients pour le régime stabilisé, un coefficient pour le transitoire. Les valeurs correspondantes de n, K, C, γ sont enfin moyennées, à moins que l'on estime nécessaire de faire varier aussi K ou γ (comme indiqué au paragraphe 4.3.1.2). Notons que la séparation des coefficients k et $k + Q$ n'est possible que par des mesures de dissipation (mesures calorimétriques) mais cette distinction n'a pas d'importance pour la réponse mécanique du modèle.

Malgré ces séparations et les moyens numériques disponibles, le nombre des coefficients à identifier peut s'avérer trop élevé, soit parce que les expériences disponibles sont insuffisantes pour sensibiliser correctement tous les coefficients, soit pour des raisons de mauvaise convergence des algorithmes de minimisation (ces deux raisons coexistent souvent). On pourra donc s'aider d'un traitement préalable qui consiste à identifier en partie l'effet de viscosité, c'est-à-dire l'exposant n. Trois moyens complémentaires peuvent être employés.

1) Commencer par déterminer l'exposant N^* de la loi de Norton du matériau si l'on dispose d'essais de fluage secondaire à la température considérée. L'expérience montre que l'on a généralement les bornes suivantes sur n :

$$0{,}6\, N^* < n < N^* .$$

On peut alors fixer plus ou moins arbitrairement la valeur de n, en s'aidant éventuellement d'identifications similaires effectuées à d'autres températures : la relation $n(T)$ peut généralement être supposée monotone (décroissante) et homothétique de la relation $N^*(T)$. Ce premier procédé est à utiliser surtout si l'on ne dispose pas d'informations expérimentales précises sur un domaine de vitesse suffisamment étendu (pas de relaxation assez longue, pas d'essais à des vitesses ou des fréquences suffisamment différentes).

2) Utiliser un (ou plusieurs) essais de relaxation faisant apparaître trois décades de vitesse au moins pour établir une relation basée sur l'expérience, entre l'exposant n et la contrainte interne σ_i de la relation

$$\dot{\varepsilon}_p = \left(\frac{\sigma - \sigma_i}{K_\infty} \right)^n$$

pour différentes valeurs (arbitraires) du paramètre σ_i qui représente globalement :

$$\sigma_i = X(\varepsilon_p) + R(\tilde{\varepsilon}_p) + k\,.$$

Ce procédé n'est applicable que si l'écrouissage $X + R$ varie peu au cours de la relaxation, c'est-à-dire si celle-ci est effectuée pour une déformation plastique initiale déjà élevée (0,2 % par exemple). La figure 26 du paragraphe 4.2.2.1 en donne une illustration.

3) Définir un point expérimental moyen (σ^*, ε_p^*, $\dot{\varepsilon}_p^*$) d'un essai moyen, par lequel la courbe calculée correspondante devra obligatoirement passer.

Les moyens numériques disponibles pour faciliter l'identification sont de deux types (voir chap. 3) :

— les algorithmes de calcul (pas à pas dans le temps) de la réponse à une sollicitation imposée, lorsque la solution n'est pas explicite,

— les méthodes de minimisation de l'erreur (entre modèle et expérience) qui sont, soit entièrement automatiques, soit basées sur un système conversationnel graphique. De toutes façons ces méthodes ne sont performantes que si le nombre d'inconnues n'est pas trop grand.

L'opération d'identification proprement dite consiste alors à utiliser ces moyens numériques après emploi des traitements préliminaires (1-2-3) évoqués ci-dessus. Les relations obtenues en 2 et 3 permettent de réduire de 2 le nombre de coefficients indépendants ; il reste ainsi 3 coefficients au maximum pour chacune des étapes évoquées plus haut.

4.3.3. *Caractéristiques de matériaux — Domaine de validité*

Un certain nombre de coefficients caractéristiques sont indiqués dans le tableau 43, d'une part, pour la description du comportement cyclique stabilisé (cinq coefficients) et, d'autre part, pour le premier cycle et les évolutions tran-

Matériau	T °K	n	K	k	C	γ_0	$k + Q$	γ_s	b	β
Acier 316	20	24	151	82	162 400	2 800	142	2 800	8	0
"	600	12	150	6	24 800	300	86	300	10	0
Alliage TA 6 V	350	40	190	200	91 000	350	139	350	1,6	0
Alliage INCO 718	550	40	140	500	210 000	420	320	420		0
Alliage IN 100	700	28	580	110	678 000	1 750	90	2 060	400	1 500
"	800	14	630	80	615 000	1 530	50	1 870	400	1 200
"	900	9	490	60	362 500	1 200	25	1 540	200	1 000
"	1 000	7,5	450	30	139 500	940	15	1 200	100	400
"	1 100	6,5	420	17	41 000	700	7	830	60	300

Tableau 43. Coefficients de la loi d'écrouissage cinématique non linéaire et de l'écrouissage isotrope pour l'évolution cyclique. La fonction $\gamma(p)$ est de la forme : $\gamma(p) = \gamma_s + (\gamma_0 - \gamma_s)\exp(-\beta p)$.

sitoires (quatre coefficients supplémentaires). Comme pour la loi à écrouissage isotrope, ces coefficients dépendent de la température de façon prononcée. La figure 44 permet par exemple de comparer pour l'alliage IN 100 l'évolution avec la température de trois exposants de viscosité, N^* correspondant à la loi de Norton (sans écrouissage), N à la loi à écrouissage isotrope multiplicatif du paragraphe 4.2 et n à la loi à écrouissage cinématique non linéaire (écrouissage additif).

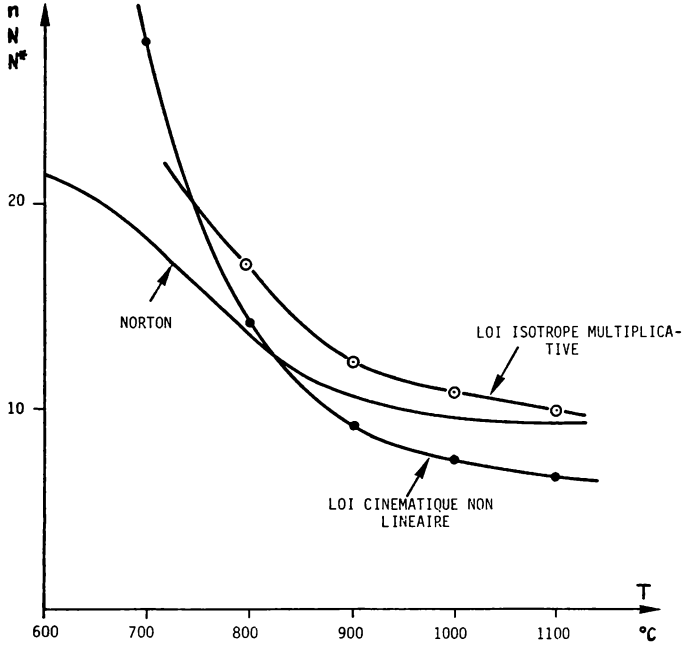


Fig. 44. Evolution en fonction de la température de trois types d'exposants de viscosité. Alliage IN 100.

Les figures 45 à 47 donnent des exemples de confrontations entre les résultats expérimentaux et la modélisation pour l'alliage IN 100. On notera en particulier que le modèle rend compte :

— de l'effet Bauschinger (réduction de la limite d'élasticité en compression après la première traction),

— du fluage primaire et de la relaxation lors de la première traction,

— du premier cycle (fig. 45) et du cycle stabilisé (fig. 46) dans les essais à déformation ou à contrainte contrôlée, avec ou sans temps de maintien. Un temps de maintien à force imposée provoque un fluage, c'est-à-dire une aug-

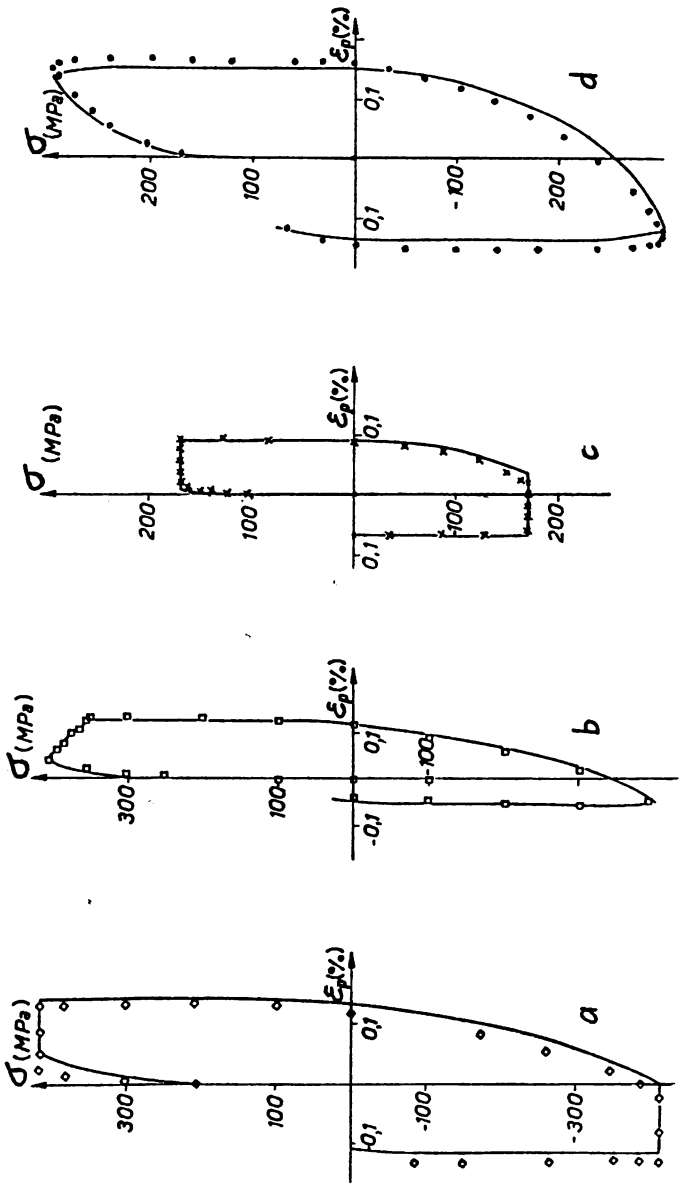


Fig. 45. Description des premiers cycles sur l'alliage IN 100 à force imposée ((*a*), (*c*)) et à déplacement imposé ((*b*), (*d*)) à 900 °C ((*a*), (*b*)) et 1 000 °C ((*c*), (*d*)). □ × * essais, —— simulations.

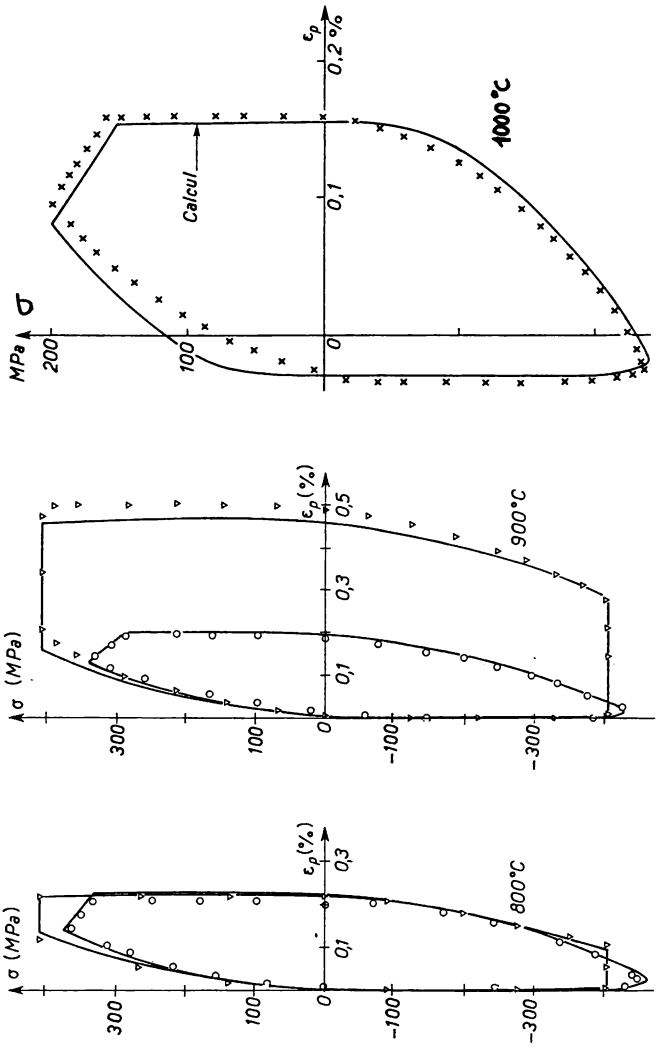


Fig. 46. Description des cycles stabilisés à force imposée (▽) ou à déplacement imposé (○ ×) sur l'alliage IN 100 à 800, 900, 1 000 °C (loi à 5 coefficients).

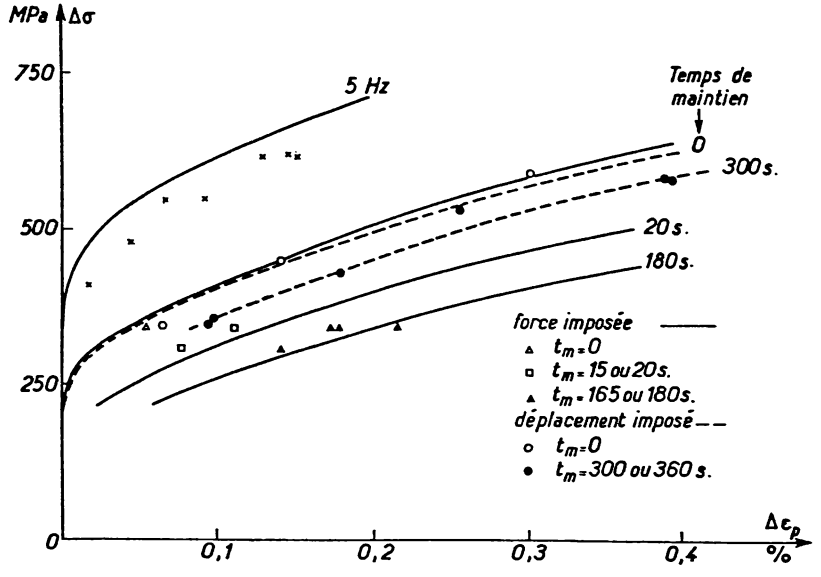


Fig. 47. Description des courbes cycliques sur l'alliage IN 100 à 1 000 °C. Influence du temps de maintien ou de la fréquence. × □ △ ○ ● essais, ═══ simulations.

mentation (ou diminution) de déformation à contrainte constante. A déplacement imposé le maintien provoque la relaxation de la contrainte : la relation entre $\delta\sigma$ et $\delta\varepsilon_p$ est alors linéaire, elle correspond à la décroissance de l'allongement élastique.

— des différentes courbes cycliques enfin, fonctions du temps de maintien ou de la fréquence (fig. 47). On notera que des écarts de fréquence allant de 0,006 à 5 Hz sont assez bien représentés.

La validité du modèle cinématique non linéaire est bien sûr, comme dans les autres cas, limitée par certains aspects :

— le domaine de température, qui doit correspondre à une viscosité suffisante pour le matériau,

— le domaine des vitesses comprises entre 10^{-8} et $10^{-3}\,s^{-1}$: pour les vitesses les plus faibles, surtout en fluage, il est nécessaire de tenir compte d'effets de restauration (voir § 4.4),

— le modèle rend compte du fluage secondaire pour les contraintes élevées ; la vitesse de fluage secondaire est donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_p^* = \left\langle \frac{\sigma - \frac{C}{\gamma} - Q - k}{K} \right\rangle^n$$

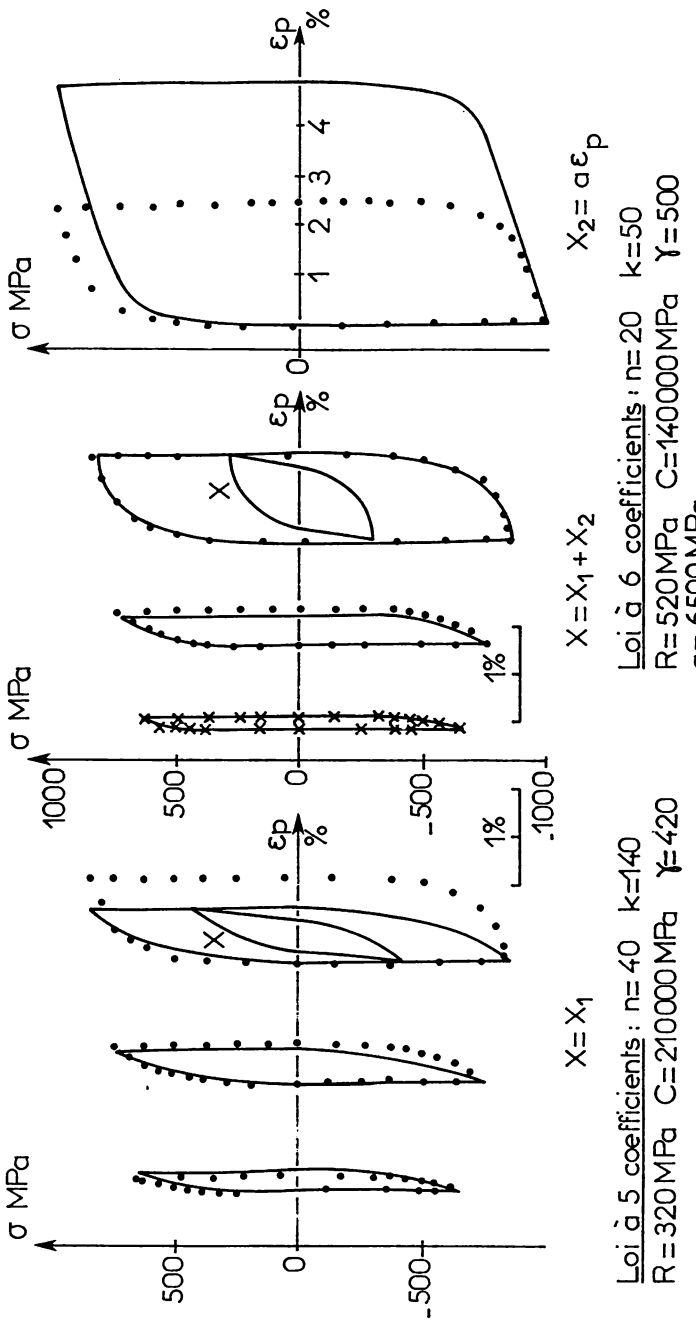


Fig. 48. Calcul des cycles stabilisés de l'alliage INCO 718 à 550 °C avec deux lois d'écrouissage cinématique.

où Q est la valeur de R à saturation. Pour rendre compte du fluage secondaire sous contraintes plus faibles, il faut introduire les effets de restauration (on verra au chapitre 7 que l'endommagement de fluage est lui aussi susceptible d'intervenir sur le fluage secondaire).

La principale limitation est liée à la déformation. Le modèle donne une saturation de l'écrouissage cinématique lorsque la déformation augmente, la rapidité de saturation étant fixée par le coefficient γ. Si celui-ci est choisi grand pour représenter correctement le domaine des petites déformations (< 0,5 % par exemple), les effets d'écrouissage sont mal représentés au-delà de 1 % (tout au moins en régime stabilisé). La comparaison des cas de l'IN 100 et l'INCO 718 illustre bien la difficulté : dans le premier cas les déformations sont limitées à 0,5 %, la modélisation est donc excellente ; dans le second, le domaine allant jusqu'à 2 % la confrontation est moins bonne.

Comme dans le cas de la plasticité (cf. § 4.4.4.2 du chap. 5) le domaine de validité en déformation peut être élargi en introduisant une seconde variable cinématique décrivant l'écrouissage dans le domaine où la première est saturée. Le centre du domaine d'élasticité s'écrit alors

$$\mathbf{X} = \sum_i \mathbf{X}_i$$

chacune des variables cinématiques est gouvernée par une équation similaire (de façon découplée) :

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \frac{2}{3} C_i \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma_i \mathbf{X}_i \dot{p} .$$

L'introduction de coefficients supplémentaires C_i, γ_i permet d'affiner la modélisation comme le montre la figure 48 pour l'alliage INCO 718. Avec une seule variable cinématique, le calcul était totalement faux pour l'essai d'amplitude la plus élevée ($\Delta\varepsilon_p = 2{,}5$ %). Les cycles $\sigma - \varepsilon_p$ ont une origine indéfinie que l'on fait coïncider au passage en traction.

4.4. Modélisation d'effets particuliers

Le domaine des températures élevées fait apparaître une grande diversité dans les comportements : divers phénomènes, qui correspondent souvent à une instabilité de la structure physique du matériau, peuvent interagir avec la viscoplasticité et produire des effets complexes, tels que les effets d'histoire de la température, les effets de restauration, de vieillissement sous déformation, de combinaison de plasticité et de viscoplasticité.

4.4.1. *Effets d'histoire de la température*

Les lois de viscoplasticité étudiées dans les paragraphes précédents s'appliquent à température variable pour des matériaux stables : les expressions

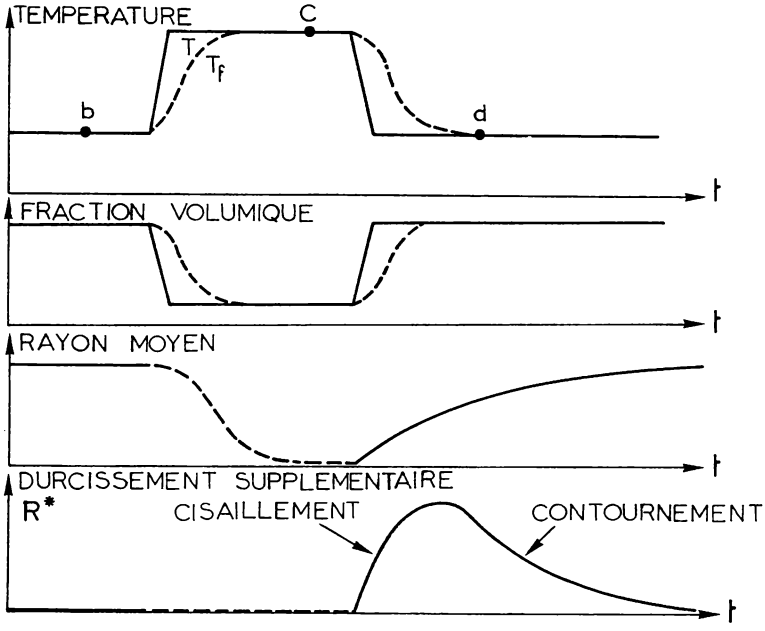
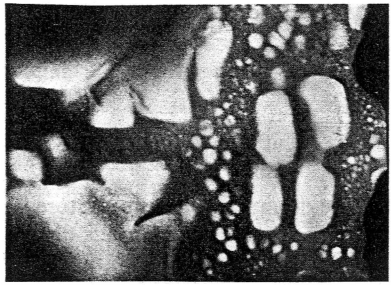


Fig. 49. Schéma des processus de dissolution-précipitation-croissance pendant et après une surchauffe et des effets de durcissement correspondants.

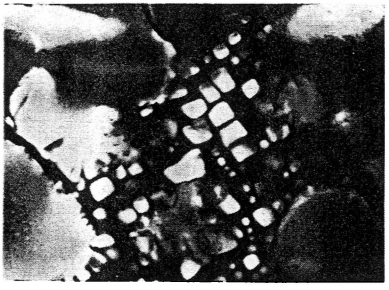
déterminées à partir d'essais isothermes font intervenir des coefficients qui dépendent de la température de façon univoque ; cette hypothèse est généralement bien vérifiée tant que la température évolue à une vitesse inférieure à environ 30 °C par seconde.

Cependant, dans certains matériaux (et dans un domaine de températures élevées), la microstructure peut évoluer de façon instable sous les variations de température. Dans un alliage biphasé tel que l'IN 100 (phase γ et précipités de phase γ'), une montée en température de T_0 à T_1 produit une dissolution partielle des précipités moyens (initialement stables), qui correspond à une diminution de la fraction volumique de précipités (fig. 49) ; lorsque la température revient à T_0 il y a reprécipitation d'une phase γ' beaucoup plus fine qui induit une résistance à la déformation plus grande que sous les conditions normales. La figure 50 illustre ce processus. Par la suite, à la température T_0, il y a coalescence des précipités qui reviennent à leur taille normale.

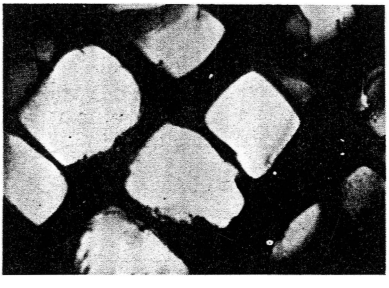
De tels effets d'instabilité par évolution de la température peuvent être décrits en ajoutant deux variables internes T_f et r^* qui correspondent globalement à la fraction volumique et au rayon moyen des précipités durcissants. Les variables thermodynamiques associées sont S_f et R^*. Quelques remarques permettent de choisir des équations d'évolution satisfaisantes.



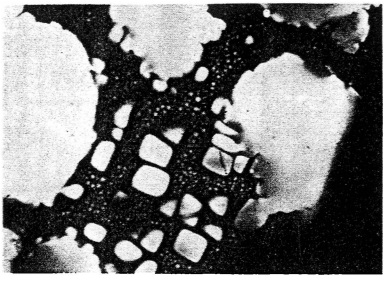
a) A froid



b) 4 h à 900 °C



c) 4 h à 900 °C + 10 min à 1 000 °C



d) 4 h à 900 °C + 10 min à 1 000 °C + 10 min à 900 °C

Fig. 50. Microstructure de l'IN 100 (× 20 000), (*a*) à froid, après traitement de protection. (*b*) avant surchauffe. (*c*) pendant la surchauffe, (*d*) après surchauffe.

— Lorsque la température évolue, la fraction volumique n'atteint pas immédiatement son état d'équilibre : il y a un effet de retard qui peut être décrit globalement par :

$$\dot{T}_f = \frac{T - T_f}{\alpha}.$$

On voit que T_f joue le rôle de température fictive retardée.

— Une modélisation simple consiste à décomposer le potentiel de dissipation φ^* en la somme d'un potentiel de viscoplasticité Ω_p (même forme que dans le cas stable) et d'un potentiel d'instabilité Ω_i qui dépend des variables associées à l'effet d'instabilité :

$$\Omega_i = \Omega_i(S_f, R^*).$$

— La taille des précipités agit sur l'écoulement viscoplastique. Seule la différence entre l'état actuel (en cours d'instabilité) et l'état normal (métastable) est prise en compte et la variable R^* correspond à un durcissement addition-

nel ; on remplace R par $R + R^*$ dans le potentiel viscoplastique Ω_p puisqu'il est raisonnable de considérer cet effet comme isotrope :

$$\Omega_p = \Omega_p(J_2(\sigma - X) - R - R^* - k)$$

et R^* est supposé toujours positif. La fraction volumique n'apporte pas d'effet durcissant, Ω_p ne dépend donc pas de S_f.

— L'évolution de R^* pendant et après une diminution de température fait apparaître deux phases, pendant lesquelles il y a augmentation puis diminution du durcissement et retour à l'état normal (fig. 49). Les observations et les modèles physiques indiquent que ces phases correspondent à des mécanismes différents de franchissement des précipités par les dislocations (cisaillement puis contournement).

Un modèle qualitativement correct et donnant des résultats satisfaisants peut être établi dans le cadre du moule thermodynamique général. Une version simplifiée de ce modèle s'écrit :

$$\dot{T}_f = \frac{T - T_f}{\alpha}$$

$$\dot{R}^* = a(T_f - T) - \frac{R^*}{\beta}, \qquad R^* \geqslant 0.$$

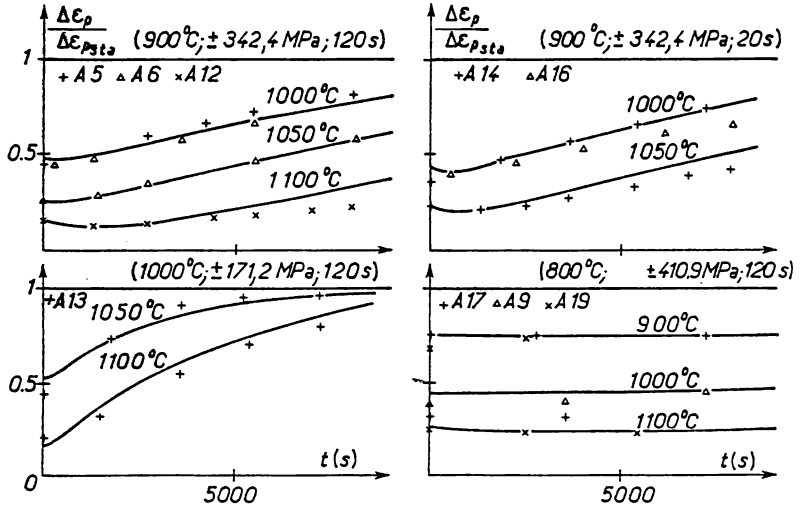


Fig. 51. Durcissement et périodes d'évanescence sur l'alliage IN 100. Le chargement et la température d'essai sont indiquées en haut, $\Delta\varepsilon_{p_{sta}}$ est l'amplitude de déformation plastique avant la surchauffe. La température de surchauffe est indiquée sur chaque courbe (d'après G. Cailletaud).

Les coefficients a, α, β dépendent fortement de la température comme en dépendent les phénomènes de dissolution, de précipitation et de croissance des précipités. La figure 51 permet de juger de la validité de ce modèle pour l'alliage IN 100.

4.4.2. *Effets de recouvrance et de restauration*

La recouvrance partielle de la déformation plastique peut se mettre en évidence à haute température pour un matériau fortement visqueux : après déformation, en fluage par exemple, puis décharge élastique, il y a diminution progressive de la déformation résiduelle au cours d'un maintien en température à force nulle. Cet effet est pris en compte par un modèle à écrouissage cinématique non linéaire comme le montre schématiquement la figure 52 : si le domaine d'élasticité ($R + k$) est faible il y a écoulement négatif à contrainte nulle. La déformation récupérable (au bout d'un temps infini) est indiquée par la position du point C tel que $\sigma = X - R - k = 0$.

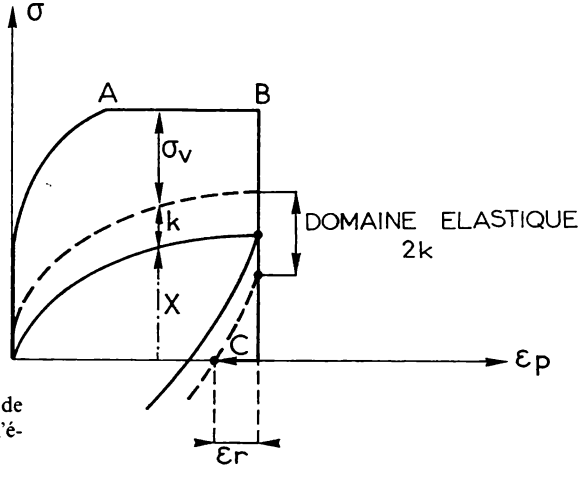


Fig. 52. Description de la recouvrance par l'écrouissage cinématique.

Au contraire, l'effet de restauration, qui se manifeste aussi à haute température, implique une évanescence partielle de l'effet d'écrouissage : sous l'action de l'agitation thermique, il se produit une restauration lente de la structure cristalline du métal par annihilation des dislocations et redistribution (ou relaxation) des contraintes internes. Cette restauration provoque donc une diminution de la résistance mécanique.

Les équations permettant de décrire la restauration sont, au niveau des contraintes internes, similaires à celles qui décrivent la relaxation de contrainte macroscopique dans l'essai de relaxation (décrit ici avec la loi de Norton) :

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p) = E\left[\dot{\varepsilon} - \left(\frac{\sigma}{\lambda^*}\right)^{N^*}\right] = -E\left(\frac{\sigma}{\lambda^*}\right)^{N^*}.$$

Dans le cas des contraintes internes on écrit une équation de la même forme :

$$\dot{\sigma}_i = E_p\left[\dot{\varepsilon}_p - \left(\frac{\sigma_i}{\lambda_i}\right)^{N_i}\right]$$

où le premier terme $E_p\,\dot{\varepsilon}_p$ donne l'effet d'écrouissage par la déformation. Il y a décroissance de σ_i lorsque $\dot{\varepsilon}_p$ est nul ou faible : $\dot{\sigma}_i = -E_p\left(\frac{\sigma_i}{\lambda_i}\right)^{N_i}$.

Ces équations de restauration, peuvent s'écrire aussi bien pour la variable cinématique que pour la variable isotrope. En utilisant le potentiel de dissipation sous la forme :

$$\varphi^* = \Omega_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R; T, \boldsymbol{\alpha}, r) + \Omega_r(\mathbf{X}, R)$$

où Ω_p est le potentiel d'écoulement déjà explicité au paragraphe 4.3.1.2 et Ω_r un potentiel de restauration. que l'on peut écrire par exemple :

$$\Omega_r = \frac{A}{a+1}\left[\frac{J_2(\mathbf{X})}{A}\right]^{a+1} + \frac{B}{b+1}\left(\frac{R}{B}\right)^{b+1}$$

l'application des équations générales donne :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \frac{3}{2}\frac{\gamma}{C}\mathbf{X}\dot{p} - \left[\frac{J_2(\mathbf{X})}{A.}\right]^a \frac{3}{2}\frac{\mathbf{X}}{J_2(\mathbf{X})} \\ \dot{r} &= \dot{p} - \left(\frac{R}{B}\right)^b. \end{aligned}}$$

L'énergie libre peut être choisie comme précédemment :

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e + \frac{1}{3}C\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} + h(r)$$

on a alors : $\mathbf{X} = \frac{2}{3}C\boldsymbol{\alpha}$ et $R = h'(r)$.

En posant $g(R) = h''(r) = h''[h'^{-1}(R)]$, on peut exprimer les équations ci-dessus en fonction de $\mathbf{X}$ et R seulement :

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3}C\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \gamma\mathbf{X}\dot{p} - C\left[\frac{J_2(\mathbf{X})}{A}\right]^a \frac{\mathbf{X}}{J_2(\mathbf{X})}$$

$$\dot{R} = g(R)\,\dot{p} - g(R)\left(\frac{R}{B}\right)^b.$$

Ces équations décrivent les effets de restauration de l'écrouissage, mais aussi certains effets d'histoire du chargement tels que ceux mis en évidence dans des essais de fluage à deux niveaux (accélération et hésitation au fluage). La figure 53 illustre schématiquement le cas de l'essai à niveaux croissants : pour une même déformation plastique dans les essais de base sous σ_1 et sous σ_2, l'état des contraintes internes n'est pas le même puisque le rapport entre le terme d'écrouissage, en $\dot{\varepsilon}^p$ ou $\dot{p}$, et le terme de restauration n'est pas le même. Le deuxième niveau commence donc avec une contrainte interne σ_{i_1} plus faible que celle existant normalement au niveau σ_2, ce qui produit l'effet d'accélération par rapport au cas de l'écrouissage par la déformation (sans restauration).

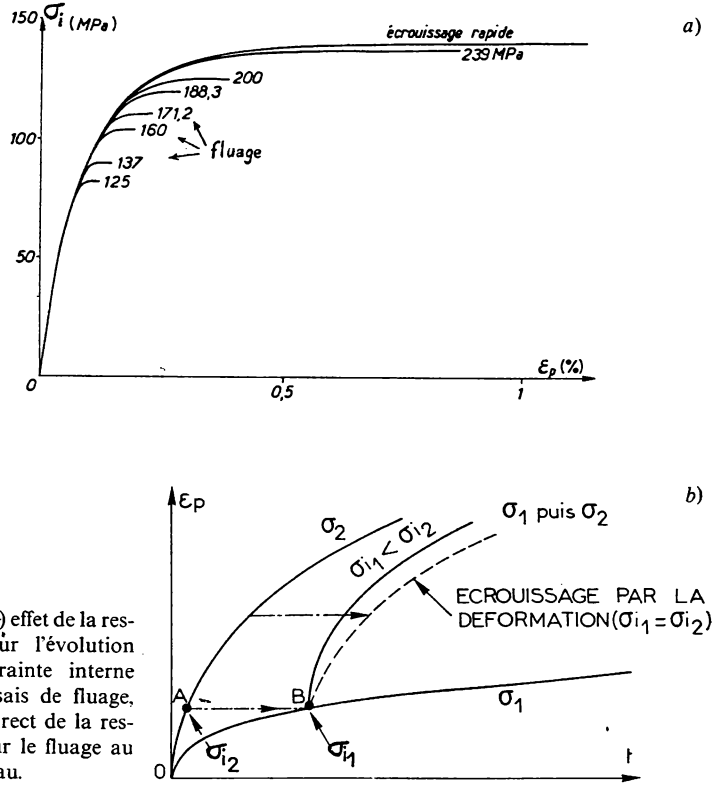


Fig. 53. (a) effet de la restauration sur l'évolution de la contrainte interne dans les essais de fluage, (b) effet indirect de la restauration sur le fluage au second niveau.

Le cas de l'hésitation au fluage pour $\sigma_2 < \sigma_1$ peut être décrit pour les mêmes raisons : au départ $\sigma_{i_1} > \sigma_{i_2}$ d'où un blocage de l'écoulement qui disparaît progressivement à cause de la restauration (σ_i décroît progressivement de σ_{i_1} à σ_{i_2}). Notons que l'effet de restauration provoque aussi une diminution de l'exposant de viscosité pour les faibles vitesses.

Dans le cas d'essais cycliques comportant des périodes de maintien on peut constater aussi des effets de restauration (voir § 2.6) : pour les temps de maintien t_m élevés, l'amplitude de contrainte au cycle stabilisé décroît, alors que l'amplitude de déformation et la vitesse de déformation sont fixées pendant les transitoires (fig. 18*b*). Seuls des effets de restauration sur la variable isotrope peuvent expliquer de telles observations. En utilisant par exemple une équation simplifiée de la forme :

$$\dot{R} = b(Q - R)\,\dot{p} - \beta(R - Q_r)$$

on trouve R au cycle stabilisé :

$$R_s = \frac{2\,bQ\,\Delta\varepsilon_p + \beta Q_r\,t_m}{2\,b\,\Delta\varepsilon_p + \beta t_m}$$

et l'évolution des maximums de contrainte :

$$\frac{\sigma_M - \sigma_{M_0}}{\sigma_{M_s} - \sigma_{M_0}} \simeq \frac{R}{R_s} = 1 - e^{-(2b\Delta\varepsilon_p + \beta t_m)N}.$$

Sous cette forme simple on obtient déjà des évolutions compatibles avec les résultats expérimentaux comme sur la figure 54 (sans effet de restauration la courbe d'évolution de la contrainte maximale serait unique).

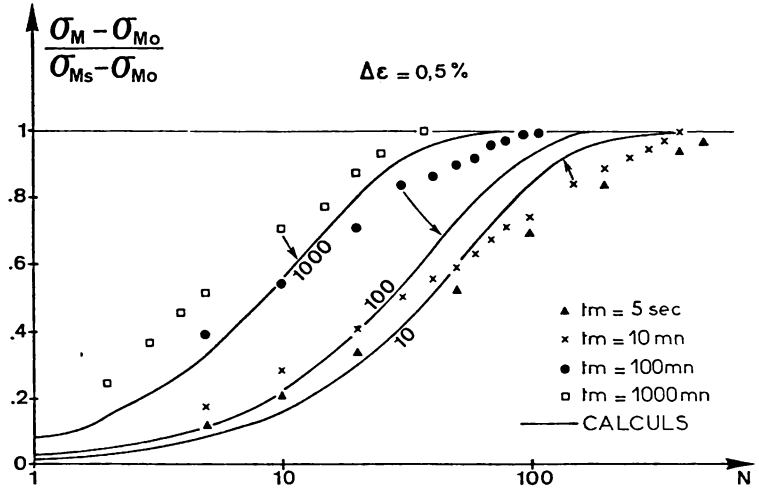


Fig. 54. Influence de la restauration sur le durcissement cyclique de l'acier 316 à 600 °C (essais d'après Goodall).

4.4.3. *Effets de vieillissement*

On distingue ces effets de ceux de restauration pour trois raisons principales :

— ils peuvent se produire sans déformation préalable du matériau,

— ils correspondent réellement à une instabilité microstructurale, la structure du matériau évoluant en fonction du temps,

— assez souvent cette évolution provoque un durcissement de l'alliage.

Ces phénomènes sont thermiquement activés et se produisent plus rapidement à hautes températures. Leur influence sur les caractéristiques mécaniques (variables dans le temps) n'est cependant significative que dans le domaine des températures intermédiaires pour lequel l'évolution de la microstructure se produit pour des durées du même ordre que celles de la sollicitation mécanique du matériau ou de la structure.

Les causes physiques de ces instabilités peuvent être multiples : changements de phase, précipitations, précipitation aux joints de grains, croissance et coalescence de précipités, recristallisation. Ils peuvent être couplés ou non avec les mécanismes de déformation. Dans le cas où les effets de durcissement dépendent fortement de la déformation ou de la vitesse de déformation, on parle de vieillissement dynamique.

Un exemple d'effets du vieillissement initial est donné sur la figure 55 pour l'acier 304 : la réduction des déformations de fluage en fonction du temps de préchauffage est une manifestation très nette du durcissement induit.

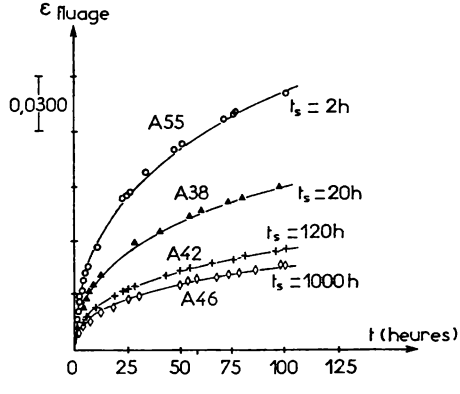


Fig. 55. Influence du temps de prévieillissement t_s sur le fluage primaire de l'acier inoxydable 304 à 593 °C (d'après Cho et Findley).

Très peu d'études existent sur la modélisation mécanique d'un matériau en cours de vieillissement. On se limite ici au modèle suivant portant sur la variable d'écrouissage isotrope :

$$\dot{R} = b(Q_1 - R)\,\dot{p} + \beta(Q_2 - R)$$

qui superpose un écrouissage par la déformation et un écrouissage par le temps. Si la vitesse de déformation est importante, le premier terme est prépondérant et l'écrouissage par la déformation intervient seul ; si elle est nulle ou faible, seul intervient l'écrouissage par le temps.

Suivant les valeurs comparées de Q_1, Q_2 et R_0 (valeur initiale de la variable R), on obtient des effets de restauration ou de vieillissement (durcissement par le temps). Par exemple pour $R_0 < Q_2 < Q_1$ la figure 56 schématise le cas d'un essai de traction rapide (écrouissage OA en fonction de la déformation) suivi d'un essai de fluage (combinaison des deux effets puis prédominance de la restauration en fonction du temps puisque $R_A > Q_2$ (courbe AA'). Pour un vieillissement préalable à la même température (courbe OB), suivi d'un essai de traction rapide, le durcissement initial se manifeste par la courbe BB' (comparée à la courbe OA).

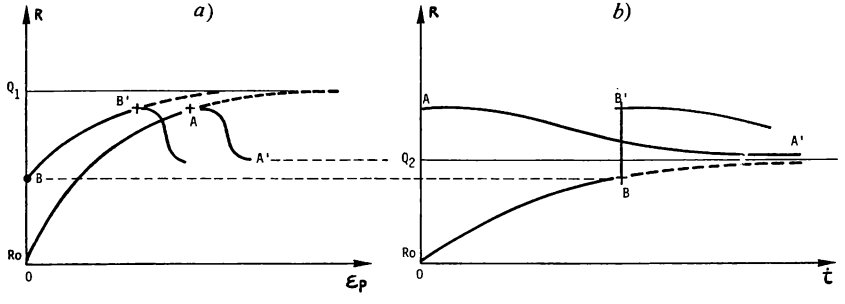


Fig. 56. Evolution de la variable d'écrouissage dans le cas d'un essai de traction rapide suivi de fluage.
(*a*) en fonction de la déformation,
(*b*) en fonction du temps.

4.4.4. *Couplage plasticité-viscoplasticité*

Pour rendre compte des déformations rapides pendant la mise en charge, en même temps que des déformations lentes pendant le fluage, on peut introduire une décomposition de la déformation en :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{in} = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^{vp}$$

où ε^e est la déformation élastique, ε^p une déformation plastique instantanée, ε^{vp} la déformation viscoplastique (ou déformation de fluage). La figure 57 montre un exemple qui explique pourquoi une telle décomposition est utile : après une déformation importante pendant la mise en charge, un temps de fluage de très longue durée ne provoque que des déformations très faibles. Il semble qu'il y ait des échelles de temps différentes, correspondant à des processus différents. Par contre, de nombreuses expériences montrent que les deux déformations sont couplées.

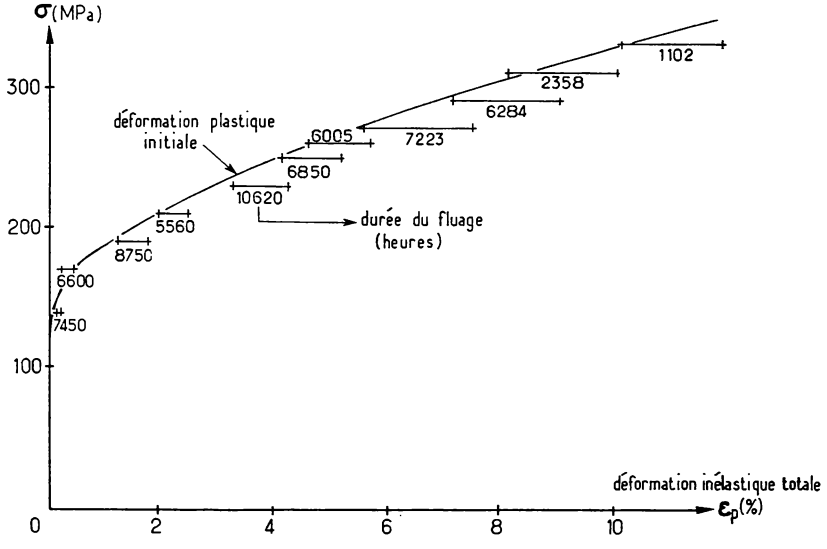


Fig. 57. Traction rapide et fluage de longue durée sur l'acier inoxydable 316 SPH à 550 °C.

La déformation plastique obéit à des lois telles que celles développées au chapitre 5, la déformation viscoplastique, à celles décrites dans le présent chapitre. Sans entrer dans les détails et en notant V_k les variables d'écrouissage, A_k les variables thermodynamiques associées, les équations générales de la plasticité et de la viscoplasticité couplées se mettent sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}^{in} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}$$

$$\dot{V}_k = -\lambda \frac{\partial f}{\partial A_k} - \frac{\partial \Omega}{\partial A_k}$$

où les potentiels f et Ω dépendent de σ et A_k. L'écrouissage induit par la déformation plastique influence la vitesse de déformation viscoplastique et vice-versa. Le multiplicateur plastique λ est déterminé par la condition de consistance de la plasticité instantanée : $\dot{f} = f = 0$. Notons qu'il dépend de la vitesse de déformation viscoplastique à cause du terme $\frac{\partial \Omega}{\partial A_k}$:

$$\lambda = \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} - \frac{\partial f}{\partial A_i} \frac{\partial A_i}{\partial V_k} \frac{\partial \Omega}{\partial A_k} \right\rangle}{\frac{\partial f}{\partial A_i} \frac{\partial A_i}{\partial V_k} \frac{\partial f}{\partial A_k}}.$$

L'effet d'une telle combinaison peut être illustré en traction (fig. 58). La courbe supérieure correspond à la déformation plastique instantanée : c'est la courbe de traction pour une vitesse infinie. Il y a ainsi un double effet de saturation en fonction de la vitesse : vers les vitesses nulles, la courbe limite étant donnée par la contrainte interne (voir § 4.2.2.1), vers les vitesses infinies suivant la courbe de plasticité instantanée.

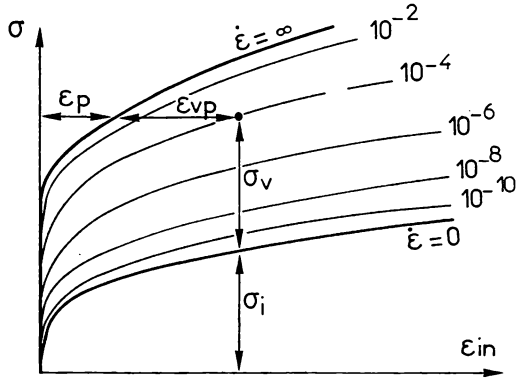


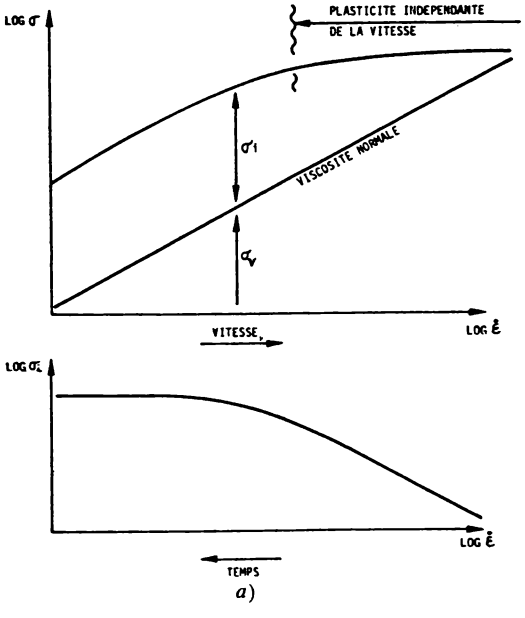
Fig. 58. Schématisation des courbes d'écrouissage à différentes vitesses par superposition d'une théorie de viscoplasticité et d'une théorie de plasticité.

Il existe un autre moyen de tenir compte des deux échelles de temps mentionnées ci-dessus. On ne considère pas de déformation plastique instantanée mais on introduit les deux échelles dans la loi d'écrouissage par une combinaison de l'écrouissage par la déformation et de l'écrouissage par le temps :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \Omega_{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{V}_k = -\frac{\partial \Omega}{\partial A_k} = -\frac{\partial \Omega_{vp}}{\partial A_k} - \frac{\partial \Omega_t}{\partial A_k}.$$

On aboutit ainsi à des modèles tels que ceux évoqués en 4.2 et 4.3. Ce sont les effets de vieillissement qui entrent en compétition avec l'effet de viscosité pour, dans un certain domaine, faire disparaître l'influence de la vitesse. La figure 59*a* illustre cet effet pour l'essai de traction à vitesse constante (pour une même déformation) : la contrainte interne, qui augmente avec le temps, est d'autant plus grande que la vitesse de déformation est faible. La contrainte est la somme de la contrainte interne et de la contrainte visqueuse (fonction puissance de $\dot{\varepsilon}$ par exemple). On voit que le tassement des courbes de traction lorsque la vitesse augmente peut n'être qu'une apparence. On peut même obtenir des effets inverses de la vitesse (exposant apparent de viscosité négatif) comme cela a été observé sur certains matériaux (fig. 59*b*).



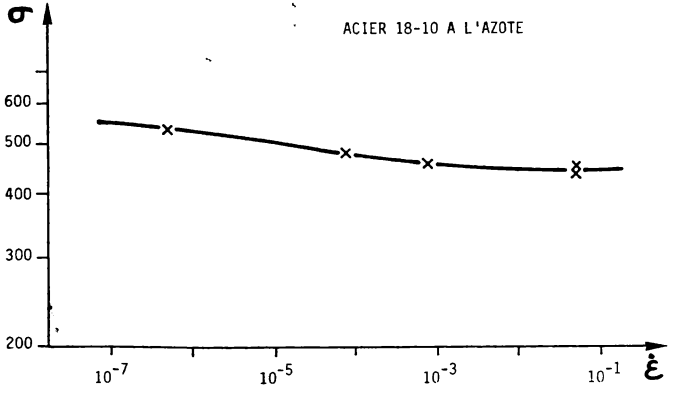


Fig. 59. (*a*) Combinaison des effets de viscosité et de vieillissement pouvant conduire à une apparente indépendance de la vitesse (schématique), (*b*) effet inverse de la vitesse observé sur un acier inoxydable 18-10 à l'azote.

5. ÉLÉMENTS SUR LES MÉTHODES DE CALCUL DES STRUCTURES EN VISCOPLASTICITÉ

Ces méthodes de calcul sont basées sur les méthodes utilisées en élasticité linéaire, telle que la méthode des éléments finis (voir chap. 4, § 1.5), et doivent être adaptées pour inclure les équations différentielles de la viscoplasticité et permettre la résolution, malgré la non-linéarité et la dépendance par rapport au temps.

On rappelle que la méthode des éléments finis en élasticité avec contraintes initiales conduit à résoudre un système linéaire (*) :

$$Kq = Q + Q_0$$

où q est la colonne des inconnues nodales, en général les déplacements des nœuds de la structure discrétisée en éléments finis. K est la matrice de rigidité de la structure : elle dépend de la géométrie et du comportement élastique du matériau. Q est la colonne des forces extérieures, Q_0 représente les forces nodales équivalentes aux contraintes initiales.

Après résolution du système linéaire on trouve les champs de déplacements, de déformation et de contrainte en tout point par application de relations matricielles :

$$u = Nq \qquad \varepsilon = Bq \qquad \sigma = a\varepsilon + \sigma_0$$

où N et B sont des matrices dépendant de la géométrie et de la discrétisation en éléments finis ; a est la matrice d'élasticité du matériau.

5.1. Schéma général du calcul de viscoplasticité

Un problème de viscoplasticité se résoud par linéarisation à partir d'une solution initiale supposée connue à l'instant t. La loi d'élasticité devient :

$$\sigma = a\varepsilon^e = a\varepsilon - a\varepsilon^p - a\varepsilon^d = a\varepsilon + \sigma_0$$

où a dépend de la température actuelle et ε^d désigne la dilatation thermique.

La loi d'écoulement viscoplastique peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}^p = f(\sigma, V_k, T) \qquad \dot{V}_k = g(\sigma, V_k, T)$$

où les V_k désignent les variables d'écrouissage (p ou α par exemple). Le schéma du calcul est alors le suivant (voir fig. 60) :

— on suppose connues à l'instant t les valeurs de ε^p et V_k, tandis que la température et donc la dilatation sont des données du problème,

— on en déduit σ_0 puis Q_0 et on a ainsi à résoudre un problème d'élasticité avec contraintes initiales,

— la solution de ce problème donne les inconnues nodales et les contraintes, ce qui permet de trouver la vitesse de déformation plastique et la vitesse d'écrouissage (toujours à l'instant t).

Ainsi, à partir de ε^p et V_k à l'instant t, on peut calculer $\dot{\varepsilon}^p$ et $\dot{V}_k$. La succession de ces opérations ramène donc le problème de viscoplasticité à la résolution d'un système d'équations différentielles à variables non séparables que l'on peut écrire symboliquement :

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

---

* Les crochets du symbole matriciel sont omis dans ce paragraphe.

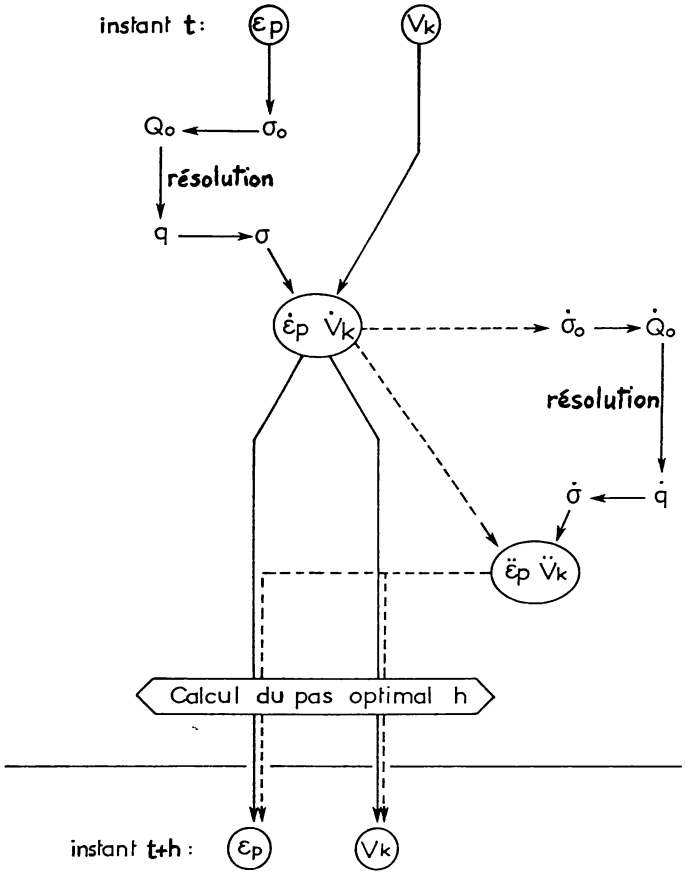


Fig. 60. Schéma de l'algorithme de calcul pas à pas (ordre 1 et ordre 2).

où y désigne l'ensemble des inconnues principales (ici ε^p et V_k). Il reste à définir la procédure de linéarisation qui permet de passer aux valeurs de ces quantités à l'instant $t + h$, connaissant y_0 à l'instant t.

5.2. Méthodes de linéarisation pas à pas

Elles sont classées en méthodes explicites (Euler, Euler-Cauchy, second ordre) et méthodes implicites qui nécessitent une itération.

Méthode d'Euler :

$$\dot{y}_0 = Y(y_0, t) \qquad y = y_0 + \dot{y}_0 h .$$

Méthode d'Euler-Cauchy :

$$\dot{y}_0 = Y(y_0, t) \qquad y_1 = y_0 + \dot{y}_0 h$$

$$\dot{y}_1 = Y(y_1, t + h) \qquad y = y_0 + (\dot{y}_0 + \dot{y}_1)\frac{h}{2}.$$

Cette dernière méthode est assez stable numériquement et plus performante que la méthode d'Euler (elle assure un meilleur compromis coût-précision). Par contre, c'est un algorithme d'ordre deux (deux résolutions par pas) qui ne permet pas de profiter au mieux de la nature explicite des lois de viscoplasticité. Dans ce dernier cas, on lui préfèrera la méthode du second-ordre :

Méthode du second ordre :

$$y = y_0 + \dot{y}_0 h + \ddot{y}_0 \frac{h^2}{2}$$

où la dérivée seconde $\ddot{y}_0$ est évaluée à l'instant t, après calcul de $\dot{y}_0$, par dérivation explicite du problème précédent, ce qui conduit à résoudre un problème tangent :

$$K\dot{q} = \dot{Q} + \dot{Q}_0 .$$

Les forces nodales $\dot{Q}_0$ correspondent aux « contraintes initiales » du problème tangent :

$$\dot{\sigma} = a\dot{\varepsilon} - a\dot{\varepsilon}^p - a\dot{\varepsilon}^d + a' a^{-1} \sigma \dot{T}$$

où a' désigne la dérivée de a par rapport à la température.

L'avantage de cette méthode est de permettre l'évaluation de termes d'ordre trois en (ε^p, V_k) ce qui fournit une possibilité de détermination d'une valeur optimale de l'incrément de temps h. Celui-ci est défini en considérant que le terme d'ordre 3 dans le développement de Taylor doit être négligeable devant la somme des termes d'ordre 1 et 2 : on est ainsi conduit à résoudre une inéquation du second degré :

$$|\ddot{y}_0| \frac{h^2}{6} \leqslant \eta \left| \dot{y}_0 + \ddot{y}_0 \frac{h}{2} \right|$$

où η est un facteur de précision imposé à l'avance, par exemple :

$$\eta = 2 \quad \text{ou } 5\,\% .$$

Cette procédure « heuristique » de calcul du pas optimal s'utilise aussi avec la méthode d'Euler (on néglige le terme d'ordre 2 devant le premier terme). Dans ce cas on trouve :

$$h \leqslant 2\,\eta \left| \frac{\dot{y}_0}{\ddot{y}_0} \right| .$$

Méthode implicite :

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_0 &= Y(y_0, t_0) \\ \dot{y}_j &= Y(y_j, t + h) \\ y_{j+1} &= y_0 + [\alpha \dot{y}_0 + (1 - \alpha)\dot{y}_j]\, h \end{aligned}\right\} \text{pour } j \geqslant 1 .$$

A chaque itération il y a une résolution, c'est-à-dire un calcul de structure, à l'instant $t + h$. Un test d'arrêt des itérations appliqué en chaque point de la structure est nécessaire, par exemple :

$$\| y_{j+1} - y_j \| \leqslant \mu \| y_j \| .$$

Ce coefficient de précision μ et le coefficient α sont fixés à l'avance. α compris entre 0 et 1/2 assure en général une bonne convergence. Pour $\alpha = 0$ on a un schéma purement implicite. Pour $\alpha = 1/2$ et en limitant j à 1 on retrouve la méthode d'Euler-Cauchy. $\mu \simeq 1\,\%$ assure un bon compromis coût-précision.

Cette méthode est plus stable que les précédentes mais nécessite un accroissement de la taille des pas et une limitation du nombre d'itérations afin de ne pas augmenter considérablement le temps de calcul. Elle est souvent préférée à cause de sa stabilité et de la bonne convergence généralement observée (4 à 5 itérations suffisent) mais la solution obtenue, même en cas de convergence correcte, n'est proche de la solution réelle que si le pas h est suffisamment petit. Il est donc préférable d'employer là aussi un calcul de pas optimal (avec facteur de précision η éventuellement plus grand que dans les autres méthodes). C'est l'une des difficultés de la méthode que de contrôler en même temps le pas et les itérations.

6. BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE 6

ODQVIST F. K. G. *Mathematical theory of creep and creep rupture*. At the Clarendon press (1974).

ODQVIST F. K. G., HULT J. *Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe*. Springer-Verlag (1962).

RABOTNOV Y. N. *Creep problems in structural members*. North-Holland publisher company (1969).

LEMAITRE J. *Sur la détermination des lois de comportement des matériaux élasto-viscoplastiques*. Thèse d'Etat, Université Paris XI (Orsay) (1971).

RADENKOVIC D., SALENÇON J. *Plasticité et viscoplasticité*. Ediscience - McGraw Hill (1974).

PADMANABHAN K. A., DAVIES G. J. *Superplasticity*. Springer-Verlag (1980).

Chapitre 7

ENDOMMAGEMENT

« *L'endommagement, comme le diable, invisible mais redoutable.* »

Le phénomène d'endommagement, tel qu'il a été décrit d'un point de vue physique au chapitre 1, puis schématisé au chapitre 3, représente des discontinuités surfaciques pour les microfissures, ou volumiques pour les cavités. Il s'agit donc d'un processus rhéologique bien différent de la déformation, même si les causes initiales des deux phénomènes sont identiques : mouvements et accumulation des dislocations dans les métaux, modifications des liaisons intermoléculaires dans les matériaux organiques, microdécohésions dans les minéraux. L'endommagement présente un caractère d'irréversibilité beaucoup plus prononcé, les traitements thermomécaniques classiques ne font disparaître que très partiellement les défauts ainsi créés. La rupture macroscopique est étudiée depuis fort longtemps. Déjà vers 1500, Léonard de Vinci se préoccupait de caractériser la rupture à l'aide de variables mécaniques. De nombreux critères de rupture, c'est-à-dire des fonctions des composantes des contraintes ou des déformations caractérisant la rupture de l'élément de volume, ont été proposés (Coulomb, Rankine, Tresca, Von Mises, Mohr, Caquot...). Mais ce n'est qu'assez récemment que l'on s'est préoccupé de modéliser la détérioration progressive de la matière qui précède la rupture macroscopique. 1958 est sans doute la date historique pour la mécanique de l'endommagement : Kachanov publie le premier mémoire consacré à une variable continue d'endommagement, imaginée pour le cadre restreint, il est vrai, de la rupture par fluage des métaux sous sollicitation unidimensionnelle. Cette notion a été reprise dans les années 1970, principalement en France (Lemaitre-Chaboche), en Suède (Hult), en Angleterre (Leckie) et au Japon (Murakami), et étendue au cas de la rupture ductile et de la rupture par fatigue. Elle a été généralisée au cas tridimensionnel isotrope dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles décrite au chapitre 2 : le cas de l'endommagement anisotrope restant à « terminer » dans les années 80 !

1. DOMAINE DE VALIDITÉ ET D'EMPLOI

D'emblée il faut préciser ce que l'on entend par début et fin du processus d'endommagement, c'est-à-dire, en fait, l'échelle des phénomènes auxquels on s'intéresse. Un matériau est vierge de tout endommagement s'il est dépourvu de fissures et de cavités à l'échelle microscopique ou, d'un point de vue plus pragmatique, si son comportement à la déformation est celui du matériau élaboré dans les meilleures conditions. Rappelons ce qui a été dit dans l'introduction du chapitre 2 : l'état initial d'un matériau ne peut être défini d'une manière objective. Le plus souvent, c'est l'état à partir duquel l'histoire des sollicitations est connue. Le stade final de l'endommagement est la rupture de l'élément de volume, c'est-à-dire l'existence d'une fissure macroscopique de la taille de l'élément de volume représentatif telle qu'elle a été estimée au chapitre 3 : 0,1 à 1 mm pour les métaux et les polymères, de l'ordre de 1 cm pour le bois et de 10 cm pour le béton. Au-delà, c'est le domaine de la fissuration (chap. 8).

La théorie de l'endommagement décrit donc l'évolution des phénomènes entre l'état vierge et l'amorçage de la fissure macroscopique. Cette évolution, qu'il n'est pas toujours aisé de distinguer du phénomène de déformation l'accompagnant le plus souvent, est due à plusieurs mécanismes différents qui ont été classés au chapitre 3 :

— l'endommagement plastique ductile, qui accompagne les grandes déformations plastiques des métaux aux températures ambiante et peu élevées ;

— l'endommagement viscoplastique fragile (ou de fluage), fonction du temps qui, pour les métaux aux températures moyennes et élevées, correspond aux décohésions intergranulaires accompagnant les déformations viscoplastiques ;

— l'endommagement de fatigue (ou de microplasticité) dû à la répétition des contraintes et que l'on repère en fonction du nombre de cycles ;

— l'endommagement macrofragile qui peut être provoqué par des sollicitations monotones sans déformations irréversibles appréciables, c'est le cas du béton par exemple.

D'autres phénomènes endommageants peuvent être envisagés : l'oxydation, la corrosion, l'irradiation mais leur modélisation thermomécanique reste à faire !

On voit donc que la théorie de l'endommagement intéresse tous les matériaux aux températures basses et élevées et tous les types de sollicitations. C'est par la nature des modèles d'évolution que l'on traduira ces phénomènes différents pouvant se cumuler ou interagir les uns sur les autres. Connaissant l'histoire des contraintes et des déformations relatives à un élément de volume donné d'une structure, les lois d'endommagement fournissent, par intégration dans le temps, l'évolution de l'endommagement jusqu'à l'amorçage de la

fissure macroscopique. On détermine ainsi le temps (ou le nombre de cycles) correspondant à l'amorçage d'une telle fissure au point le plus sollicité de la structure. C'est là le principe des calculs modernes de résistance des structures utilisés au niveau de la conception, de la vérification et du contrôle en service des structures. C'est aussi le moyen de mieux optimiser les procédés de mise en forme des métaux par déformation plastique, pour éviter ou diminuer les défauts de fabrication et, en tout cas, le moyen de connaître à priori les modifications des propriétés mécaniques des produits, engendrées par les opérations de formage.

2. Aspects phénoménologiques

La définition même d'une variable mécanique d'endommagement pose un problème difficile dans la mesure où, macroscopiquement, rien (ou presque !) ne distingue un élément de volume fortement endommagé d'un élément de volume vierge. On est donc obligé d'imaginer une variable interne représentative de l'état de détérioration de la matière et plusieurs voies sont possibles selon les écoles de pensée et les types de mesure de dommage envisagés :

— les mesures à l'échelle de la microstructure (densité de microfissures ou de cavités) conduisent à des modèles microscopiques que l'on peut « intégrer » sur l'élément de volume macroscopique à l'aide des techniques mathématiques d'homogénéisation ; on obtient ainsi les propriétés de l'élément de volume endommagé mais il est difficile de définir une variable macroscopique d'endommagement et une loi d'évolution facilement utilisable dans les calculs de mécanique des milieux continus ;

— les mesures physiques globales (densité, résistivité...) nécessitent la définition d'un modèle global pour les convertir en caractéristiques de résistance mécanique ;

— un autre type d'évaluation du dommage est lié à la durée de vie résiduelle mais ce concept ne conduit pas directement à la notion de loi de comportement de l'endommagement ;

— les mesures mécaniques globales (modification des caractéristiques d'élasticité de plasticité ou de viscoplasticité) sont plus faciles à interpréter en terme de variable d'endommagement grâce à la notion de contrainte effective introduite par Rabotnov. C'est cette approche que nous suivrons.

2.1. Variable d'endommagement

2.1.1. *Définition*

Considérons un solide endommagé dans lequel on a isolé un élément de volume fini d'une taille suffisamment grande par rapport aux hétérogénéités du milieu et, par la pensée, grossissons cet élément (fig. 1).

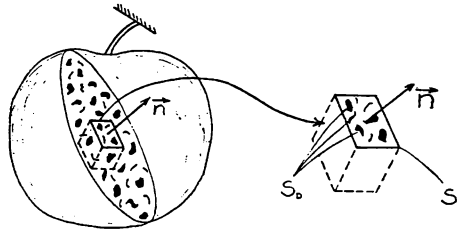


Fig. 1. Elément endommagé.

Soit S l'aire d'une section de l'élément de volume repérée par sa normale $\vec{n}$. Dans cette section, les fissures et cavités qui constituent le dommage laissent des traces de formes diverses. Soit $\tilde{S}$ l'aire résistante effective ($\tilde{S} < S$) tenant compte de l'aire de ces traces, des concentrations de contraintes au voisinage des discontinuités géométriques et des interactions entre défauts voisins, et soit S_D la différence :

$$S_D = S - \tilde{S}$$

S_D est l'aire totale de l'ensemble des traces des défauts corrigée des effets de concentrations de contraintes et d'interactions. On verra au paragraphe 2.2 que la notion de contrainte effective associée à l'hypothèse d'équivalence en déformation permet de s'affranchir du calcul de S_D (ou de $\tilde{S}$) en tout état de cause bien difficile à effectuer à cause de la méconnaissance de la géométrie précise des défauts et des doutes que l'on peut avoir sur l'application de la mécanique des milieux continus à cette échelle.

Par définition :

$$\boxed{\frac{S_D}{S} = D_n}$$

est la mesure mécanique de l'endommagement local relativement à la direction $\vec{n}$.

D'un point de vue physique la variable endommagement D_n est donc l'aire relative (corrigée) des fissures et cavités coupées par le plan normal à la direction $\vec{n}$.

D'un point de vue mathématique, en faisant tendre S vers 0, la variable D_n est la densité surfacique (corrigée) des discontinuités de la matière dans le plan normal à $\vec{n}$.

$D_n = 0$ correspond à l'état non endommagé ou vierge.

$D_n = 1$ correspond à l'élément de volume rompu en deux parties selon un plan normal à $\vec{n}$.

$0 \leqslant D_n < 1$ caractérise l'état d'endommagement.

Dans le cas général d'un endommagement anisotrope constitué de fissures et de cavités d'orientations privilégiées, la valeur de la variable scalaire D_n

dépend de l'orientation de la normale. On verra au paragraphe 3.1 que la variable intrinsèque correspondante peut être représentée par un tenseur du 2e ordre ou du 4e ordre.

2.1.2. *Hypothèse d'isotropie*

Un endommagement isotrope est constitué de fissures et cavités dont l'orientation est distribuée uniformément dans toutes les directions. Dans ce cas, la valeur de la variable D_n ne dépend pas de l'orientation $\vec{n}$ et le scalaire D caractérise complètement l'état de dommage. Pour ce paragraphe on se limite au cas de l'endommagement isotrope :

$$D_n = D \quad \forall \vec{n}.$$

2.2. Contrainte effective

2.2.1. *Définition*

L'introduction d'une variable endommagement représentant une densité surfacique de discontinuités de la matière conduit directement à la notion de contrainte effective c'est-à-dire la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts.

Dans le cas unidimensionnel, si F est la force appliquée sur une section S de l'élément de volume représentatif, $\sigma = F/S$ est la contrainte usuelle qui satisfait les équations d'équilibre. En présence d'un endommagement isotrope de mesure D, la section résistante effective est :

$$\tilde{S} = S - S_D = S(1 - D)$$

et l'on posera, par définition de la contrainte effective $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{S}{\tilde{S}} \quad \text{soit} \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}.$$

On a évidemment $\tilde{\sigma} \geqslant \sigma$

$\tilde{\sigma} = \sigma$ pour un matériau vierge,

$\tilde{\sigma} \to \infty$ au moment de la rupture.

Dans le cas tridimensionnel d'un endommagement isotrope, le rapport $S/\tilde{S}$ ne dépend pas de l'orientation de la normale et l'opérateur $(1 - D)$ s'applique à toutes les composantes. On écrira donc pour le tenseur contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\boxed{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - D}}.$$

2.2.2. *Principe d'équivalence en déformation*

On suppose que le comportement à la déformation de la matière n'est affecté par l'endommagement que sous la seule forme de la contrainte effective :

> tout comportement à la déformation, unidimensionnel ou tridimensionnel, d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective (fig. 2).

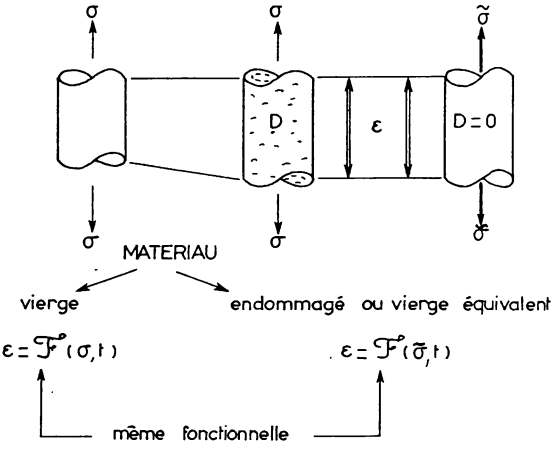


Fig. 2. Contrainte effective et équivalence en déformation.

Par exemple la loi d'élasticité linéaire unidimensionnelle d'un matériau endommagé s'écrit :

$$\varepsilon_e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1 - D)\,E}$$

E étant le module d'Young. Il s'agit d'une hypothèse non rigoureuse qui suppose que les différents comportements (élasticité, plasticité, viscoplasticité) sont affectés par la densité surfacique des défauts de dommage, corrigée de la même façon, mais sa simplicité permet d'établir un formalisme cohérent et efficace.

2.2.3. *Endommagement critique à rupture*

En appliquant la notion de contrainte effective à la rupture par décohésion interatomique, on définit la valeur critique de l'endommagement D_c qui correspond à l'apparition de ce phénomène.

Si $\tilde{\sigma}_u$ est la contrainte unidimensionnelle de rupture par décohésion et σ_u la contrainte de rupture ultime usuelle, on a :

$$\tilde{\sigma}_u = \frac{\sigma_u}{1 - D_c}$$

ou

$$D_c = 1 - \frac{\sigma_u}{\tilde{\sigma}_u}.$$

La physique du solide montre que $\tilde{\sigma}_u$ est de l'ordre de $E/50$ à $E/20$; comme pour les matériaux usuels σ_u est de l'ordre de $E/100$ à $E/250$, D_c est de l'ordre de 0,5 à 0,9. Ceci autorisera de négliger devant 1 le terme $(1 - D_c)^x$ (avec $x \gg 1$) qui intervient souvent dans les calculs. Les critères tridimensionnels sont étudiés au paragraphe 2.5.

2.3. MESURES D'ENDOMMAGEMENT

L'endommagement n'est pas directement accessible aux mesures. Son évaluation quantitative, comme celle de toute grandeur physique, est liée à la définition de la variable choisie pour représenter le phénomène. Ayant choisi une définition fondée sur le concept de contrainte effective, associé au principe d'équivalence en déformation, les mesures qui en découlent naturellement sont essentiellement liées au couplage déformation-endommagement, c'est-à-dire à la modification des caractéristiques mécaniques des matériaux engendrée par l'endommagement : mesures de caractéristiques d'élasticité, de plasticité, de viscoplasticité, auxquelles on adjoindra des mesures de variation de résistivité.

2.3.1. *Variation du module d'élasticité*

2.3.1.1. *Méthode statique*

Reprenons la loi d'élasticité endommagée unidimensionnelle, déjà évoquée au paragraphe précédent, qui sera justifiée par la thermodynamique au paragraphe 3.2 :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} = E\varepsilon_e$$

ou

$$\sigma = E(1 - D)\,\varepsilon_e$$

E étant le module d'Young, c'est-à-dire le module d'élasticité du matériau vierge de tout endommagement ; $E(1 - D) = \tilde{E}$ peut être interprété comme le module d'élasticité du matériau endommagé. Si le module d'Young E est connu, toute mesure de raideur élastique permet d'atteindre l'endommagement par $D = 1 - \sigma/(E\varepsilon_e)$ et avec $\sigma = \tilde{E}\varepsilon_e$, on trouve :

$$\boxed{D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}}.$$

Très simple dans son principe, cette mesure est délicate dans sa réalisation pour les raisons suivantes :

— toute mesure de module d'élasticité impose une bonne précision sur des déformations très petites, on l'a vu au chapitre 4;

— l'endommagement est le plus souvent très localisé, ce qui impose une base de mesure très faible de l'ordre de 0,5 à 5 mm;

— au niveau de précision requis, la meilleure droite dans le graphe (σ, ε) traduisant une charge ou décharge élastique est difficile à définir.

Pour toutes ces raisons nous préconisons la procédure suivante :

(i) utilisation d'éprouvettes à section centrale affaiblie pour bien localiser l'endommagement; un exemple est donné sur la figure 3;

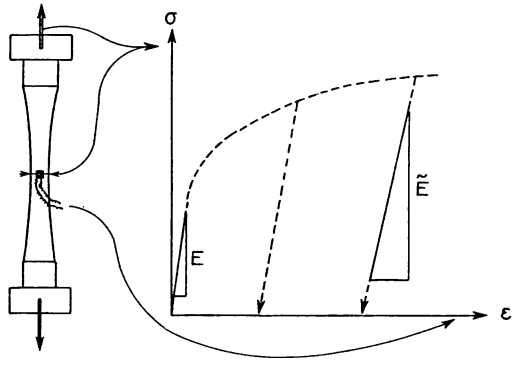


Fig. 3. Procédure de mesure de l'endommagement.

(ii) mesure de déformation par jauges de faibles dimensions : 0,5 × 0,5 mm lorsque la température le permet, ou par capteur de déplacement associé à une base de mesure aussi petite que possible, lorsque la température dépasse 200 °C;

(iii) évaluation du module d'élasticité lors des décharges élastiques en éliminant les zones de plus fortes non linéarités par définition d'une plage de mesure en contrainte (voir fig. 3)

$$\sigma_{min} < \sigma < \sigma_{max}$$
$$\sigma_{max} = 0{,}85\ \sigma(\varepsilon)$$
$$\sigma_{min} = 0{,}15\ \sigma(\varepsilon).$$

Moyennant ces précautions, l'endommagement peut être évalué dans une classe de précision relative de l'ordre de $\pm$ 5 % et la méthode s'applique bien à tout type d'endommagement. La figure 4 montre à titre d'exemples des évolutions d'endommagement de plasticité ductile, de fluage cyclique et de fatigue obtenues par cette technique.

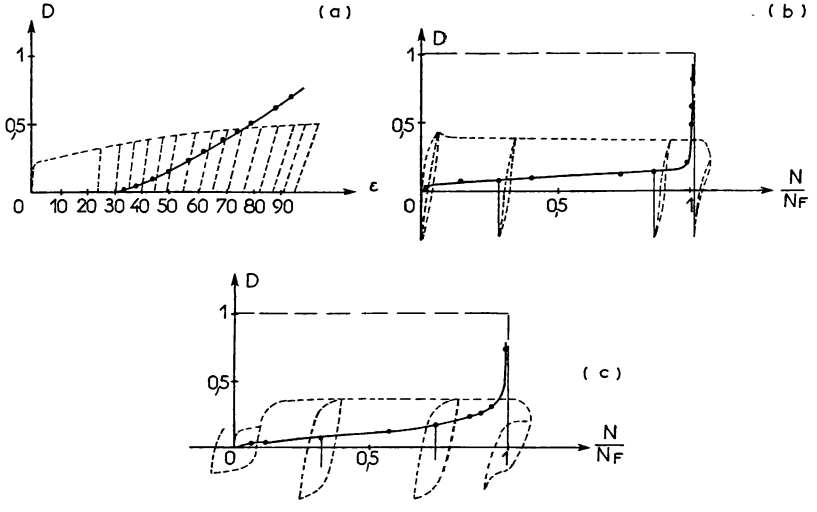


Fig. 4. Exemples d'évolution d'endommagement.
(*a*) Endommagement plastique ductile, cuivre Cu/a1, $T = 20\ ^{\circ}C$, $\dot{\varepsilon} \simeq 10^{-4}\ s^{-1}$.
(*b*) Endommagement de fatigue. Acier 316 L, T = 20 °C

$$\varepsilon = \begin{cases} +0{,}7.10^{-2} \\ 0 \end{cases} \qquad N_F \text{ (rupture)} = 70\,450 \text{ cycles}.$$

(*c*) Endommagement de fluage cyclique acier 316 L, T = 550 °C

$$\varepsilon = \begin{cases} +10^{-2} \\ -10^{-2} \end{cases} \qquad N_c \text{ (rupture)} = 218 \text{ cycles}.$$

2.3.1.2. *Méthode dynamique par ultra-sons*

Le même principe peut être utilisé en dynamique et notamment en propagation d'ondes ultra-sonores. Une mesure de vitesse ou de temps de propagation des ondes planes dans une éprouvette ou un cylindre d'un matériau endommagé conduit au module d'élasticité endommagée $\tilde{E}$ et à l'endommagement par $D = 1 - \tilde{E}/E$, $\tilde{E}$ s'exprimant en fonction des vitesses des ondes longitudinales $\tilde{v}_L$ et transversales $\tilde{v}_T$ par (voir § 1.3.2 du chap. 4) :

$$\tilde{E} = \rho \tilde{v}_T^2 \frac{3\,\tilde{v}_L^2 - 4\,\tilde{v}_T^2}{\tilde{v}_L^2 - \tilde{v}_T^2}.$$

Dans le cadre de l'hypothèse d'isotropie de l'endommagement (coefficient de Poisson constant) et en négligeant la variation de ρ (ce qui n'entraîne pas d'erreur relative sur D supérieure à 5 %), des expressions :

$$v_L^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{et} \quad \tilde{v}_L^2 = \frac{\tilde{E}}{\rho} \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

on tire

$$\boxed{D = 1 - \frac{\tilde{v}_L^2}{v_L^2}}.$$

Un exemple de mesure d'endommagement par ultrasons, relative à un béton sollicité en compression, est donné sur la figure 5.

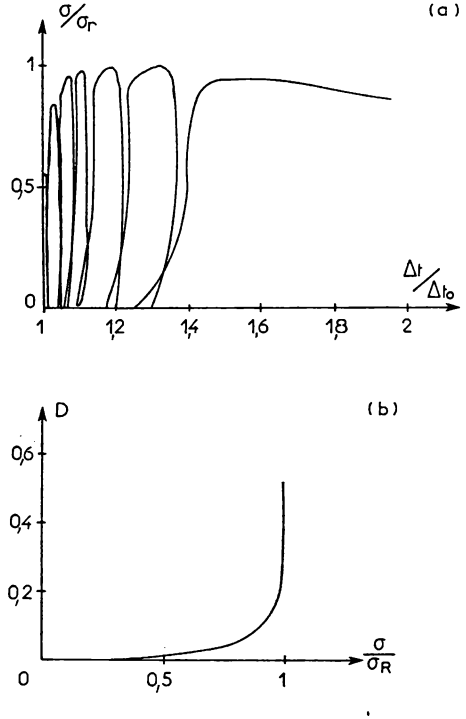


Fig. 5. Mesure de l'endommagement d'un béton par ultrasons (d'après S. Benounich).
(*a*) Evolution du temps de parcours de l'onde $\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{v_L}{\tilde{v}_L}$ en fonction de la contrainte rapportée à la contrainte de rupture.
(*b*) Evolution de l'endommagement.

2.3.2. *Variation des caractéristiques de plasticité*

2.3.2.1. *Caractéristiques d'écrouissage monotone*

Cette méthode est surtout intéressante pour caractériser l'endommagement plastique ductile en complément des mesures de variation du module d'élasticité.

Ce type d'endommagement accompagne les grandes déformations plastiques des métaux et des polymères et ne devient vraiment important qu'à l'approche des conditions de striction.

Dans l'essai d'écrouissage, il se manifeste par la chute de contrainte que l'on observe à partir du point d'instabilité défini par $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$; chute de contrainte qui est donc due à une combinaison de l'effet géométrique (la striction) et de l'effet de l'endommagement (réduction de la section effective $\tilde{S} = S - S_D$).

On exprime la loi d'écrouissage du matériau non endommagé par l'expression introduite au paragraphe 2.1.3.2 du chapitre 5 et écrite ici pour les grandes déformations ($\varepsilon_{pv} = \ln(1 + \varepsilon_p)$) :

$$\varepsilon_{pv} = \left\langle \frac{\sigma_v - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y}.$$

Dès que l'endommagement devient sensible ($\varepsilon_v > \varepsilon_v^*$), l'hypothèse de l'équivalence en déformation associée au concept de contrainte effective impose d'écrire :

$$\varepsilon_{pv} = \frac{1}{K_Y^{M_Y}} \left\langle \frac{\sigma_v}{1 - D} - \sigma_Y \right\rangle^{M_Y}$$

expression qui permet une mesure indirecte de D à partir du graphe $(\sigma_v, \varepsilon_v)$ dès lors que l'on connaît K_Y et M_Y déterminés par exemple sur le même graphe pour $\varepsilon_v < \varepsilon_v^*$:

$$D = 1 - \frac{\sigma_v}{K_Y \varepsilon_{pv}^{1/M_Y} + \sigma_Y}.$$

2.3.2.2. *Caractéristiques d'écrouissage cyclique*

La méthode mentionnée ici est plus particulièrement adaptée à la mesure de l'endommagement de fatigue oligocyclique. La loi de plasticité cyclique de référence, décrite au chapitre 5, est utilisée sous forme d'une relation entre la déformation plastique maximale au cycle stabilisé (lorsqu'il existe) et la contrainte maximale :

$$\varepsilon_{pM}^* = \left[\frac{\sigma_M^*}{K_c} \right]^{M_c}$$

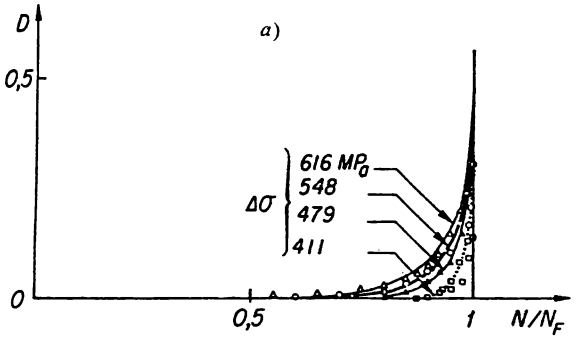
on suppose généralement que le dommage de fatigue est négligeable au cycle stabilisé. L'évolution ultérieure de la déformation plastique maximale dans un essai à contrainte imposée ($\sigma_M = \sigma_M^*$) est alors attribuée à l'endommagement. L'hypothèse d'équivalence en déformation, associée au concept de contrainte effective, conduit à écrire à chaque cycle :

$$\varepsilon_{pM} = \left[\frac{\sigma_M^*}{K_c(1 - D)} \right]^{M_c}$$

et le dommage est obtenu en combinant les deux relations :

$$D = 1 - \left(\frac{\varepsilon^*_{pM}}{\varepsilon_{pM}}\right)^{1/M_c}.$$

La classe de précision relative de cette méthode est de l'ordre de 10 à 20 %, la grosse difficulté étant d'évaluer l'état stabilisé. La figure 6 montre le cas de deux alliages en fatigue à 5 Hz. Les courbes continues correspondent au modèle du paragraphe 4.3.2.



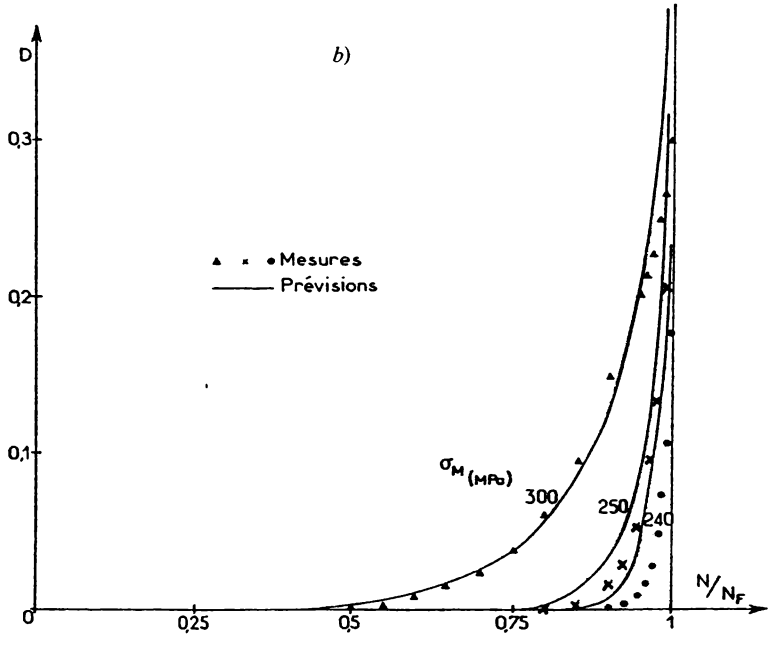


Fig. 6. Evolution de l'endommagement de fatigue pure.
(*a*) IN 100 à 1 000 °C.
(*b*) 316 L à 20 °C.

Sous un chargement à déformation plastique imposée ($\varepsilon_{pM} = \varepsilon^*_{pM}$) au contraire, la même méthode conduit à :

$$D = 1 - \frac{\sigma_M}{\sigma^*_M}.$$

Dans le cas de l'essai à déformation totale imposée, le dépouillement est plus complexe puisqu'à la fois la loi d'élasticité et la loi cyclique sont affectées par le dommage.

Pour un essai de fatigue en chargement dissymétrique (traction répétée, par exemple) on pourra utiliser la même méthode mais incorporer le rochet progressif avec une loi de comportement de la forme (N étant le nombre de cycles)

$$\frac{\delta \varepsilon_{pM}}{\delta N} = \left[\frac{\sigma_M}{(1 - D)\, K_r}\right]^{M_r}.$$

Notons enfin que cette méthode ne s'applique que dans le domaine de la fatigue oligocyclique (déformations plastiques mesurables), pour des matériaux non sujets à un durcissement ou un adoucissement cyclique sur la plus grande partie de la durée de vie. De plus, l'endommagement de fatigue qui peut ainsi être mesuré est celui qui intervient dans la dernière phase de la vie de l'élément de volume lorsque des microfissures déjà amorcées (stade I) sont en cours de propagation à l'échelle microscopique (stade II).

2.3.3. *Variation des caractéristiques de viscoplasticité*

Cette méthode permet de mettre en évidence l'endommagement de fluage qui, dans les métaux, correspond au processus de naissance et de croissance de microfissures principalement intercristallines. Cet endommagement se développe en fonction du temps, sous sollicitations constantes ou lentement évolutives. Ce phénomène est d'autant plus prononcé que la température est plus élevée.

Dans l'essai de fluage unidimensionnel à contrainte constante, il se manifeste, surtout lors du fluage tertiaire, par une augmentation de la vitesse de fluage qui devient très grande à l'approche de la rupture. En fait, dans les essais de fluage à force constante, le fluage tertiaire résulte aussi de la réduction de section de l'éprouvette. La figure 3 du chapitre 6 montre un exemple de ce phénomène bien classique.

Comme dans le cas de l'endommagement plastique ductile, on peut utiliser le couplage entre l'endommagement et le comportement à la déformation (ici viscoplastique) pour identifier l'endommagement.

En supposant l'endommagement nul ou négligeable en fluage primaire on peut rendre compte du fluage secondaire par la loi de Norton (voir chap. 6) :

$$\dot{\varepsilon}^*_p = \left(\frac{\sigma_v}{\lambda^*}\right)^{N^*}$$

et rendre compte du fluage tertiaire par la notion de contrainte effective :

$$\dot{\varepsilon}_p = \left[\frac{\sigma_v}{(1-D)\,\lambda^*}\right]^{N^*}.$$

Connaissant l'exposant de viscosité N^* déterminé lorsque $D \simeq 0$, on peut exprimer l'endommagement en fonction de la vitesse de fluage secondaire $\dot{\varepsilon}_p^*$ et de la vitesse de fluage tertiaire $\dot{\varepsilon}_p$ mesurée en fonction du temps sur la courbe de fluage. Des deux relations ci-dessus on tire, lorsque σ_v est constant :

$$D = 1 - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_p^*}{\dot{\varepsilon}_p}\right)^{1/N^*}$$

Ce moyen d'évaluation de l'endommagement permet de tracer le graphe $D(t/t_c)$ en fluage tertiaire comme le montre l'exemple de la figure 7 (où t_c est le temps à rupture). Dans la pratique l'essai de fluage est réalisé à force constante et il faut tenir compte de la variation de σ_v. Notant ε^* la valeur de la déformation au début du fluage secondaire on a :

$$D = 1 - \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon^*}\left(\frac{\dot{\varepsilon}_p^*}{\dot{\varepsilon}_p}\right)^{1/N^*}.$$

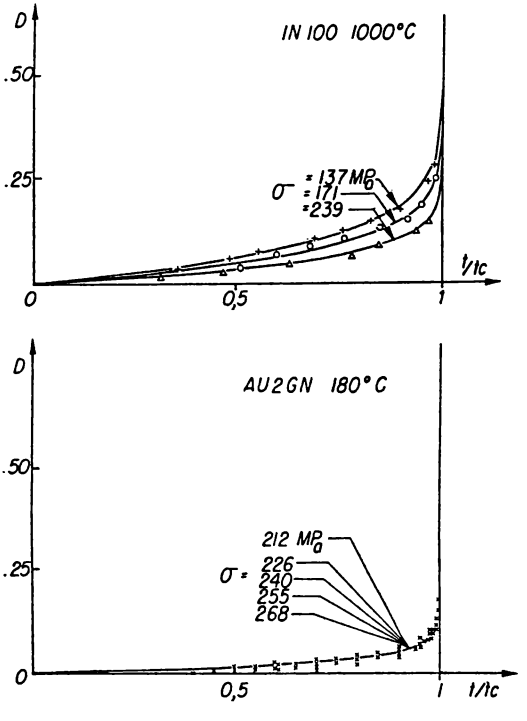


Fig. 7. Evolution de l'endommagement de fluage pour les alliages IN 100 et AU 2 GN. Les courbes continues correspondent au modèle du paragraphe 4.2.1.

2.3.4. *Variation de résistance électrique*

La notion de contrainte effective est ici remplacée par une densité de courant effective :

$$\tilde{i} = \frac{i}{1 - D}.$$

Soit un tube de courant élémentaire (fig. 8) : on suppose que cet élément de volume est soumis à une traction simple parallèle à la direction du courant et on établit l'influence d'un dommage D, supposé uniformément réparti, sur la résistance électrique. Le problème est compliqué par l'influence des déformations sur la résistance. A courant apparent constant, les différences de potentiel pour le matériau vierge et pour le matériau endommagé s'expriment avec des notations évidentes :

$$\mathrm{d}v = \rho \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}S} \mathrm{d}i \qquad \mathrm{d}v' = \rho' \frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}S'} \mathrm{d}\tilde{i}.$$

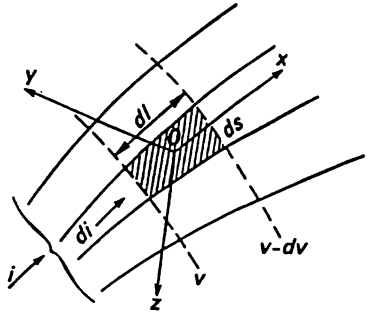


Fig. 8. Volume élémentaire.

On suppose que l'influence de l'endommagement est entièrement représentée par la densité de courant effective $\mathrm{d}\tilde{i}$, les modifications de la résistivité ρ, de $\mathrm{d}l$, et de $\mathrm{d}S$ ne dépendant que des changements de géométrie dus aux déformations élastiques et plastiques. En traction simple, les déformations axiale et transversale sont :

$$\varepsilon_e + \varepsilon_p \quad \text{et} \quad -\nu\varepsilon_e - \tfrac{1}{2}\varepsilon_p$$

ce qui permet d'écrire :

$$\mathrm{d}l' = \mathrm{d}l(1 + \varepsilon_e + \varepsilon_p) \qquad \mathrm{d}S' = \mathrm{d}S(1 - 2\nu\varepsilon_e - \varepsilon_p).$$

Classiquement, on considère que la déformation n'influe sur la résistivité que par l'effet géométrique de la variation de volume (loi de Bridgman). On écrit donc :

$$\rho' = \rho(1 + C_1 \varepsilon_e - 2\nu C_1 \varepsilon_e).$$

Dans le cadre des petites déformations, ces hypothèses conduisent à la variation relative de potentiel :

$$\frac{\Delta\, \mathrm{d}v}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}v' - \mathrm{d}v}{\mathrm{d}v} = \frac{K_e\, \varepsilon_e + K_p\, \varepsilon_p + D}{1 - D}$$

où

$$K_e = 1 + 2\,\nu + C_1(1 - 2\,\nu), \qquad K_p = 2\,.$$

Le dommage s'obtient donc à partir des mesures de variation relative de potentiel électrique, après avoir tenu compte des déformations :

$$D = \frac{\dfrac{\Delta \mathrm{d}v}{\mathrm{d}v} - K_e\, \varepsilon_e - K_p\, \varepsilon_p}{1 + \dfrac{\Delta \mathrm{d}v}{\mathrm{d}v}}.$$

Des essais réalisés sur des éprouvettes de traction-compression dans des conditions très diverses (acier inox et alliage d'aluminium à 20 °C, alliage réfractaire à haute température) montrent que les valeurs obtenues pour D par méthode électrique sont proches des résultats de mesures mécaniques. La figure 9 donne quelques résultats obtenus en fatigue et fluage qui sont commentés ci-dessous.

On remarque qu'en fluage pur, où le dommage se manifeste par l'apparition de microvides, la mesure électrique sous-estime les résultats de la mesure

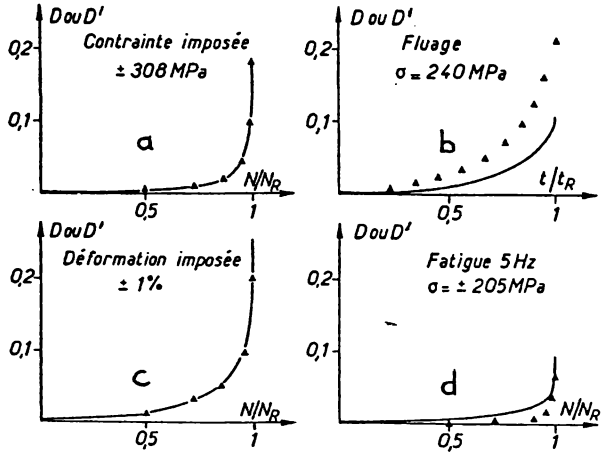


Fig. 9. Comparaison entre mesures par méthode électrique (——) et mécanique (▲) sur l'acier 316 à 20 °C (*a*, *c*) et l'alliage IN 100 à 1 000 °C (*b*, *d*). Mesures mécaniques : chute module d'élasticité (*a*, *c*), augmentation vitesse de fluage (*b*), augmentation déformation plastique maximale (*d*).

mécanique. La comparaison entre les deux types de mesures est plus favorable en fatigue pure, où le processus physique consiste en l'initiation de microfissures avec une sensibilité plus grande de la méthode électrique. Mais, dans l'ensemble, la comparaison est bonne, compte tenu de l'incertitude importante de ce type de mesure obtenue par différence de deux états mécaniques ou électriques voisins.

2.4. Lois élémentaires d'endommagement

On décrit ici quelques lois phénoménologiques unidimensionnelles relatives aux trois types d'endommagement (ductilité, fluage et fatigue) dont le rapport qualité/complexité est intéressant !

2.4.1. *Loi d'endommagement plastique ductile linéaire en déformation*

D'un point de vue microscopique, il consiste essentiellement en la naissance, la croissance et la coalescence des cavités induites par les grandes déformations plastiques. On a vu aux paragraphes 2.3.1.1 et 2.3.2.1 comment le mesurer par la variable D d'après les variations du module d'élasticité ou des caractéristiques d'écrouissage monotone.

Sur de nombreux matériaux métalliques sollicités en chargement unidimensionnel monotone croissant, on observe une variation linéaire de cet endommagement D avec la déformation (comme sur la fig. 4*a*).

Une loi simple qui rend assez bien compte des résultats expérimentaux est donc :

$$D = D_c \left\langle \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_{vD}}{\varepsilon_{vR} - \varepsilon_{vD}} \right\rangle$$

où ε_{vD} est la déformation vraie, seuil d'endommagement en deçà de laquelle l'endommagement est nul ou négligeable et ε_{vR} est la déformation vraie à rupture pour laquelle l'endommagement est égal à sa valeur critique D_c.

Matériau	Température °C	ε_{vD}	ε_{vR}	D_c
Cuivre 99,9 %	20	0,35	1,04	0,85
Alliage AU 4 G 1	20	0,03	0,25	0,23
Acier E 24	20	0,50	0,88	0,17
Acier XC 38	20	0	0,56	0,22
Acier 30 CD 4	20	0,02	0,37	0,24
Alliage INCO 718	20	0,02	0,29	0,24

Tableau 10. Tableau des valeurs des coefficients d'endommagement plastique ductile.

Cette loi à caractère empirique possède trois coefficients qui ont été identifiés sur un certain nombre de matériaux et dont les valeurs sont données sur le tableau 10. Elle sera justifiée par le formalisme de la thermodynamique au paragraphe 4.1.2.

2.4.2. *Loi d'endommagement de fluage de Kachanov*

Il s'agit de l'endommagement viscoplastique fragile dont on a déjà parlé au paragraphe 2.3.3 et dont un exemple d'évolution est donné sur la figure 7.

En 1958, Kachanov avait proposé de modéliser ce type d'évolution par :

$$\dot{D} = \left[\frac{\sigma_v}{A_0(1 - D)}\right]^r$$

où A_0 et r sont les deux coefficients caractéristiques de l'endommagement de fluage pour chaque matériau. Cette expression donne des valeurs d'endommagement non nulles mais très faibles en fluage primaire et secondaire. De nombreuses identifications ont montré depuis le bien fondé de cette modélisation, tout au moins pour les cas d'histoires de chargement assez simples. Le tableau 12 donne les valeurs de A_0 et r pour quelques matériaux particuliers.

Le temps à rupture t_c dans un essai de fluage à contrainte vraie constante s'exprime par la solution de l'équation différentielle du modèle pour la valeur critique de l'endommagement $D = D_c$. Avec la condition initiale $t=0 \rightarrow D=0$:

$$t_c = \frac{1 - (1 - D_c)^{r+1}}{r + 1} \left(\frac{\sigma_v}{A_0}\right)^{-r}.$$

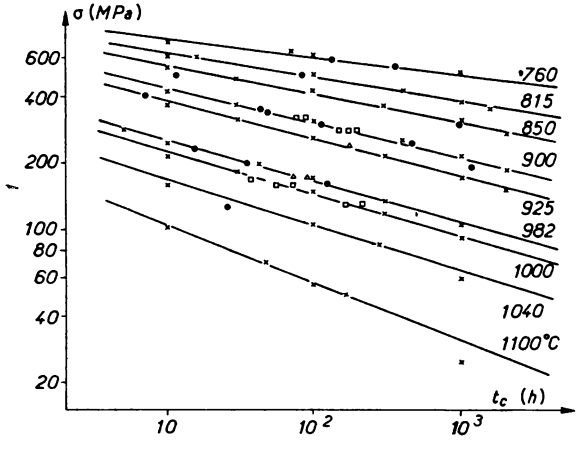


Fig. 11. Temps à rupture en fluage en fonction de la contrainte et de la température. Alliage IN 100 (non protégé).

Matériau	T °C	A_0 (h, MPa)	r	k	A
Alliage AU 2 GN	180	317	28	43	322
Alliage Magn.	260	162	7,5	5,4	156
Acier 304	593	520	7	15	575
—	650	555	5,6	15	650
Acier 316 L	600	1 160	6,5	5	1 120
Alliage L 605	980	102	7,5		
Alliage UDIMET 500	980	190	5		
Alliage UDIMET 700	900	662	6,3		
—	1 000	520	4,8		
Alliage IN 100	800	1 010	10	15	1 050
—	900	768	6,3	15	870
—	1 000	433	5,2	15	520
—	1 100	244	3,6	15	345
Acier 0,4 Mn-0,12 C	450	1 660	3,5		
Acier 321 laminé	500	2 915	3,9		
Acier 310 laminé	550	1 766	4		
	700	675	3,5		

Tableau 12. Tableau des valeurs des coefficients d'endommagement de fluage.

Les valeurs usuelles de r autorisant à négliger $(1 - D_c)^{r+1}$ devant 1, on peut exprimer l'évolution de l'endommagement sous une forme particulièrement simple par l'intégration de la loi différentielle entre 0 et D :

$$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{\frac{1}{r+1}} \quad \text{avec} \quad t_c = \frac{1}{r+1}\left(\frac{\sigma_v}{A_0}\right)^{-r}.$$

La figure 11 montre que la relation puissance entre la contrainte et le temps à rupture t_c est assez bien vérifiée et que les coefficients A_0 et r dépendent fortement de la température.

2.4.3. *Lois d'endommagement de fatigue*

L'endommagement de fatigue correspond à la naissance et la croissance de microfissures, généralement intracristallines dans les métaux, sous l'effet de sollicitations cycliques, jusqu'à l'amorçage d'une fissure macroscopique. Ce phénomène peut intervenir pour des niveaux de contrainte faibles, inférieurs à la limite d'élasticité conventionnelle. On distingue ainsi :

— la fatigue à grand nombre de cycles qui ne met en jeu que des déformations quasi élastiques et qui correspond à des nombres de cycles à rupture supérieurs à 50 000 cycles environ; au-delà de 10^6, 10^7 ou même 10^9 cycles suivant le domaine d'application envisagé, on considère généralement que

la durée de vie est illimitée, c'est-à-dire que les sollicitations sont inférieures à une limite de fatigue conventionnelle ;

— la fatigue à faible nombre de cycles, ou fatigue oligocyclique, qui correspond à des nombres de cycles à rupture inférieurs à 50 000, pour laquelle les déformations plastiques interviennent ; à température élevée le phénomène de fatigue est le plus souvent couplé à l'endommagement de fluage et ne peut être isolé qu'en réalisant des essais à une fréquence suffisamment élevée ($f > 5$ à 10 Hz).

Les lois classiques s'expriment en fonction de grandeurs définies sur un cycle, voir figure 13 :

— amplitude de contrainte $\Delta\sigma/2$ ou de déformation $\Delta\varepsilon/2$,

— valeur moyenne (sur un cycle) de contrainte $\bar{\sigma}$ ou de déformation $\bar{\varepsilon}$,

— rapport de la contrainte (ou de la déformation) minimale à la contrainte (ou la déformation) maximale $R_\sigma = \sigma_m/\sigma_M$ (ou $R_\varepsilon = \varepsilon_m/\varepsilon_M$).

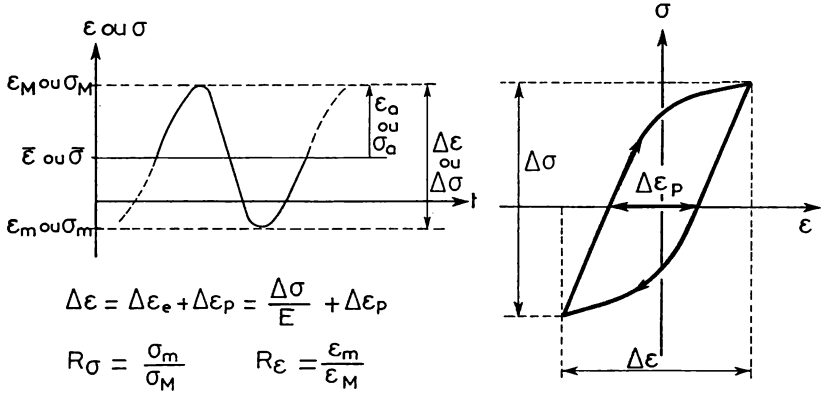


Fig. 13. Définition des grandeurs cycliques caractéristiques de la fatigue.

2.4.3.1. *Cumul linéaire et non linéaire*

Les effets de cumulation linéaire ou non linéaire sont d'une grande importance en fatigue. On a vu au chapitre 3 (§ 2.3.1.3) que la règle de cumulation linéaire était, en fait, une propriété de toute équation différentielle, linéaire ou non, à variables séparables.

La règle linéaire de Palmgreen-Miner suppose que les dommages se cumulent de façon additive lorsqu'on les définit par le facteur d'usage associé N_i/N_{F_i}, où N_i est le nombre de cycles effectués avec un chargement donné pour lequel le nombre de cycles à rupture (sous conditions périodiques) serait N_{F_i}. La condition de rupture s'écrit :

$$\sum_i \frac{N_i}{N_{F_i}} = 1 .$$

Dans l'essai périodique, l'évolution du dommage est donc considérée comme linéaire :

$$D = \frac{N}{N_F}.$$

En fait, la règle de cumulation linéaire s'applique encore pour une évolution de dommage non linéaire : il suffit qu'il existe une relation biunivoque entre D et N/N_F ou encore que la courbe d'évolution du dommage soit unique (indépendante du cycle appliqué) en fonction du facteur d'usage N/N_F. Dans le cas de l'essai à deux niveaux, on a alors l'évolution schématique de la figure 14*a*.

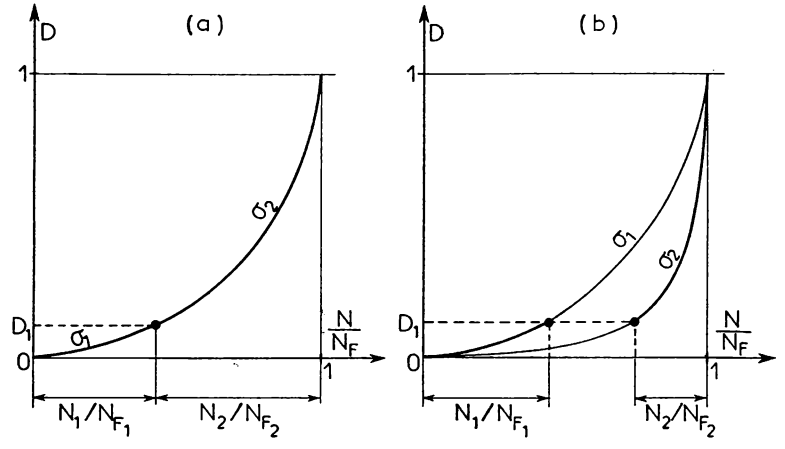


Fig. 14. (*a*) Evolution non linéaire du dommage mais cumul linéaire. (*b*) Cumul non linéaire.

Il existe donc deux moyens de définir une loi d'accroissement du dommage contenant la règle de cumul linéaire. Par référence aux règles classiques, cet accroissement est introduit par cycle :

— utiliser simplement une équation de la forme :

$$\delta D = \frac{\delta N}{N_F(\ldots)}$$

où N_F est le nombre de cycles à rupture défini par la relation paramétrique choisie ;

— employer une évolution non linéaire du dommage, mais unique en fonction de N/N_F, par exemple :

$$\delta D = \frac{(1 - D)^{-k}}{k + 1} \frac{\delta N}{N_F(\ldots)}.$$

On rappelle (cf. chap. 3) qu'une telle équation, dans laquelle le chargement et le dommage D sont des variables séparables, conduit toujours au cumul linéaire, comme sur la figure 14*a*.

Au contraire, l'effet de cumul non linéaire existe si les courbes d'évolution du dommage en fonction du facteur d'usage N/N_F dépendent du chargement imposé, comme le montre schématiquement la figure 14*b*. D_1 représente l'état interne d'endommagement à la fin du premier niveau σ_1. L'évolution se poursuit au second niveau à partir du même état. Il est clair que la somme des fractions de vie est ici inférieure à 1.

Du point de vue de la loi d'endommagement cela correspond toujours au cas où les variables décrivant le chargement et la variable dommage D ne sont pas des variables séparables.

La loi de cumul linéaire de Palmgreen-Miner ne donne de bons résultats que dans les cas de chargements où l'amplitude et la valeur moyenne de la contrainte varient peu. On décrira au paragraphe 4.3 des modèles plus sophistiqués pour les cas de chargement à histoires complexes.

2.4.3.2. *Loi de Woehler-Miner*

Le domaine de validité de cette loi est essentiellement la fatigue des métaux sous sollicitations périodiques. Les courbes de Woehler expriment les résultats d'essais de fatigue unidimensionnels. Elles représentent la relation existant entre le nombre de cycles à rupture, la valeur maximale de la contrainte σ_M et la valeur moyenne $\overline{\sigma}$ (ou le rapport $R_\sigma = \sigma_m/\sigma_M$). Un exemple typique est donné sur la figure 15.

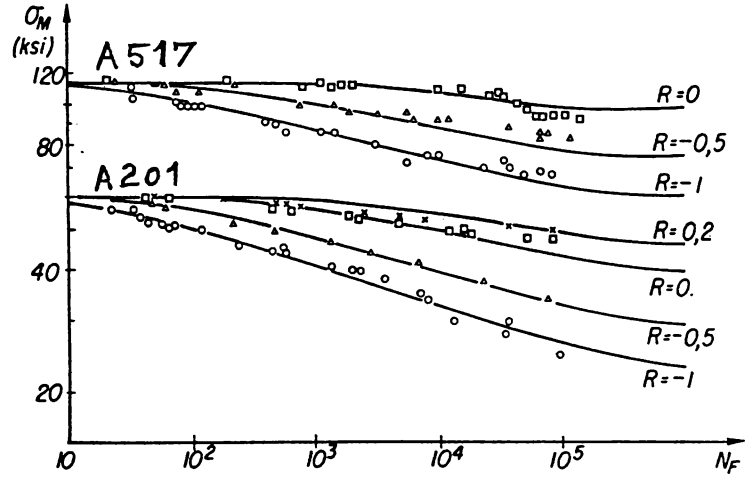


Fig. 15. Courbes des Woehler des aciers A 201 et A 517 à 20 °C.

En général, chaque courbe présente deux limites : une lorsque σ_M tend vers la contrainte de rupture statique σ_u (rupture en un quart de cycle) et une autre lorsque σ_M tend vers la limite de fatigue σ_l. L'influence de la contrainte moyenne sur la limite de fatigue est assez bien représentée par la relation linéaire de Goodman :

$$\sigma_l(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} + \sigma_{l_0}\left(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_u}\right)$$

où σ_{l_0} est la limite de fatigue en fatigue alternée ($\bar{\sigma} = 0$) ou par une forme modifiée :

$$\sigma_l(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} + \sigma_{l_0}(1 - b\bar{\sigma})$$

dans laquelle b est un coefficient caractéristique de chaque matériau, σ_l étant la contrainte maximale limite de fatigue à contrainte moyenne nulle (cas de la fatigue alternée en traction-compression). La figure 16 montre que cette relation est valable dans un large domaine.

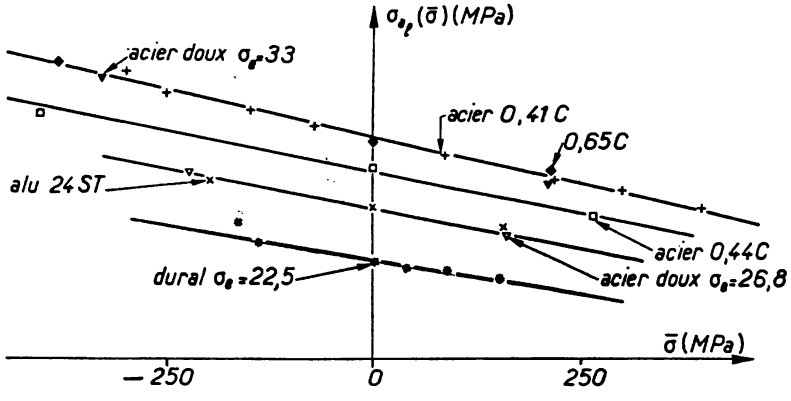


Fig. 16. Effet de la contrainte moyenne sur la limite de fatigue en traction-compression.

Un moyen d'écrire une loi d'endommagement qui exprime ces résultats expérimentaux est de supposer que l'endommagement par cycle est une fonction des valeurs maximale et moyenne de la contrainte :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = f(\sigma_M, \bar{\sigma}) .$$

Pour retrouver, après intégration, l'une des nombreuses formes proposées pour traduire les courbes de Woehler on pose :

$$\boxed{\frac{\delta D}{\delta N} = \frac{\sigma_M - \sigma_l(\bar{\sigma})}{\sigma_u - \sigma_M}\left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{B(\bar{\sigma})}\right)^{\beta}}$$

avec :

$$\sigma_l(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} + \sigma_{l_0}(1 - b\bar{\sigma})$$

$$B(\bar{\sigma}) = B_0(1 - b\bar{\sigma}) .$$

Le nombre de cycles à rupture s'obtient après une intégration évidente pour les conditions :

$$N = 0 \quad \rightarrow D = 0$$

$$N = N_F \rightarrow D = 1$$

soit :

$$N_F = \frac{\sigma_u - \sigma_M}{\sigma_M - \sigma_l(\bar{\sigma})} \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{B(\bar{\sigma})} \right)^{-\beta}$$

expression qui permet, par identification avec les courbes de Woehler, de déterminer (éventuellement en fonction de la température) les coefficients σ_u, σ_l, b, B_0 et β pour chaque matériau. Quelques exemples de valeurs de ces coefficients sont donnés dans le tableau 17. La figure 15 présente l'application à deux aciers (les coefficients a et M_0 correspondent à une généralisation étudiée en 4.3.2).

Matériau	T °C	σ_l	σ_u	β	B_0	b	a	M_0
IN 100	700	300	950	2,6	6 560		0,120	4 750
—	900	240	715	3	4 430		0,072	2 925
—	950	180	600	4,8	1 637	0,0013	0,108	1 485
—	1 000	140	470	6	880		0,138	875
—	1 110	70	250	4,7	645		0,162	635
INCO 718	550	600	1 150	10,3	1 586		0,015	1 335
A 201	20	150	412	6	932	0,0070		
A 517	20	400	790	7,4	1 945	0,0038	0,710	1 945
C 35	20	255	458	4	5 434			
316 L	20	222	760	5	1 213		0,900	1 700
MARAGING	20	310	2 028	4	5 820			
AISI 4130 S	20	240	890	5,5	1 590			
AISI 4130 H	20	292	1 420	5	2 460			
AISI 304	20	240	950	5,8	2 000			
Acier 52100	20	360	2 005	3,3	6 320			
Cu 5456 H 311	20	76	400	4,7	832			
AISI 304	593	150	700	3	4 207	0,005	0,100	3 100
—	650	140	580	3,7	1 728		0,200	1 700
316 L (ICL 167)	600	200	650	5,5	1 144		0,200	1 200

Tableau 17. Coefficients de la loi d'endommagement de fatigue (unités en MPa).

Dans le cas d'un chargement périodique (σ_M = Cte, σ_m = Cte), l'évolution de l'endommagement D est linéaire en fonction du nombre de cycles :

$$D = \frac{\sigma_M - \sigma_I(\bar{\sigma})}{\sigma_u - \sigma_M} \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{B(\bar{\sigma})} \right)^{\beta} N = \frac{N}{N_F}$$

cette propriété est très mal vérifiée par l'expérience comme nous le verrons au paragraphe 4.3.

2.4.3.3. *Loi de Manson-Coffin*

Dans le domaine de la fatigue oligocyclique, les déformations plastiques deviennent prépondérantes et l'on peut englober certains effets du temps ou de la fréquence en supposant que l'endommagement par cycle est fonction de l'amplitude de déformation plastique $\Delta\varepsilon_p$, sous forme d'une fonction puissance :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = f(\Delta\varepsilon_p) = \left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{C_1} \right)^{\gamma_1}.$$

L'intégration de cette relation dans le cas d'un chargement périodique où le cycle est supposé stabilisé, du premier cycle au dernier, donne la loi de Manson-Coffin :

$$N_F = \left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{C_1} \right)^{-\gamma_1}$$

qui correspond aux conditions :

$$N = 0 \quad \rightarrow D = 0$$

$$N = N_F \rightarrow D = 1 .$$

Dans le domaine des contraintes faibles où $\Delta\varepsilon_p$ est petit, on peut compléter cette relation par une loi d'endommagement écrite en fonction de l'amplitude de la contrainte $\Delta\sigma$:

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \left(\frac{\Delta\sigma}{C_2} \right)^{\gamma_2}$$

ou par intégration avec les mêmes conditions initiales et finales que précédemment :

$$N_F = \left(\frac{\Delta\sigma}{C_2} \right)^{-\gamma_2}.$$

En utilisant la loi d'élasticité linéaire $\Delta\sigma = E\,\Delta\varepsilon_e$, en résolvant par rapport à $\Delta\varepsilon_e$ et en ajoutant $\Delta\varepsilon_p$ tiré de la loi de Manson-Coffin, on obtient la relation :

$$\Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p = \frac{C_2}{E} N_F^{-1/\gamma_2} + C_1 N_F^{-1/\gamma_1}.$$

Les coefficients C_1, γ_1, C_2, γ_2 dépendent du matériau et de la température. Le tableau 18 et la figure 19*a* donnent quelques exemples. Cette relation est intéressante car, d'après un très grand nombre d'essais relatifs à de nombreux matériaux, elle a pu être mise sous la forme empirique suivante, dite des « pentes universelles » :

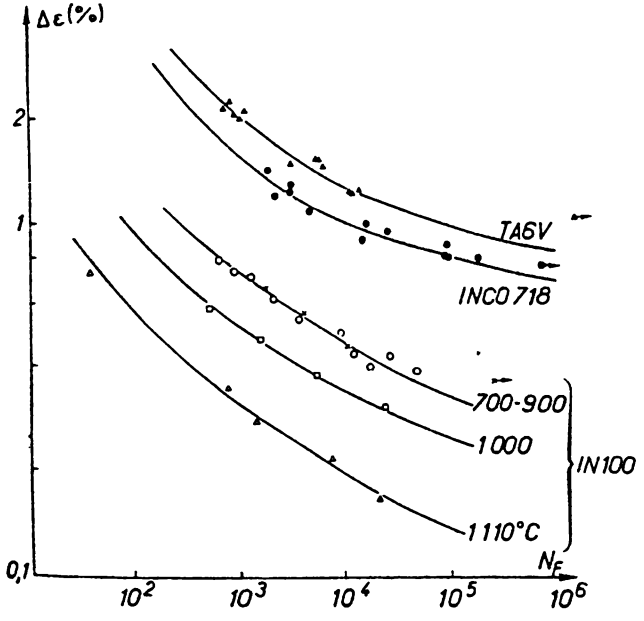
$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p = 3{,}5\frac{\sigma_u}{E} N_R^{-0{,}12} + D_u^{0{,}6} N_R^{-0{,}6}$$

où σ_u est la contrainte ultime de rupture statique, E le module d'Young et D_u la ductilité qui s'exprime en fonction de la réduction d'aire à la striction RA : $D_u = -\ln(1 - RA)$. La figure 19*b* montre le cas de l'alliage UDIMET 700 à température ambiante.

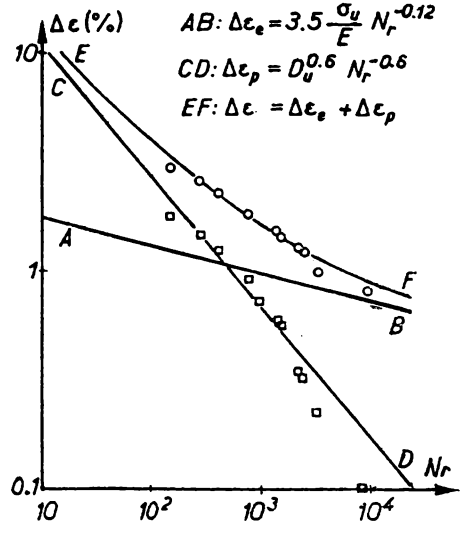
Matériau	T °C	γ_1	C_1	γ_2	C_2
TA 6 V	350	1,818	0,38	20	1 450
INCO 718	550	1,615	0,407	18,9	2 580
IN 100	700	2	0,244	6,5	3 168
IN 100	900	2	0,037	7,1	2 459
IN 100	1 000	2	0,031	8,75	1 268
IN 100	1 110	2	0,0205	7,8	750
AISI 304	20			10,5	2 120
—	430	2,2	0,1887		
MARAGING trempé	20	1,22	1,6343	11,1	2 940
Acier 35 CD 4 refroidi à l'air	20	1,54	0,662	8,3	3 565
X 20 GM_0 V 12 1	350	1,83	0,356	13,5	1 660
316 ICL 167 CN	20	2,07	0,34	5,7	3 280
IMI 550	20	1,3	2,63	13,3	2 940
COTAC 744	1 000	1,32	0,408	11,1	1 560
AISI 4130 Soft	20			9,6	1 925
AISI 4130 Hard	20			9,2	2 805
AISI 52100	20			6,5	5 100
ALU 5456 H 311	20			7,2	1 140
UDIMET 700	20	1,67	0,407	8,3	4 830

Tableau 18. Coefficients des relations de Manson-Coffin.

La loi de Manson-Coffin contient elle aussi la règle de cumulation linéaire et peut donc être utilisée pour les cas d'amplitude variable. Néanmoins son domaine d'application est limité aux faibles variations d'amplitude de déformations et aux températures peu élevées pour lesquelles l'endommagement de fluage est faible.



a)



b)

Fig. 19. (*a*) Relation de Manson-Coffin sur trois matériaux : TA 6 V à 350 °C, INCO 718 à 550 °C, IN 100 de 700 à 1 110 °C.
(*b*) Application de la règle des pentes universelles à l'alliage UDIMET 700 à 20 °C.

2.4.3.4. *Critère énergétique*

Un paramètre intéressant est l'énergie dissipée par cycle Δw, c'est-à-dire l'aire de la boucle d'hystérésis contrainte-déformation. Celle-ci peut être approchée à partir du coefficient d'écrouissage cyclique par :

$$\Delta w = \frac{M_c - 1}{M_c + 1} \Delta\sigma \, \Delta\varepsilon_p .$$

L'énergie totale dissipée jusqu'à rupture n'est malheureusement pas une constante intrinsèque au matériau : on observe qu'elle dépend du nombre de cycles à rupture, généralement en puissance (exemple fig. 20) :

$$w_F = N_F \, \Delta w = \alpha N_F^{-\delta} .$$

Les lois de plasticité et leur formulation dans un cadre thermodynamique permettent de remplacer Δw par l'énergie bloquée dans l'élément de volume (le reste étant dissipé en chaleur). Dans le cas de la plasticité indépendante du temps, avec écrouissages isotrope et cinématique superposés, avec une fonction seuil

$$f = J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R - k$$

où J est le second invariant du déviateur de $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}$, la puissance dissipée en chaleur s'écrit (voir chap. 5) :

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - R\dot{p} = \dot{p}[J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - R] = \dot{p}(f + k) .$$

Lorsqu'il n'y a pas d'écoulement on a $\dot{p} = 0$. Au contraire, pendant l'écoulement on a $f = 0$ et la puissance dissipée devient :

$$\Phi = k\dot{p} = k\sqrt{\tfrac{2}{3}\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} .$$

Au cours d'un cycle de traction compression l'énergie efficace, bloquée dans l'élément de volume, s'exprime donc par

$$\Delta w^* = \Delta w - \Delta\Phi = \Delta w - 2\,k\,\Delta\varepsilon_p = \left(\frac{M_c - 1}{M_c + 1}\,\Delta\sigma - 2\,k\right)\Delta\varepsilon_p$$

où k représente le seuil initial d'écoulement plastique, lorsque

$$\mathbf{X}(0) = \varepsilon_p(0) = k(0) = 0 .$$

L'intérêt de ce paramètre Δw^* est illustré sur la figure 20 : l'énergie à rupture donnée par

$$w_F^* = w_F - 2\,kN_F \, \Delta\varepsilon_p$$

est approximativement constante et peut donc être considérée comme intrin-

sèque au matériau (la valeur $k = 220$ MPa employée pour ce calcul correspond à la limite d'élasticité à 0,02 % de déformation plastique pour l'acier 316).

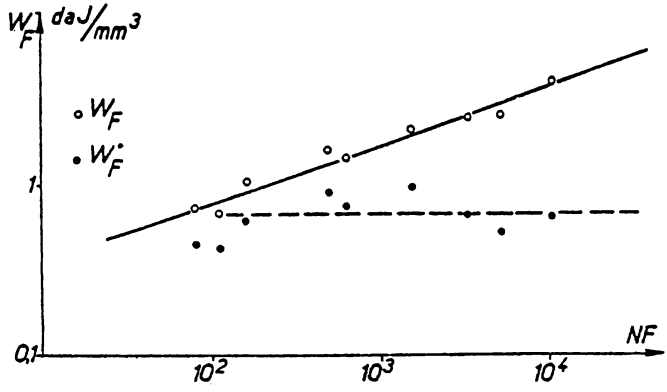


Fig. 20. Energie de déformation plastique dissipée jusqu'à rupture et partie efficace de cette énergie. Acier inoxydable 316 à température ambiante.

2.4.3.5. *Méthode de partition de l'amplitude de déformation*

Cette méthode a été développée pour décrire la fatigue à haute température en tenant compte des effets du temps. L'hypothèse de base consiste à imaginer qu'un cycle complexe peut toujours être décomposé en 4 parties correspondant à 4 relations d'endommagement pouvant être déterminées indépendamment.

Deux types d'endommagement peuvent exister selon que la sollicitation engendre une déformation plastique ou de fluage. Une sollicitation de traction produisant un endommagement différent d'une sollicitation de compression, on distingue encore ces deux cas, si bien que l'on a 4 types d'endommagements possibles correspondant aux 4 cycles de base de la figure 21.

Il s'agit toujours de cycles de fatigue alternée en traction-compression :

— endommagement plastique en traction, plastique en compression : D_{pp}, $\Delta\varepsilon_{pp}$;

— endommagement plastique en traction, de fluage en compression : D_{pc}, $\Delta\varepsilon_{pc}$;

— endommagement de fluage en traction, plastique en compression : D_{cp}, $\Delta\varepsilon_{cp}$;

— endommagement de fluage en traction et en compression : D_{cc}, $\Delta\varepsilon_{cc}$.

Chaque endommagement est modélisé par une relation différentielle par rapport au nombre de cycles. La forme généralement utilisée revient à supposer pour chaque type d'endommagement :

$$\frac{\delta D_{ij}}{\delta N} = \left(\frac{\Delta\varepsilon_{\text{in}}}{C_{ij}}\right)^{\gamma_{ij}} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta\varepsilon_{\text{in}}}.$$

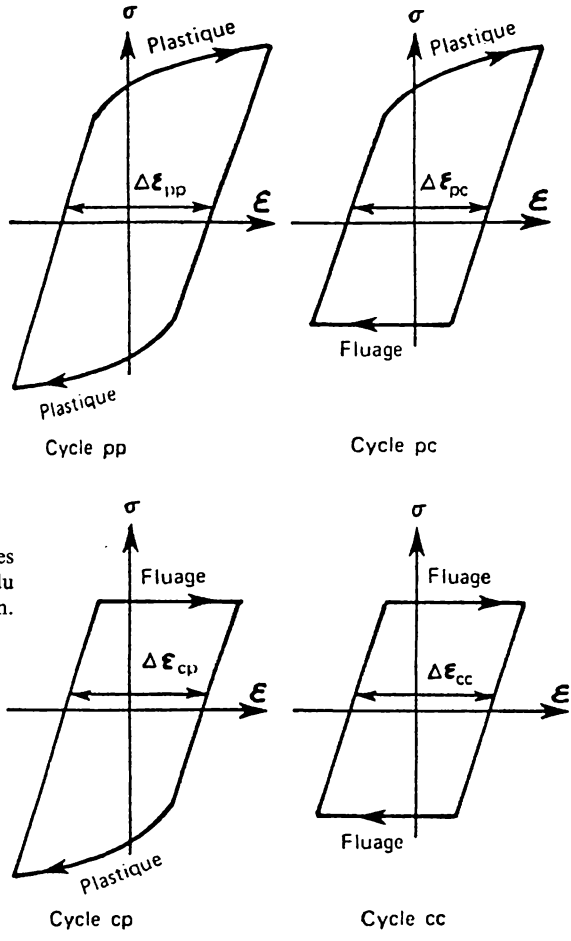


Fig. 21. Les quatre cycles de base de partition du domaine de déformation.

On suppose que ces endommagements s'ajoutent :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \left(\frac{\Delta\varepsilon_{\text{in}}}{C_{pp}}\right)^{\gamma_{pp}} \frac{\Delta\varepsilon_{pp}}{\Delta\varepsilon_{\text{in}}} + \left(\frac{\Delta\varepsilon_{\text{in}}}{C_{pc}}\right)^{\gamma_{pc}} \frac{\Delta\varepsilon_{pc}}{\Delta\varepsilon_{\text{in}}} + \left(\frac{\Delta\varepsilon_{\text{in}}}{C_{cp}}\right)^{\gamma_{cp}} \frac{\Delta\varepsilon_{cp}}{\Delta\varepsilon_{\text{in}}} + \\ + \left(\frac{\Delta\varepsilon_{\text{in}}}{C_{cc}}\right)^{\gamma_{cc}} \frac{\Delta\varepsilon_{cc}}{\Delta\varepsilon_{\text{in}}}.$$

Dans chacun des quatre cas de base, la déformation inélastique totale $\Delta\varepsilon_{\text{in}}$ est égale à la déformation $\Delta\varepsilon_{ij}$:

$$\frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta\varepsilon_{\text{in}}} = 1 .$$

On intègre la loi d'endommagement en supposant que, pour chaque cas, le chargement est périodique à amplitude de déformation constante : $\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{in} = \text{Cte}$. Soit N_{ij} la solution de $\dfrac{\delta D_{ij}}{\delta N} = \left(\dfrac{\Delta\varepsilon_{in}}{C_{ij}}\right)^{\gamma ij}$ pour

$$\begin{cases} N = 0 \rightarrow D_{ij} = 0 \\ N = N_{ij} \rightarrow D_{ij} = 1 : \end{cases}$$

$$N_{pp} = (\Delta\varepsilon_{pp}/C_{pp})^{-\gamma_{pp}}$$
$$N_{pc} = (\Delta\varepsilon_{pc}/C_{pc})^{-\gamma_{pc}}$$
$$N_{cp} = (\Delta\varepsilon_{cp}/C_{cp})^{-\gamma_{cp}}$$
$$N_{cc} = (\Delta\varepsilon_{cc}/C_{cc})^{-\gamma_{cc}}.$$

Ils permettent d'exprimer, d'une manière particulièrement simple, l'équation du dommage total valable pour des sollicitations périodiques, soit :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \frac{1}{N_{pp}}\frac{\Delta\varepsilon_{pp}}{\Delta\varepsilon_{in}} + \frac{1}{N_{pc}}\frac{\Delta\varepsilon_{pc}}{\Delta\varepsilon_{in}} + \frac{1}{N_{cp}}\frac{\Delta\varepsilon_{cp}}{\Delta\varepsilon_{in}} + \frac{1}{N_{cc}}\frac{\Delta\varepsilon_{cc}}{\Delta\varepsilon_{in}}$$

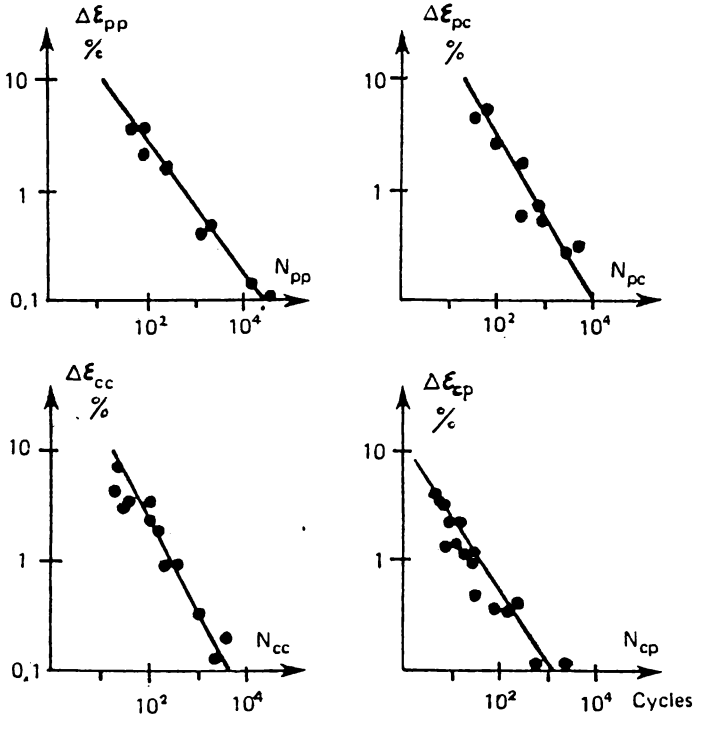


Fig. 22. Les quatre courbes de base de la méthode de partition pour l'acier 316.

et pour

$$D = 1 \rightarrow N = N_R$$

$$\frac{1}{N_R} = \frac{1}{N_{pp(\Delta\varepsilon_{in})}} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{pp}}{\Delta\varepsilon_{in}} + \frac{1}{N_{pc(\Delta\varepsilon_{in})}} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{pc}}{\Delta\varepsilon_{in}} + \frac{1}{N_{cp(\Delta\varepsilon_{in})}} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{cp}}{\Delta\varepsilon_{in}} + \frac{1}{N_{cc(\Delta\varepsilon_{in})}} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{cc}}{\Delta\varepsilon_{in}} .$$

C'est la relation de la méthode de la partition de l'amplitude de déformation. La figure 22 montre l'allure des quatre courbes $N_{ij}(\Delta\varepsilon_{ij})$ pour le cas particulier de l'acier inoxydable type 316.

L'utilisation de la méthode de partition de l'amplitude de déformation suppose la connaissance des 4 courbes de base et la connaissance des 4 parties de déformations $\Delta\varepsilon_{pp}$, $\Delta\varepsilon_{pc}$, $\Delta\varepsilon_{cp}$, $\Delta\varepsilon_{cc}$; $\Delta\varepsilon_{in}$ étant l'amplitude de déformation totale, les nombres N_{pp}, N_{pc}, N_{cp}, N_{cc} sont les abscisses des intersections de la droite, d'ordonnée $\Delta\varepsilon_{in}$ avec les quatre courbes de base (fig. 23*a*).

Pour décomposer le cycle réel en cycles de base « *pp*, *pc*, *cp*, *cc* », la difficulté est plus grande car cette partition garde, dans certains cas, un caractère subjectif.

Considérons le cycle réel *ABCDEF* de la figure 23*b* :

AB est un chargement « plastique » de traction, supposé rapide ;
BC est une partie « fluage » ;
CD est une décharge et une charge plastique en compression, supposée rapide ;
DE est un fluage en compression ;
EF une relaxation en compression ;
FA une décharge élastique.

1) On cherche la plus petite partie « plastique » soit *CD*. On lui associe une portion égale, en déformation, de la partie plastique de signe opposé, soit $A\alpha$; on obtient ainsi le cycle *pp* avec :

$$\Delta\varepsilon_{pp} = A\alpha' = D'C' .$$

2) On cherche la plus petite partie « fluage », soit *BC*. On lui associe une portion égale, en déformation, de la partie fluage de signe opposé, soit $D\beta$; on obtient le cycle *cc* avec :

$$\Delta\varepsilon_{cc} = B'C' = \beta' D' .$$

3) Il reste la portion « plastique » αB, la portion « fluage » βE et la portion relaxation *EF*. Relaxation et fluage sont supposés être gouvernés par la même loi d'endommagement (viscoplasticité).

La portion αB correspond à une déformation $\Delta\varepsilon_p = \alpha' B'$.

La portion βEF correspond à une déformation $\Delta\varepsilon_c = A\beta'$.

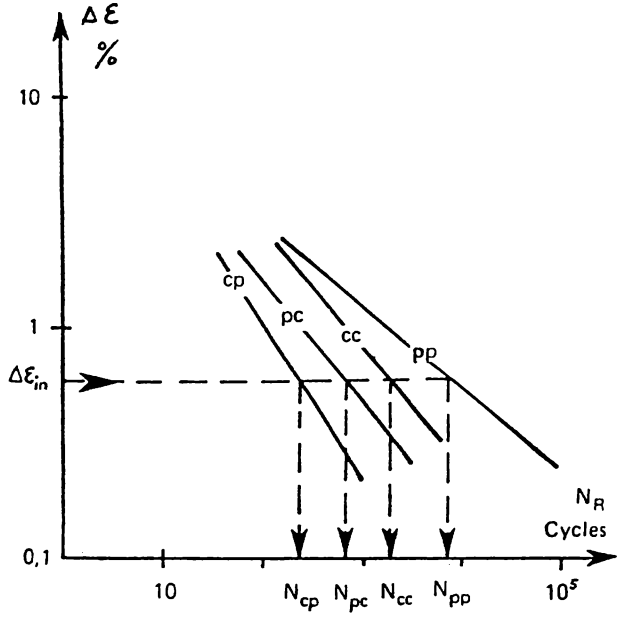


Fig. 23*a*. Obtention des nombres de cycles à rupture de base.

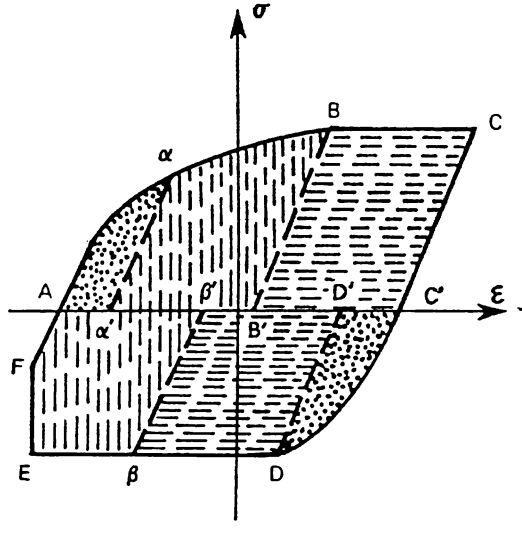


Fig. 23*b*. Partition du cycle réel.

La partition effectuée entraîne que ces deux déformations sont égales. On peut donc associer ces deux portions en un cycle *pc*

$$\Delta\varepsilon_{pc} = \alpha' B' = A\beta' .$$

4) Dans ce cas particulier, il n'existe pas de cycle *cp* : $\Delta\varepsilon_{cp} = 0$. On doit évidemment vérifier que :

$$\sum_{ij} \Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{\text{in}} = AC' .$$

Cette méthode donne une décomposition unique pour le cycle de la figure 22*b*, mais on conçoit qu'elle puisse donner lieu à des interprétations différentes pour les cycles dont les montées en charges sont suffisamment lentes pour qu'un fluage (sous charge variable) existe. Dans ce cas, très fréquent dans la pratique, il faut déterminer $\Delta\varepsilon_{pp}$ par une expérience de traction-compression cyclique effectuée à fréquence suffisamment élevée (5 à 10 Hz) et à même amplitude de contrainte. Un autre cas où la partition est difficile est celui où la température varie au cours du cycle.

La méthode de partition de l'amplitude de déformation est une méthode simple qui permet des prévisions à la condition d'être appliquée à des cas qui représentent des interpolations entre les quatre courbes de base et non des extrapolations. Les cas de températures évolutives, de très faibles déformations plastiques, d'effets de rochet, la généralisation aux sollicitations tridimensionnelles posent des problèmes difficiles, voire insolubles.

2.5. Critères tridimensionnels d'endommagement

Au paragraphe 2.4.1, on a introduit des seuils d'endommagement, comme la déformation ou la contrainte au-dessous desquelles l'endommagement est nul ou négligeable. Cette notion peut se généraliser en tridimensionnel comme pour les critères de plasticité. De même, pour l'endommagement dépendant du temps, on pourra utiliser des surfaces similaires aux équipotentielles introduites en viscoplasticité au chapitre 6.

En unidimensionnel, le seuil d'endommagement (en contrainte) définit le domaine de résistance du matériau :

$$-\sigma_D \leq \sigma < \sigma_D \quad \rightarrow \quad \dot{D} = 0 .$$

Lorsque $|\sigma|$ atteint ou dépasse le seuil σ_D il y a endommagement.

En tridimensionnel, on généralise cette notion par une surface seuil d'endommagement :

$$f_D(\boldsymbol{\sigma}, D) = 0 .$$

Lorsque $f_D < 0$, il n'y a pas évolution du dommage. Lorsque $f_D \geqslant 0$, il y a évolution. Les paragraphes ci-dessous donnent quelques exemples de telles surfaces, décrites au moyen d'invariants du tenseur des contraintes. L'endom-

magement est ici supposé isotrope. Dans certains cas, on pourra aussi employer une loi en déformation et la surface limite s'exprimera par :

$$f_D(\varepsilon, D) = 0 .$$

2.5.1. *Critère du taux de restitution de densité d'énergie élastique*

Le critère de plasticité de Von Mises ne met en jeu que l'énergie de cisaillement car les déformations plastiques ont pour mécanisme essentiel le glissement. L'endommagement est également sensible à l'énergie de cisaillement, mais aussi à l'énergie de déformation volumique puisque la croissance des cavités et des fissures sont des mécanismes très sensibles à la contrainte hydrostatique. Pour formuler un critère isotrope on peut donc postuler que le mécanisme d'endommagement est gouverné par l'énergie de déformation élastique totale : énergie de distorsion + énergie de déformation volumique :

$$w^e = w_d^e + w_H^e$$

$$w_e = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^e} \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^{e'}} \boldsymbol{\sigma}' : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{e'} + 3 \int_0^{\varepsilon_H^e} \sigma_H \, \mathrm{d}\varepsilon_H$$

$\boldsymbol{\sigma}'$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^{e'}$ étant comme auparavant les déviateurs de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, σ_H et ε_H la contrainte et la déformation hydrostatiques.

En introduisant la loi d'élasticité linéaire couplée à l'endommagement par la notion de contrainte effective :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e'} = \frac{1 + \nu}{E} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{1 - D} \qquad \varepsilon_H = \frac{1 - 2\nu}{E} \frac{\sigma_H}{1 - D}$$

et en supposant que l'endommagement ne varie pas dans le domaine élastique : $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}} = 0$, on obtient :

$$w_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \nu}{E} \frac{\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}{1 - D} + 3 \frac{1 - 2\nu}{E} \frac{\sigma_H^2}{1 - D} \right)$$

ou, avec la contrainte équivalente de Von Mises, $\sigma_{eq} = (\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}')^{1/2}$:

$$w_e = \frac{1}{2E(1 - D)} \left[\frac{2}{3} (1 + \nu) \sigma_{eq}^2 + 3(1 - 2\nu) \sigma_H^2 \right].$$

Comme pour la contrainte équivalente de plasticité, on définit la contrainte équivalente d'endommagement σ^* en écrivant que cette énergie d'un état tridimensionnel est égale à celle de l'état unidimensionnel équivalent, défini par σ^*, pour lequel ($\sigma_{eq} = \sigma^*$, $\sigma_H = \frac{1}{3} \sigma^*$) :

$$\frac{\sigma^{*2}}{2E(1 - D)} = \frac{1}{2E(1 - D)} \left[\frac{2}{3} (1 + \nu) \sigma_{eq}^2 + 3(1 - 2\nu) \sigma_H^2 \right]$$

ou

$$\sigma^* = \sigma_{eq}\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Dans cette expression apparaît le rapport σ_H/σ_{eq} qui exprime l'état de triaxialité des contraintes.

On verra au paragraphe 3.2.1 sur la formulation thermodynamique de l'endommagement que cette contrainte équivalente σ^* est reliée simplement à la variable Y duale de D (variable telle que YD représente la dissipation) qui représente, au signe près, le taux d'énergie élastique restituée lors d'un accroissement d'endommagement à contrainte et température constantes :

$$\sigma^* = (1-D)\sqrt{-2EY} \quad \text{avec} \quad Y = -\frac{1}{2}\left(\frac{dw_e}{dD}\right)_{\sigma,T}$$

d'où le nom de critère du taux de restitution de densité d'énergie élastique.

La figure 24 donne la représentation graphique de ce critère pour les cas bidimensionnels de bitension (*a*) et de tension-torsion (*b*).

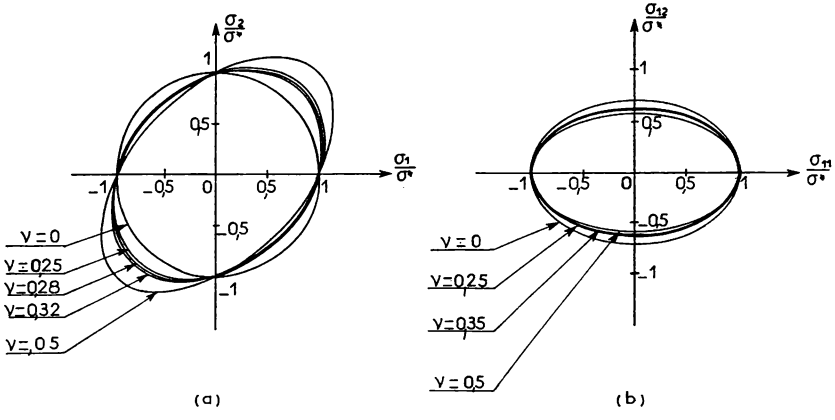


Fig. 24. Représentations du critère du taux de restitution de densité d'énergie élastique (d'après D. Baptiste).

2.5.2. *Critère à trois invariants*

Le critère du taux de restitution de densité d'énergie élastique est très simple et formellement justifié par la thermodynamique ; il ne fait intervenir aucun coefficient dépendant du matériau autre que le coefficient de Poisson. Dans cer-

tains cas, il peut être mis en défaut, en particulier pour l'endommagement de fluage où il donne la même réponse en traction et compression pures.

Toujours dans le cadre de l'isotropie, une forme plus générale, mais plus complexe, consiste à exprimer le critère d'endommagement à partir des trois invariants élémentaires :

$$\sigma_H = \frac{J_1(\boldsymbol{\sigma})}{3} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma})$$

$$\sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \left[\frac{3}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}'^2)\right]^{1/2}$$

$$J_3(\boldsymbol{\sigma}) = \left[\frac{27}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}'^3)\right]^{1/3}$$

à la place de $J_3(\boldsymbol{\sigma})$ il est plus pratique de choisir :

$$J_0(\boldsymbol{\sigma}) = \mathrm{Sup}\,(\sigma_i)\,.$$

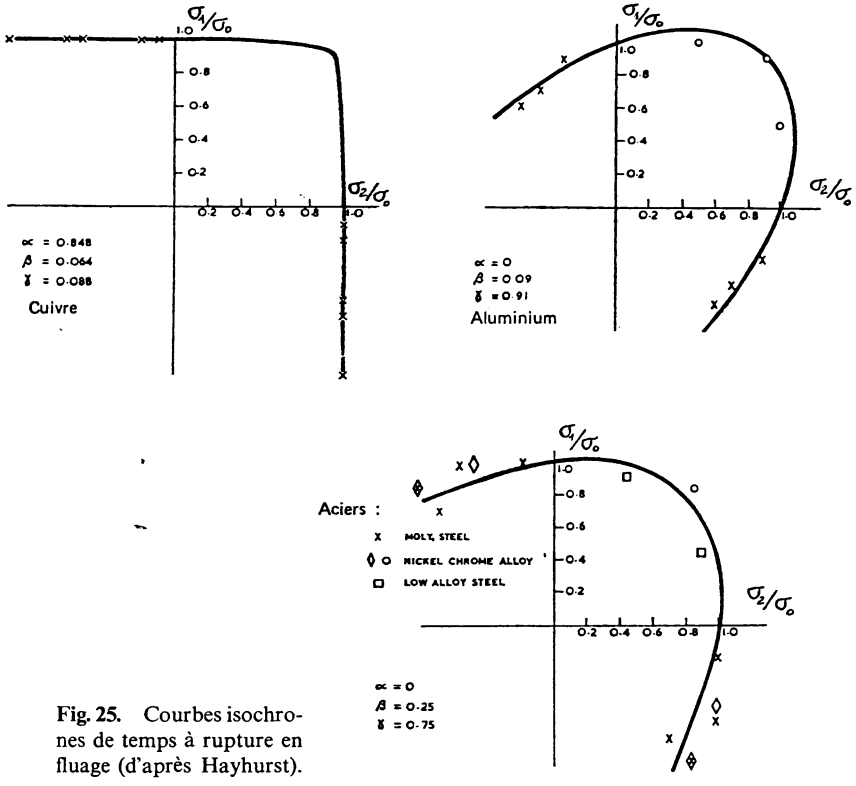


Fig. 25. Courbes isochrones de temps à rupture en fluage (d'après Hayhurst).

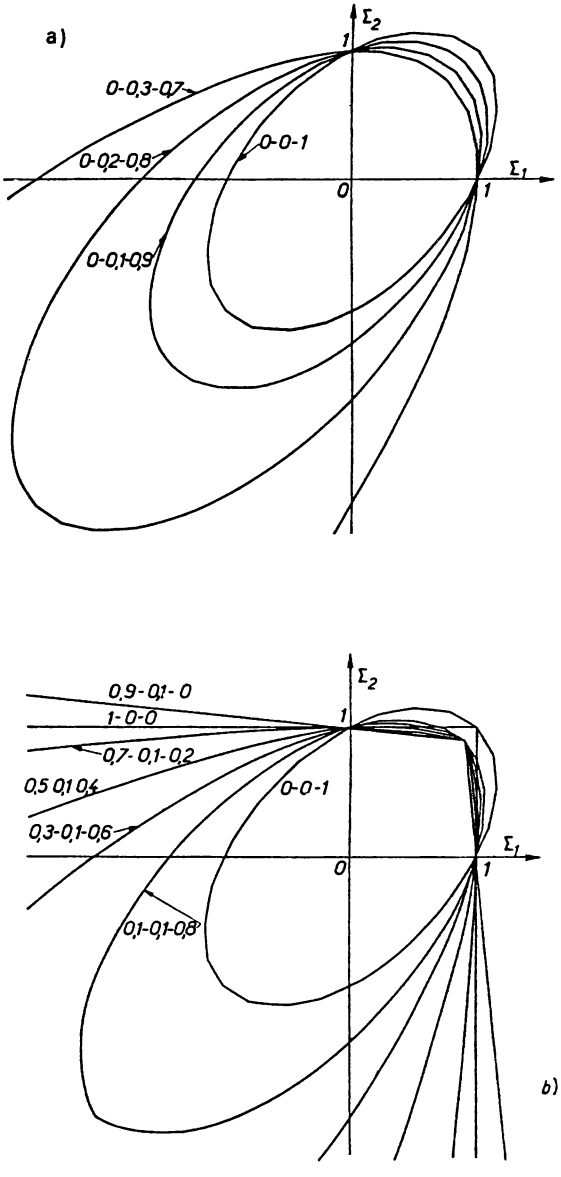


Fig. 26. Courbes isochrones.
(*a*) Influence de la contrainte hydrostatique ($\alpha = 0$).
(*b*) Influence de la contrainte principale maximale ($\beta = 0{,}1$).

Si l'on choisit une combinaison linéaire, α et β étant des coefficients phénoménologiques, alors :

$$\boxed{\chi(\sigma) = \alpha J_0(\sigma) + \beta J_1(\sigma) + (1 - \alpha - \beta) J_2(\sigma)}.$$

Pour un état uniaxial on retrouve $\chi(\sigma) = \sigma$.

Notons que les trois invariants correspondent à trois mécanismes élémentaires de création et d'évolution des défauts et que toute surface isotrope de l'espace des contraintes peut être décrite par cette expression. $\chi(\sigma)$ peut être négatif pour certains états de contrainte (et certaines valeurs de α et β) : ces états ne provoquent alors aucun endommagement.

La figure 25 illustre les possibilités de description des surfaces isochrones de fluage (lieux des états de contrainte qui provoquent le même temps à rupture en fluage). La figure 26 donne les allures de ces surfaces pour divers choix des coefficients α et β.

Un cas particulier intéressant est celui où $\alpha = 0$:

$$\sigma_\beta^* = \beta J_1(\sigma) + (1 - \beta) J_2(\sigma)$$

ou

$$\boxed{\sigma_\beta^* = \sigma_{eq}\left[(1 - \beta) + 3\beta \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right]}$$

β joue alors le rôle d'un coefficient de sensibilité du matériau au rapport de triaxialité des contraintes. La figure 26*a* donne les graphes relatifs à cette contrainte équivalente.

2.5.3. *Critère non symétrique en déformation*

Ce critère a été développé pour le béton qui présente la caractéristique d'être considérablement plus résistant à l'endommagement en compression qu'en traction. Les observations au microscope montrent que les microfissures ont toujours une orientation préférentielle normale aux directions d'extension principales, d'où l'idée d'introduire un critère qui ne dépende que de la partie positive des déformations principales.

ε_1, ε_2 et ε_3 étant les déformations principales, ce critère s'exprime par :

$$\boxed{\varepsilon^* = (\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle^2)^{1/2}}$$

avec

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \varepsilon_i \quad \text{si} \quad \varepsilon_i > 0 \quad \text{cas d'extension},$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon_i \leqslant 0 \quad \text{cas de compression}.$$

La figure 27 indique l'allure d'un tel critère comparé à des résultats expérimentaux dans un cas de bi-tension normée à -1 pour la contrainte de rupture en compression σ_R^c.

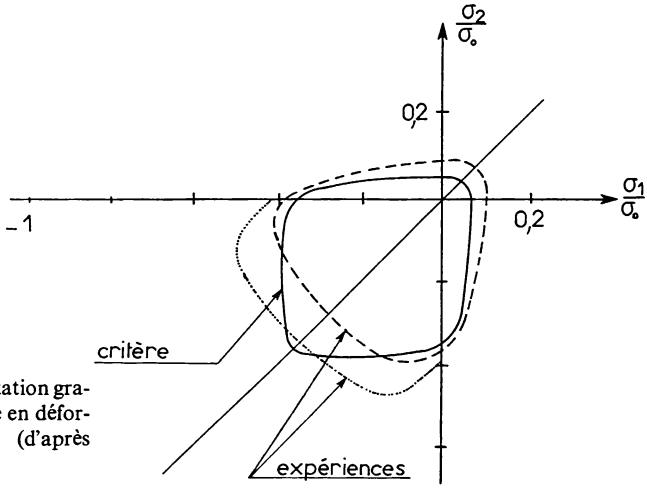


Fig. 27. Présentation graphique du critère en déformation (béton) (d'après J. Mazars).

2.5.4. *Critères de limite de fatigue*

Le cas de la fatigue est plus complexe pour deux raisons :

— on schématise le chargement en faisant intervenir la notion de cycle; les paramètres introduits sont alors définis globalement sur un cycle (amplitude, valeur maximale, valeur moyenne...),

— les critères de limite de fatigue exprimés en amplitude dépendent aussi de la valeur moyenne au cours du cycle (voir § 2.4.3).

La notion de limite de fatigue unidimensionnelle se généralise donc en introduisant au moins deux paramètres de chargement. De nombreuses expériences montrent que le cisaillement moyen n'influe ni sur la limite de fatigue en traction, ni sur la limite en torsion (fig. 28).

Au contraire, la contrainte moyenne de traction influe linéairement sur la limite de fatigue en traction (fig. 16) comme sur la limite en torsion (fig. 29). Les deux paramètres qui permettent de traduire ces effets sont :

— une amplitude de cisaillement octaédral, définie en chargement proportionnel par :

$$A_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}(\sigma'_{ij_M} - \sigma'_{ij_m})(\sigma'_{ij_M} - \sigma'_{ij_m})}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2]}$$

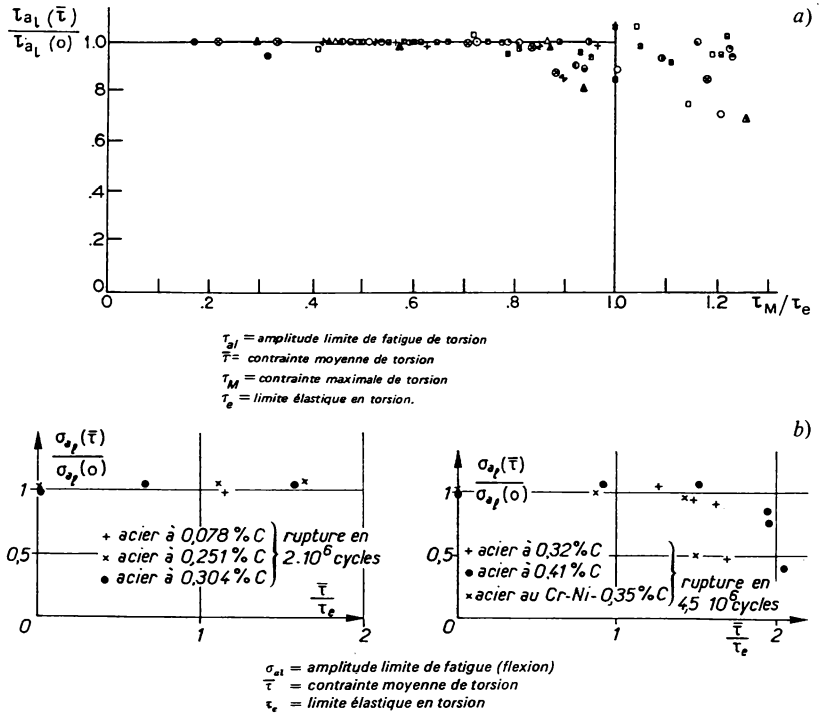


Fig. 28. Effet de la torsion moyenne sur la limite de fatigue : (*a*) en torsion ; (*b*) en traction-compression.

où σ'_M et σ'_m sont les valeurs maximale et minimale de chaque composante du déviateur (au cours du cycle), a_1, a_2, a_3 représentent les amplitudes des contraintes principales $a_i = \Delta\sigma_i/2$.

— la pression hydrostatique moyenne au cours du cycle $\overline{\sigma_H} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Moy}\,J_1(\sigma)$ dans le critère de Sines, ou la pression hydrostatique maximale $\sigma_{H_M} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Max}\,J_1(\sigma)$ comme dans le critère de Crossland.

Ces deux critères de limite de fatigue s'écrivent :

— critère de Sines :

$$A_{II} = \sigma_{l_0}(1 - 3\,b\overline{\sigma_H})$$

— critère de Crossland :

$$A_{II} = \sigma_{l_0}\frac{1 - 3\,b\sigma_{H_M}}{1 - b\sigma_l}.$$

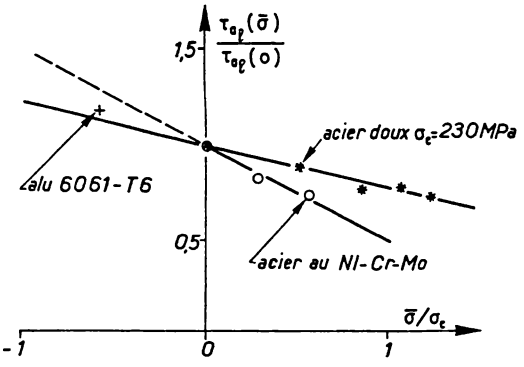


Fig. 29. Influence d'une traction moyenne sur la limite de fatigue en torsion.

τ_{af} = *amplitude limite de fatigue en torsion*
$\bar{\sigma}$ = *contrainte moyenne de traction*
σ_e = *limite élastique en traction.*

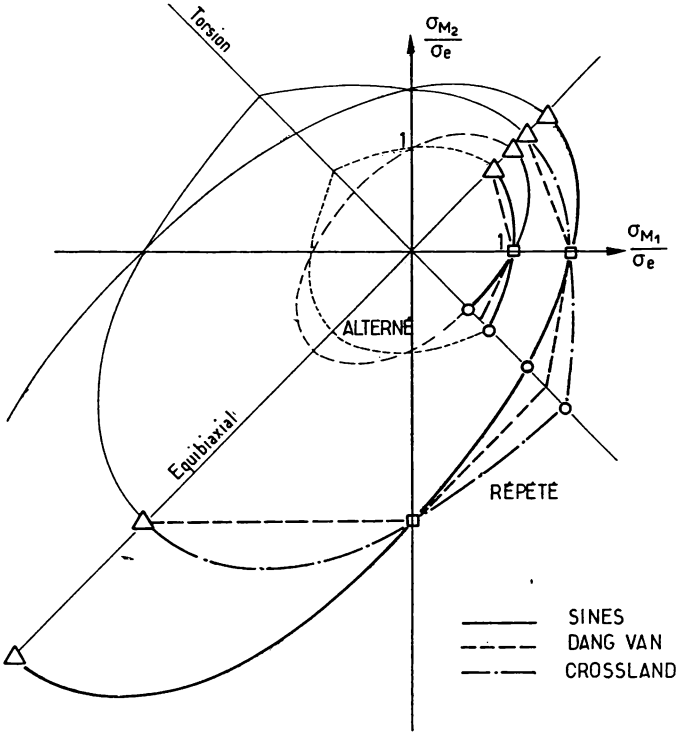


Fig. 30. Critères de Sines, Crossland, Dang-Van, en chargement proportionnel biaxial alterné ou répété.

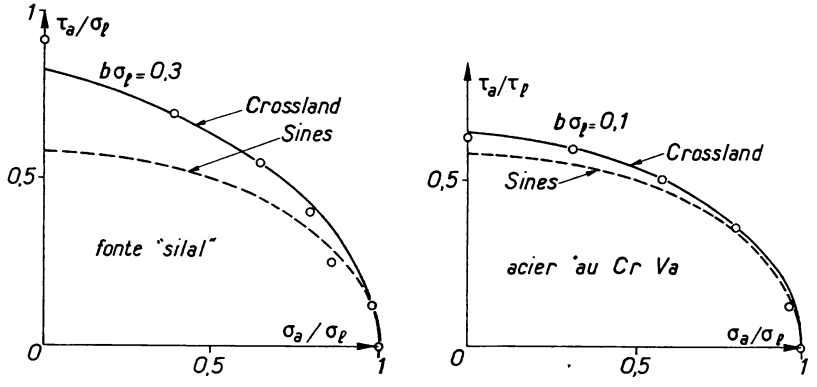


Fig. 31. Traction-torsion alternée : critère de Sines et critère de Crossland pour une fonte et un acier.

Chargement		SINES	CROSSLAND
Traction alternée	$\sigma_2 = 0$	σ_l	
Traction répétée		$\sigma_l/(1 + b\,\sigma_l)$	
Compression répétée		$\sigma_l/(1 - b\,\sigma_l)$	
Traction équibiaxiale alternée	$\sigma_2 = \sigma_1$	σ_l	$\sigma_l/(1 + b\,\sigma_l)$
Traction équibiaxiale répétée		$\sigma_l/(1 + 2\,b\,\sigma_l)$	$\sigma_l/(1 + 3\,b\,\sigma_l)$
Compression équibiaxiale répétée		$\sigma_l/(1 - 2\,b\,\sigma_l)$	$\sigma_l/(1 - b\,\sigma_l)$
Torsion alternée ou répétée	$\sigma_2 = -\sigma_1$	$\sigma_l/\sqrt{3}$	$\sigma_l/\sqrt{3}\,(1 - b\,\sigma_l)$

SINES : $\sqrt{\sigma_{a_1}^2 + \sigma_{a_2}^2 - \sigma_{a_1}\,\sigma_{a_2}} = \sigma_l\,[1 - b\,(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)]$

CROSSLAND : $\sqrt{\sigma_{a_1}^2 + \sigma_{a_2}^2 - \sigma_{a_1}\,\sigma_{a_2}} = \dfrac{\sigma_l}{1 - b\,\sigma_l}\,[1 - b\,\mathrm{Max}\,(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \sigma_{a_1} + \sigma_{a_2})]$

Tableau 32. Limites de fatigue en amplitude de σ_{a_1} pour des chargements proportionnels particuliers.

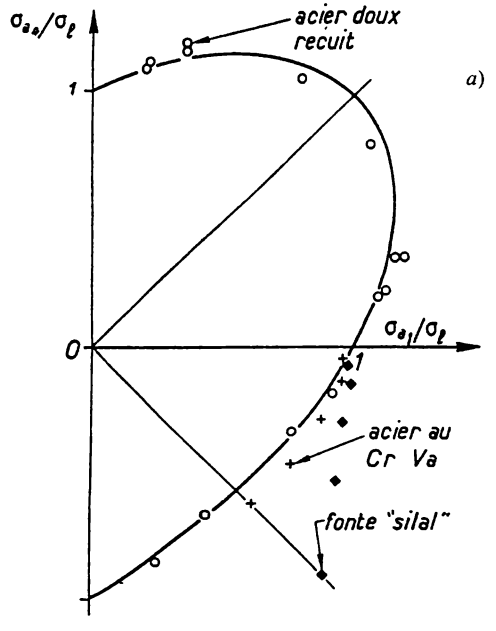
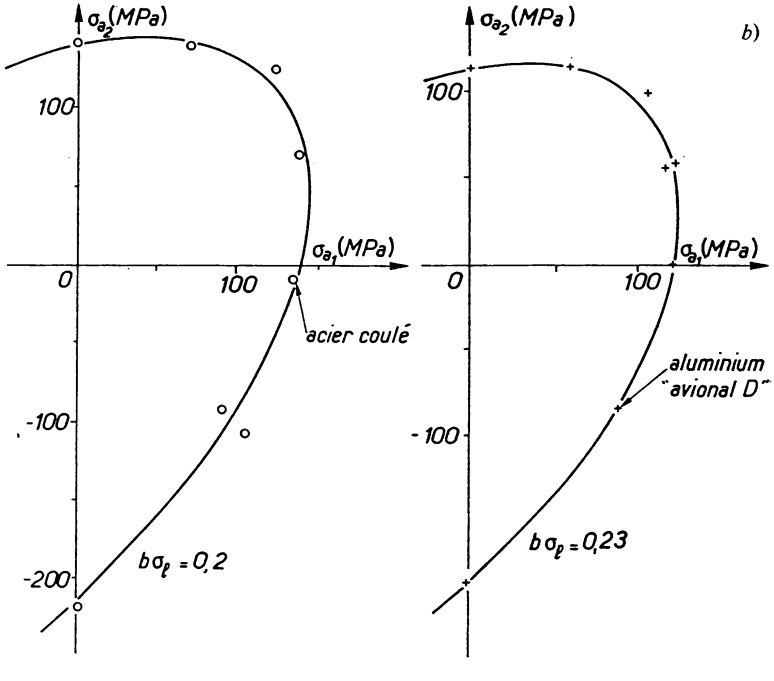


Fig. 33. Le critère de Sines en chargement alterné (*a*) ou répété (*b*).



Dans le premier cas, sous chargement proportionnel alterné, la surface limite de fatigue dans le plan $\sigma_3 = 0$ correspond à l'ellipse de Von Mises (fig. 30) : le critère de Crossland correspond à une portion d'ellipse d'excentricité différente.

Suivant les matériaux, l'un ou l'autre des deux critères est plus réaliste (fig. 31). Le tableau 32 indique les différentes expressions de la limite de fatigue exprimée en amplitude $\sigma_{a_1} = \dfrac{\Delta\sigma_1}{2}$ pour divers types de chargement. La surface limite de fatigue dépend de la contrainte moyenne au cours du cycle. La figure 33 montre, par exemple, les cas des chargements alternés et répétés.

Sous chargements non proportionnels, ces critères sont toujours applicables, mais il faut remplacer la définition de l'amplitude équivalente A_{II} par une formule intrinsèque :

$$A_{II} = \frac{1}{2} \operatorname*{Max}_{t_0} \operatorname*{Max}_{t} J_2(\boldsymbol{\sigma}(t) - \boldsymbol{\sigma}(t_0))$$

où J_2 désigne le second invariant du déviateur. Cette généralisation est illustrée sur la figure 34*a* dans le plan du déviateur, pour un chargement quelconque.

Un critère intermédiaire, bénéficiant d'une base physique plus solide, a été introduit par Dang-Van. Pour définir le paramètre amplitude, il tient compte de la facette qui supporte l'amplitude maximale de cisaillement au cours du cycle. Sur cette facette, repérée par sa normale $\vec{n}$, on fait intervenir à chaque instant la différence $\vec{\tau}(t) - \vec{\tau}$ où $\vec{\tau}(t)$ est le cisaillement $\boldsymbol{\sigma}.\vec{n} - (\boldsymbol{\sigma}.\vec{n}.\vec{n})\,\vec{n}$ et où $\vec{\tau}$ représente le cisaillement moyen sur cette facette au cours du cycle. Dans un cas quelconque $\vec{\tau}$ est défini par le centre du plus petit cercle contenant le trajet $\vec{\tau}(t)$ dans la facette. Ce cercle a pour rayon l'amplitude du cisaillement (fig. 34*b*) :

$$\frac{\Delta\tau}{2} = \frac{1}{2} \operatorname*{Max}_{t} \operatorname*{Max}_{t_0} \| \vec{\tau}(t) - \vec{\tau}(t_0) \|$$

où $\| \, . \, \|$ désigne le module. La quantité $\vec{\tau}(t) - \vec{\tau}$ est combinée avec la pression hydrostatique $\sigma_H(t)$ pour définir l'instant critique et le paramètre critique. Le critère s'exprime alors :

$$\operatorname*{Max}_{\vec{n}} \operatorname*{Max}_{t} \left[\| \vec{\tau}(t) - \vec{\tau} \| + \frac{1}{2} \frac{3\, b\sigma_{I_0}}{1 - b\sigma_{I_0}} \sigma_H(t) \right] = \frac{\sigma_{I_0}}{2(1 - b\sigma_{I_0})}.$$

La figure 35 illustre le recentrage et la détermination de l'instant critique dans le diagramme cisaillement-pression (dans le cas où le cisaillement a une direction fixe). La différence essentielle avec les deux critères précédents est que les quantités (cisaillement et pression) intervenant dans le critère sont définies au même instant (point A). Dans le cas du critère de Crossland, au contraire, ces quantités seraient définies à des instants différents (A' et C). On a donc une description plus fine des processus réels. La figure 36 montre divers cas de chargements proportionnels après recentrage du cycle. Dans ce

cas, la facette critique est bien celle qui maximise l'amplitude de cisaillement et l'on peut écrire le critère sous forme simplifiée :

$$\frac{\Delta\tau}{2} = \frac{\sigma_{l_0}}{2(1 - b\sigma_{l_0})}[1 - 3\,b\sigma_{H_M}].$$

En chargement proportionnel de torsion, le critère de Dang Van donne des résultats compris entre ceux fournis par les critères de Sines et de Crossland :

$$\tau_a = \sigma_a = \frac{\sigma_{l_0}}{2(1 - b\sigma_{l_0})}.$$

Pour les autres chargements proportionnels (traction-compression, équibiaxial alterné, répété). il est identique au critère de Crossland comme le montre la figure 30.

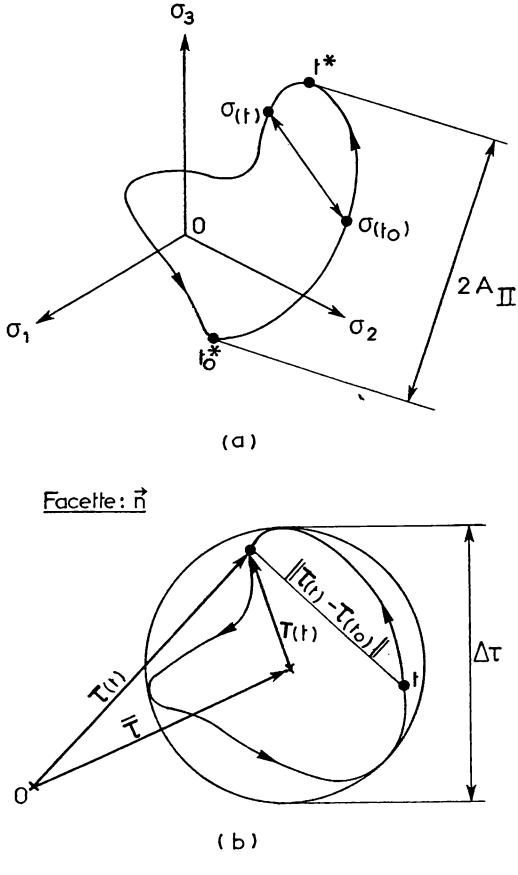


Fig. 34. Détermination de l'amplitude du cycle dans le cas général.
(*a*) Critères de Sines et Crossland.
(*b*) Critère de Dang-Van.

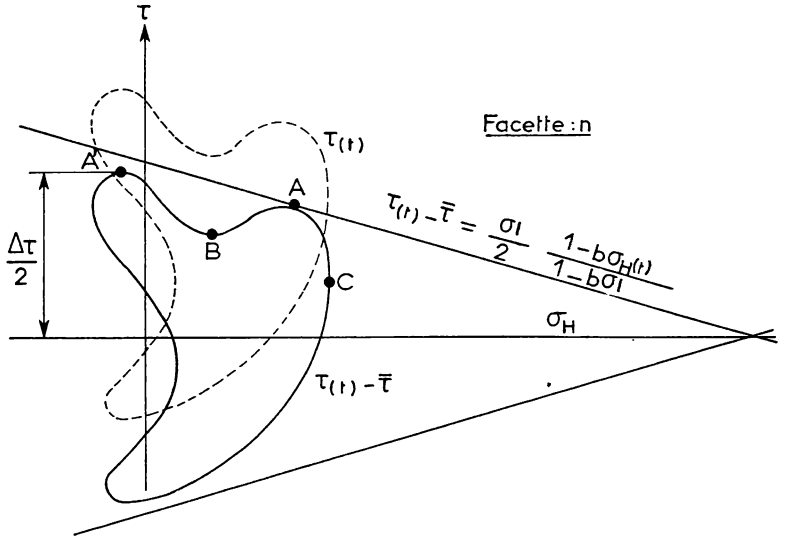


Fig. 35. Application du critère de Dang-Van lorsque le cisaillement a une direction fixe au cours du cycle. *A* : instant critique. *B* et *C* : instants correspondants au choix de la pression hydrostatique dans les critères de Sines et Crossland.

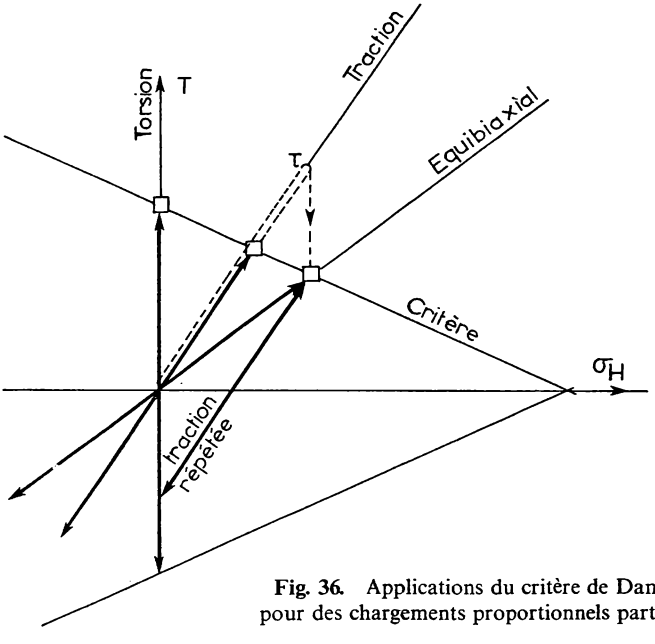


Fig. 36. Applications du critère de Dang-Van pour des chargements proportionnels particuliers.

Notons que ce critère fournit implicitement la direction des défauts (plans critiques) mais que, dans le cas général, il est nettement plus complexe d'emploi à cause des trois maximisations à faire : deux fois en fonction de t et t_0 dans chaque facette, puis maximiser en fonction de la direction de la normale $\vec{n}$.

Au lieu d'utiliser l'amplitude du cisaillement $\Delta\tau$, on peut aussi utiliser l'amplitude du cisaillement octaédral

$$\Delta J_2 = \underset{t_1}{\text{Max}} \left[\underset{t_2}{\text{Max}}\, J_2(\sigma(t_1) - \sigma(t_2)) \right].$$

Ce maximum étant atteint au temps t_i on définit la contrainte de cisaillement équivalente par

$$J_2^*(t) = J_2(\sigma(t) - \sigma(t_i)) - \frac{\Delta J_2}{2}.$$

Il suffit alors de remplacer dans le critère $(\vec{\tau}(t).\sigma_H(t))$ par $(J_2^*(t)\ \sigma_H(t))$ et l'on obtient une expression plus simple d'emploi, équivalente au critère de Crossland en chargement proportionnel.

3. FORMULATION THERMODYNAMIQUE

3.1. Représentation tridimensionnelle de l'endommagement

Dans le cadre de l'isotropie, la variable endommagement est un scalaire D qui agit d'une manière identique sur toutes les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ pour définir le tenseur des contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - D}.$$

En fait, les microfissures surfaciques et les cavités volumiques qui constituent le dommage ont le plus souvent des orientations privilégiées et constituent un endommagement anisotrope. Par exemple, les microfissures dans les métaux ont tendance à se propager perpendiculairement à la direction de la contrainte principale maximale. L'opérateur endommagement qui, appliqué au tenseur des contraintes usuel, donne le tenseur des contraintes effectives est alors de nature tensorielle et d'un ordre différent selon le schéma théorique adopté ! Tenseur d'ordre 2 si l'on définit un vecteur contrainte sur une surface endommagée orientée mais ce concept ne vérifie pas nécessairement le second principe de la thermodynamique ; tenseur d'ordre 4 si l'on définit l'opérateur d'endommagement à partir du potentiel élastique comme on va le montrer ci-dessous ; tenseur d'ordre 8..., pourquoi pas !

Si l'on ne prend en compte que l'effet géométrique des cavités et des fissures, on introduit sur chaque élément d'aire, repéré par sa normale $\vec{n}$, une réduction

d'aire $\Omega(\vec{n})$ et l'état d'endommagement est caractérisé par un tenseur symétrique du second ordre qui s'exprime dans son repère principal par :

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{j=1}^{3} \Omega_j . \vec{n}_j \otimes \vec{n}_j .$$

Le tenseur des contraintes nettes (rapportées aux sections résistantes non corrigées) symétrisé selon Murakami et Ohno s'en déduit par :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{\sigma}.(\mathbf{1} - \mathbf{\Omega})^{-1} + (\mathbf{1} - \mathbf{\Omega})^{-1}.\boldsymbol{\sigma}] .$$

En fait, cette contrainte effective ne peut être utilisée directement dans les lois de comportement car le comportement du matériau endommagé dépend non seulement de la réduction d'aire due aux fissures et cavités mais aussi de leur arrangement et des effets d'interaction. Il faut introduire une autre contrainte effective qui se déduit du tenseur des contraintes de Cauchy par un tenseur d'ordre 4, tenseur qui caractérise aussi le dommage mais qu'il est préférable d'introduire directement à partir d'une théorie fondée sur le concept d'équivalence en déformation.

3.1.1. *Définition de la contrainte effective par l'équivalence en déformation*

Cette théorie, introduite par J. L. Chaboche et J. Lemaitre, s'applique à un matériau dont le comportement initial est quelconque (élastique ou plastique, isotrope ou anisotrope). Sur le plan pratique, il est suffisant d'examiner le cas de l'élasticité isotherme pour définir le tenseur de contrainte effective. Soit donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

la loi de comportement du matériau vierge et

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

la loi de comportement du matériau endommagé, $\mathbf{a}$ étant le tenseur d'élasticité d'ordre 4. L'énergie de déformation du matériau endommagé peut être définie directement à partir d'un tenseur d'élasticité $\tilde{\mathbf{a}}$ différent de $\mathbf{a}$ mais présentant les mêmes conditions de symétrie imposées par la thermodynamique :

$$\tilde{a}_{ijkl} = \tilde{a}_{ijlk} = \tilde{a}_{jikl} = \tilde{a}_{klij}$$

$$\psi_e = \tfrac{1}{2}\,\tilde{\mathbf{a}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e .$$

La loi de comportement du matériau endommagé s'en déduit par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \tilde{\mathbf{a}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e .$$

D'après le principe d'équivalence en déformation (§ 2.2.2), $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ est le tenseur de contrainte qu'il faudrait appliquer au matériau vierge pour obtenir le

même tenseur de déformation élastique que celui produit par le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ sur le matériau endommagé. La combinaison des deux lois donne facilement :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{a} : \tilde{\mathbf{a}}^{-1}) : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Delta} : \boldsymbol{\sigma}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ étant des tenseurs d'ordre 2, on voit que $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{a} : \tilde{\mathbf{a}}^{-1}$, opérateur d'endommagement est un tenseur d'ordre 4 dont on peut déterminer les composantes à partir des matrices d'élasticité du matériau vierge et du matériau endommagé.

On retrouve aussi ce résultat en utilisant les techniques mathématiques d'homogénéisation, tout au moins pour les cas idéalisés d'éléments de volume endommagés par des cavités ellipsoïdales ou des fissures parallèles réparties périodiquement. La matrice d'élasticité du matériau endommagé se met sous la forme :

$$\tilde{a}_{ijkl} = \left(\frac{\tilde{V}}{V} \delta_{ir}\, \delta_{js} - \frac{1}{V} \int_{\tilde{V}} b_{ijrs}\, \mathrm{d}V \right) a_{rskl}$$

où b_{ijrs} représente la matrice des coefficients de concentration de contrainte. V est l'élément de volume apparent, $\tilde{V}$ est le volume solide (le volume apparent diminué des vides). On introduit ainsi un opérateur $\mathbf{D}$ d'ordre 4, de composantes :

$$D_{ijrs} = \left(1 - \frac{\tilde{V}}{V} \right) \delta_{ir}\, \delta_{js} + \frac{1}{V} \int_{\tilde{V}} b_{ijrs}\, \mathrm{d}V$$

tel que,

$$(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} = \boldsymbol{\Delta}$$

Cet opérateur est non symétrique, par exemple $D_{1122} \neq D_{2211}$. On peut écrire :

$$\tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \mathbf{a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma}\,.$$

Nous en resterons là pour la définition de la variable tridimensionnelle d'endommagement $\mathbf{D}$ susceptible de traduire les états anisotropes d'endommagement les plus généraux. Notons malgré tout qu'une équivalence énergétique, utilisée à la place de l'équivalence en déformation, permet d'introduire un tenseur d'endommagement d'ordre 2 (noté encore $\boldsymbol{\Omega}$) et une contrainte effective de la forme :

$$(\mathbf{1} - \boldsymbol{\Omega})^{-1/2}.\boldsymbol{\sigma}.(\mathbf{1} - \boldsymbol{\Omega})^{-1/2}$$

mais cette théorie présente l'inconvénient de ne pouvoir être identifiée avec une anisotropie élastique quelconque.

3.1.2. *Les deux problèmes de la multiaxialité de l'endommagement*

Il est important de bien distinguer deux aspects souvent confus dans les esprits :

— le premier est lié à la multiaxialité de l'état de contrainte, sous la forme du critère d'endommagement évoqué au paragraphe 2.5;

— le second est relatif à l'isotropie ou l'anisotropie de l'état actuel d'endommagement et de son évolution.

Pour illustrer le premier aspect, on peut imaginer des endommagements isotropes différents provoqués par des états de contrainte de directions différentes. Par exemple, un même matériau pourra présenter un endommagement isotrope $D = 0{,}2$ (le même pour toutes les directions matérielles) lorsqu'il est provoqué par une sollicitation de traction σ et un endommagement isotrope $D = 0{,}02$ sous un chargement de compression $-\sigma$. En d'autres termes, il ne faut pas confondre les directions de l'état de contrainte qui provoque l'endommagement avec celles, liées à la matière, qui définissent les directions d'anisotropie de l'état actuel de l'endommagement dont il va être question maintenant.

Ce second aspect peut être illustré par le cas d'un chargement radial (directions principales du tenseur des contraintes constantes) qui provoque un endommagement anisotrope à évolution isotrope; par exemple un cas de traction qui engendre :

$D = D(t)$ dans la direction matérielle parallèle à la direction de traction;
$D = \alpha D(t)$ dans les autres directions, par exemple $\alpha = 0{,}1$ dans une direction perpendiculaire.

Les propriétés d'isotropie et d'anisotropie peuvent s'appliquer de façon indépendante à l'état actuel et à l'évolution de l'endommagement.

Dans le cas du chargement radial (ou proportionnel), les directions principales du tenseur endommagement et du tenseur des contraintes coïncident. Une forme simplifiée d'équation d'évolution du dommage est alors :

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}^* \dot{D}$$

où $\mathbf{Q}^*$ est un tenseur ne dépendant que du matériau et éventuellement de la température. Toute la non-linéarité des phénomènes d'évolution est supposée contenue dans le scalaire D, vitesse de dommage, représentatif de la quantité de défauts par unité de volume, indépendamment de leur orientation.

Dans le cas général, la loi d'évolution dépend des directions principales du tenseur de contrainte effectif :

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\sigma})\, \dot{D}\,.$$

La relation entre $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\sigma})$ et $\mathbf{Q}^*$ fait intervenir les rotations permettant de passer du système principal au système de référence.

Dans ce qui suit on se limitera, soit au cas très simple de l'endommagement isotrope, soit au cas plus général étudié ci-dessus dans lequel l'anisotropie de

l'évolution ne dépend pas de l'instant considéré au cours de la vie de l'élément de volume.

3.2. Théorie de l'endommagement isotrope

3.2.1. *Potentiel thermodynamique*

On se limite au cas des matériaux endommageables présentant un comportement élastique, élastoplastique ou élastoviscoplastique (le cas de la viscoélasticité nécessiterait un traitement formel un peu différent). La variable d'endommagement est le scalaire D qui sera considéré comme une variable d'état susceptible des développements thermodynamiques décrits au chapitre 2. Avec les notations du paragraphe précédent, cela revient à considérer l'endommagement comme un tenseur sphérique $\mathbf{1}D$.

Le potentiel thermodynamique énergie libre est donc une fonction convexe de toutes les variables d'état et, en particulier, de l'endommagement

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, D, V_k)$$

V_k désignant les autres variables internes comme les variables d'écrouissage par exemple.

Comme en élastoplasticité, on peut faire l'hypothèse du découplage entre les effets d'écrouissage et autres, représentés par les variables V_k, et les effets d'élasticité associés à l'endommagement :

$$\Psi = \Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, D) + \Psi_p(T, V_k)$$

Ψ_e est le potentiel thermoélastique endommageable. On a vu au chapitre 4 que la thermoélasticité linéaire dérivait d'un potentiel quadratique en $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et T. Restant dans ce cadre, l'hypothèse fondamentale de la contrainte effective et la définition choisie pour D (voir § 3.1.1) imposent que Ψ_e en dépende linéairement :

$$\rho\Psi_e = \tfrac{1}{2}(1 - D)\,\mathbf{a} : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\,\Delta T) : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\,\Delta T) + C\,\Delta T^2 .$$

où $\mathbf{k}\,\Delta T$ représente la dilatation thermique.

La donnée de ce potentiel thermodynamique fournit la loi de thermoélasticité du matériau endommagé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\,\frac{\partial \Psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (1 - D)\,\mathbf{a} : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\,\Delta T) = \tilde{\mathbf{a}} : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\,\Delta T)$$

qui est bien de la forme :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - D} = \mathbf{a} : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\,\Delta T)$$

la variable associée à l'endommagement est le scalaire :

$$Y = \rho \frac{\partial \Psi_e}{\partial D} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\,\Delta T) : (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{k}\,\Delta T)\,.$$

Il est intéressant de noter que cette quantité s'identifie, au signe près, avec la moitié de la variation d'énergie élastique engendrée par une variation d'endommagement à contrainte et température constantes, $\mathrm{d}w_e/\mathrm{d}D)_{\sigma,T}$. Pour le montrer, calculons : $\mathrm{d}w_e = \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e$ en tirant $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e$ de l'expression $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0$ donnée par la loi de thermoélasticité, avec $\Delta T = 0$:

$$\mathrm{d}\sigma\Big)_{T=\mathrm{Cte}} = (1 - D)\,\mathbf{a} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e\,\mathrm{d}D = 0$$

$$\mathrm{d}w_e = \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \frac{\mathrm{d}D}{1 - D} = \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e\,\mathrm{d}D$$

$$\frac{\mathrm{d}w_e}{\mathrm{d}D}\Big)_{\sigma,T} = \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = a_{ijkl}\,\varepsilon^e_{ij}\,\varepsilon^e_{kl}$$

et on trouve bien le résultat annoncé :

$$\boxed{-\,Y = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}w_e}{\mathrm{d}D}\Big)_{\sigma,T}}\,.$$

$-\,Y$ prend alors le nom de taux de restitution d'énergie élastique.

Dans le cas de l'endommagement isotrope et lorsque le matériau est élastiquement isotrope, il existe ainsi une relation simple entre la variable Y associée à l'endommagement et la contrainte équivalente d'endommagement introduite au paragraphe 2.5.1

$$\boxed{-\,Y = \frac{\sigma^{*2}}{2\,E(1 - D)^2} = \frac{1}{2\,E}\tilde{\sigma}^{*2}}\,.$$

Cette relation justifie le critère du taux de restitution d'énergie élastique, en donnant un sens thermodynamique à la contrainte équivalente d'endommagement : les variables $-\,Y$ et $\tilde{\sigma}^*$ sont des variables équivalentes.

3.2.2. *Potentiel de dissipation*

Sous l'hypothèse du découplage entre dissipations mécanique et thermique, le second principe de la thermodynamique impose que la dissipation mécanique soit positive :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - Y\dot{D} - A_k\,\dot{V}_k \geqslant 0\,.$$

Le phénomène d'écoulement plastique peut intervenir sans endommagement, de même le phénomène d'endommagement peut intervenir sans écoulement plastique macroscopique appréciable; on doit donc avoir séparément :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - A_k \dot{V}_k \geqslant 0 \quad \text{et} \quad - Y\dot{D} \geqslant 0$$

$-Y$ étant une forme quadratique définie positive, le second principe impose donc $\dot{D} \geqslant 0$. L'endommagement tel qu'il a été défini ne peut donc que croître ou rester constant.

Conformément à la méthode thermodynamique phénoménologique exposée au chapitre 2, la loi d'évolution de la variable endommagement dérive d'un potentiel de dissipation dont l'existence est postulée :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{V}_k, \dot{D}, \dot{\vec{q}}; \boldsymbol{\varepsilon}^e, T, V_k, D).$$

Cette fonction convexe à valeur scalaire est fonction de toutes les variables flux, les variables observables et internes intervenant comme paramètres.

Par transformation de Legendre-Fenchel partielle, on peut construire un autre potentiel dual équivalent qui permet d'exprimer $\dot{D}$ en fonction de Y plutôt que l'inverse.

$$\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, A_k, Y, \vec{g}; \boldsymbol{\varepsilon}^e, T, V_k, D).$$

La loi de normalité généralisée qui en découle s'exprime par :

$$\dot{D} = - \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y}.$$

Sous l'hypothèse du découplage thermomécanique, φ^* se met sous la forme d'une somme de deux fonctions, l'une qui ne dépend que de $\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ et l'autre qui dépend de toutes les autres variables, si bien que $\dot{D}$ ne dépend pas de $\vec{g}$.

Le bilan des puissances dissipées peut être illustré par un cycle de contrainte de traction, sur le schéma de la figure 37, dans lequel on suppose que l'accroissement d'endommagement se produit à contrainte maximale constante.

La partie OA correspond à l'écoulement plastique pendant la charge, AB correspondant à l'écoulement plastique accompagnant le processus d'endommagement, BC représente l'accroissement de déformation élastique produit par l'accroissement de dommage. La courbe $OA'B'$ représente l'évolution de la variable d'écrouissage A_k liée à l'écoulement plastique $\delta\varepsilon_p$. L'énergie totale dissipée au cours du cycle est l'aire $OABCDO$. L'énergie dissipée plastiquement, correspondant à l'intégrale de $\sigma . \mathrm{d}\varepsilon_p$, est l'aire $OABDO$; en lui retranchant l'énergie bloquée dans les dislocations ①, intégrale de $A_k \, \mathrm{d}V_k$, on obtient l'énergie dissipée en chaleur au cours de l'écoulement. L'énergie dissipée par le processus de décohésion (éventuellement en chaleur) correspond à l'intégrale de $\Phi_D = - YD$. Elle est représentée par ③.

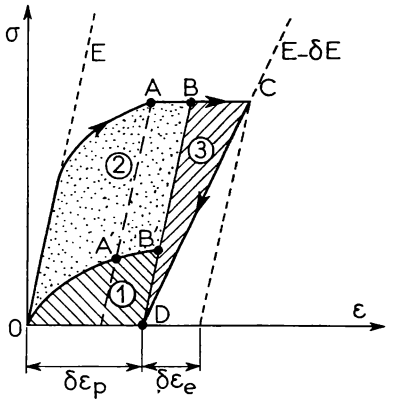


Fig. 37. Bilan des puissances dissipées en cours d'écoulement plastique et d'endommagement.

En effet, on a :

$$-Y\,\mathrm{d}D = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}w_e}{\mathrm{d}D}\Big)_\sigma \mathrm{d}D = \frac{1}{2}\sigma\frac{\mathrm{d}\varepsilon_e}{\mathrm{d}D}\Big)_\sigma \mathrm{d}D = \frac{1}{2}\sigma\,\mathrm{d}\varepsilon_e .$$

3.2.3. *Critère de rupture de l'élément de volume*

Ce qui précède justifie une définition énergétique du critère d'amorçage d'une macrofissure. La variable taux de restitution d'énergie élastique $-Y$ représente l'énergie élastique du matériau vierge équivalent (ici ΔT est posé nul) :

$$-Y = \frac{1}{2}\mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e .$$

Le critère consiste à postuler que l'amorçage d'une fissure macroscopique correspond à une valeur critique, intrinsèque à chaque matériau, de cette énergie :

$$-Y = |Y| = Y_c \quad \leftrightarrow \quad \text{rupture} .$$

Cette énergie doit être identifiée à l'énergie de décohésion de la matière qui peut être évaluée par l'essai unidimensionnel de traction.

$$-Y = \frac{1}{2}E\varepsilon_e^2$$

et en remplaçant ε_e par son expression tirée de la loi d'élasticité endommagée :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{(1-D)E}$$

$$|Y| = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{(1-D)^2 E}$$

et pour les conditions de rupture :

$$\left.\begin{aligned} |Y| &= Y_c \\ \sigma &= \sigma_u \\ D &= D_c \end{aligned}\right\} \quad Y_c = \frac{1}{2}\frac{\sigma_u^2}{E(1-D_c)^2}$$

ou

$$\boxed{D_c = 1 - \frac{\sigma_u}{(2EY_c)^{1/2}}}$$

critère qui s'identifie avec l'endommagement critique à rupture calculé au paragraphe 2.2.3 :

$$D_c = 1 - \frac{\sigma_u}{\tilde{\sigma}_u}, \qquad \tilde{\sigma}_u = (2EY_c)^{1/2}.$$

3.3. Une théorie d'endommagement anisotrope

Afin de simplifier les notations, on se limite ici au cas isotherme, $\Delta T = 0$. La théorie présentée consiste à employer conjointement le tenseur d'endommagement $\mathbf{D}$, introduit en 3.1.1, et une mesure scalaire D qui sera la trace du tenseur $\mathbf{D}$. Ces deux variables fournissent respectivement l'orientation des défauts et leur densité. L'anisotropie de la loi d'évolution est supposée ne dépendre que du matériau et des directions principales des contraintes.

3.3.1. *Potentiel thermodynamique*

L'énergie libre spécifique dépend du tenseur $\mathbf{D}$. On suppose toujours le découplage entre les effets d'écrouissage et la loi d'élasticité :

$$\Psi = \Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \mathbf{D}) + \Psi_p(T, V_k)$$

où Ψ_e dépend linéairement de l'endommagement :

$$\rho\Psi_e = \frac{1}{2}\,(\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

la loi d'élasticité s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e} = (\mathbf{1} - \mathbf{D}) : \mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \tilde{\mathbf{a}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

et la contrainte effective est :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma}.$$

La variable associée à l'endommagement s'exprime par :

$$\mathbf{Y} = \rho \frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{D}} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e)\,\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \text{ou} \quad Y_{ijkl} = -\frac{1}{2} a_{ijrs}\, \varepsilon^e_{rs}\, \varepsilon^e_{kl},$$

Si l'on introduit la trace du tenseur $\mathbf{D}$ comme mesure scalaire de dommage :

$$D = c\,\mathrm{Tr}(\mathbf{D}) = c\,\mathbf{D} :: \mathbf{1} \quad *$$

(le coefficient c sera précisé plus loin), on peut considérer que Ψ_e dépend aussi de D et l'on obtient :

$$Y = \mathrm{Tr}(\mathbf{Y}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a} : \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \rho \frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{D}} :: \mathbf{1} = \rho c \frac{\partial \Psi_e}{\partial D}.$$

On peut encore écrire ces variables en fonction des contraintes effectives :

$$-\mathbf{Y} = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\,\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{a}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$-Y = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2}\mathbf{a}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}.$$

3.3.2. *Potentiel de dissipation*

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on considère un potentiel de dissipation tel que :

$$\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, A_k, \mathbf{Y}; \boldsymbol{\varepsilon}^e, T, V_k, \mathbf{D}).$$

La loi de normalité généralisée qui en découle s'exprime par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{V}_k = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k}, \quad \dot{\mathbf{D}} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{Y}}.$$

On suppose, pour simplifier, que les processus de déformation (et d'écrouissage) et les processus d'endommagement dissipent indèpendamment. Le potentiel φ^* se décompose alors en :

$$\varphi^* = \varphi^*_p(\boldsymbol{\sigma}, A_k; V_k, T) + \varphi^*_D(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \mathbf{D}).$$

Toujours pour simplifier, le potentiel d'endommagement φ^*_D est supposé linéaire en $\mathbf{Y}$:

$$\varphi^*_D = -F(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, D)\,\mathbf{Q} :: \mathbf{Y}$$

---

* Le symbole :: désigne le produit tensoriel contracté sur quatre indices.

où $\mathbf{Q}$ est un tenseur d'ordre 4 définissant l'anisotropie de la loi de croissance de l'endommagement. Cette anisotropie, exprimée dans les axes principaux du tenseur des contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, est ainsi considérée comme constante, toute la non-linéarité des processus d'endommagement étant contenue dans la fonction F. La loi de normalité donne :

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}\, F(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \mathbf{D})\,.$$

La loi d'évolution du dommage scalaire D est obtenue en supposant que $D = c\,\mathrm{Tr}\,(\mathbf{D})$ et $Y = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{Y})$, avec $c = 1/\mathrm{Tr}\,(\mathbf{Q})$. On trouve :

$$\dot{D} = c\,\mathrm{Tr}\,(\dot{\mathbf{D}}) = -\,c\,\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{Y}}\right) = -\,c\,\frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} = F(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \mathbf{D})\,.$$

Ces lois peuvent aussi s'écrire en fonction des contraintes effectives, à l'aide de la loi d'élasticité. On utilisera dans la suite une loi de la forme :

$$\dot{D} = G(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, T, D)$$
$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}\,\dot{D}\,.$$

3.3.3. *Définition de la loi d'anisotropie*

L'inconvénient d'une théorie générale est souvent lié à la difficulté d'identification des paramètres dépendant du matériau. Afin de limiter au maximum le nombre de degrés de liberté on peut, pour définir l'opérateur $\mathbf{Q}$, se servir de solutions élémentaires, obtenues dans le cadre de l'élasticité pour des arrangements particuliers de défauts. Ainsi le cas de fissures toutes parallèles (fig. 38)

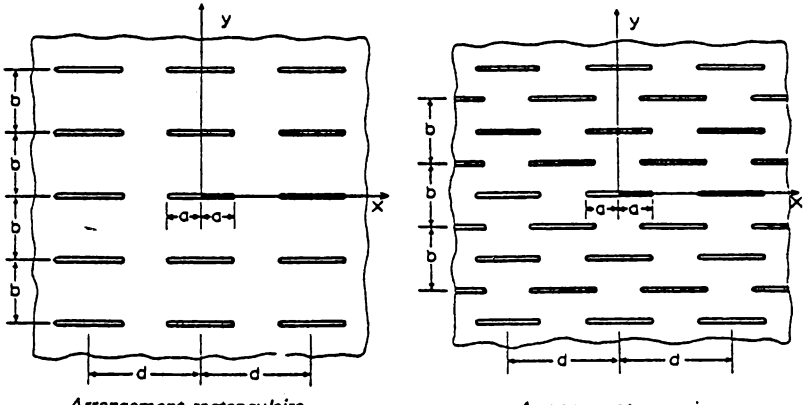


Fig. 38. Exemples de milieux bidimensionnels microfissurés calculables par homogénéisation.

peut être homogénéisé et interprété par un tenseur d'endommagement $\mathbf{D} = \mathbf{1} - \tilde{\mathbf{a}} : \mathbf{a}^{-1}$, dont la matrice représentative s'écrit :

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & & & \\ \frac{v}{1-v} D_1 & 0 & 0 & & & \\ \frac{v}{1-v} D_1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & D_5 & \\ & & & & & D_5 \end{bmatrix}$$

La symétrie du tenseur des contraintes permet de se limiter à une matrice 6×6. La direction 1 est la direction perpendiculaire au plan des fissures. Le tenseur de contrainte effective s'obtient comme au paragraphe 3.1.1 :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$$

qui s'écrit ici sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{33} \\ \tilde{\sigma}_{23} \\ \tilde{\sigma}_{31} \\ \tilde{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-D_1} & 0 & 0 & & & \\ \frac{v}{1-v}\frac{D_1}{1-D_1} & 1 & 0 & & & \\ \frac{v}{1-v}\frac{D_1}{1-D_1} & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \frac{1}{1-D_5} & \\ & & & & & \frac{1}{1-D_5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

L'étude de ce cas très particulier montre qu'il peut être décrit par deux variables d'endommagement D_1 et D_5. Si l'on admet une loi de croissance des défauts perpendiculairement à la contrainte principale maximale, il suffit de faire le choix suivant : $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Gamma}$, avec :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & & & \\ \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \xi & \\ & & & & & \xi \end{bmatrix}$$

En fait, chaque matériau est plus ou moins sensible à cet effet d'anisotropie. Une combinaison linéaire avec le cas isotrope fournit alors le moyen le plus simple de décrire tout un ensemble de cas possibles, avec seulement deux coefficients dépendants du matériau (en plus du coefficient de Poisson) :

$$\mathbf{Q} = (1 - \gamma)\,\boldsymbol{\Gamma} + \gamma \mathbf{1}\,.$$

Les deux coefficients caractéristiques sont le coefficient ξ dans l'opérateur $\boldsymbol{\Gamma}$ et le coefficient γ qui permet de traduire tous les degrés d'anisotropie : $\gamma = 1$ si le matériau est isotrope, $\gamma = 0$ dans le cas complètement anisotrope.

Il est possible de vérifier que le résultat obtenu dans le cas de la loi d'endommagement isotrope reste valable : le second principe impose que :

$$\dot{D} \geqslant 0\,.$$

La puissance dissipée dans le processus d'endommagement s'écrit :

$$\Phi_D = -\,\mathbf{Y} :: \dot{\mathbf{D}} = -\,\mathbf{Y} :: \mathbf{Q}\dot{D} = -\,[(1 - \gamma)\,\mathbf{Y} :: \boldsymbol{\Gamma} + \gamma Y]\,\dot{D}\,.$$

Le second terme du crochet est toujours négatif puisque $-\,Y$ est une forme quadratique définie positive des déformations thermoélastiques. La quantité $\mathbf{Y} :: \boldsymbol{\Gamma}$ est aussi négative comme on peut le vérifier en remplaçant $\mathbf{Y}$ par son expression en fonction des déformations.

L'anisotropie n'intervient effectivement qu'en chargement non proportionnel. Dans ce cas le tenseur dépend des directions principales de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Illustrons-le sur un exemple schématique où $\gamma = 0$ (fig. 39). Sous l'action d'un premier chargement (I) de traction, l'endommagement a évolué et les défauts sont répartis sur des plans perpendiculaires à la contrainte principale maximale $\tilde{\sigma}_1$. On a :

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{Q} D_1\,.$$

Si l'on applique maintenant une traction équibiaxiale ($\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3 = 0$), la contrainte principale maximale effective reste $\tilde{\sigma}_1 > \tilde{\sigma}_2$. Les défauts évoluent toujours dans le même plan (partie II). Si l'on applique une traction suivant 2 ($\sigma_1 = \sigma_3 = 0$), la contrainte principale maximale effective devient $\tilde{\sigma}_2$ et l'évolution ultérieure des défauts se fait dans le plan perpendiculaire. On écrira donc (cas III) :

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1 + \mathbf{Q}_2 D_2 = \mathbf{Q} D_1 + \mathbf{V} : \mathbf{Q} : \mathbf{V}^T D_2$$

avec

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}$$

où $\mathbf{R}$ désigne l'opérateur de rotation entre les axes 1 et 2. Après un certain temps, il y aura superposition de deux systèmes de défauts perpendiculaires ; lorsque $D_1 = D_2$ l'anisotropie sera fortement diminuée, les directions 1 et 2 ayant le même comportement et de faibles variations seulement pour les directions intermédiaires. Cela illustre bien le fait que l'anisotropie est une

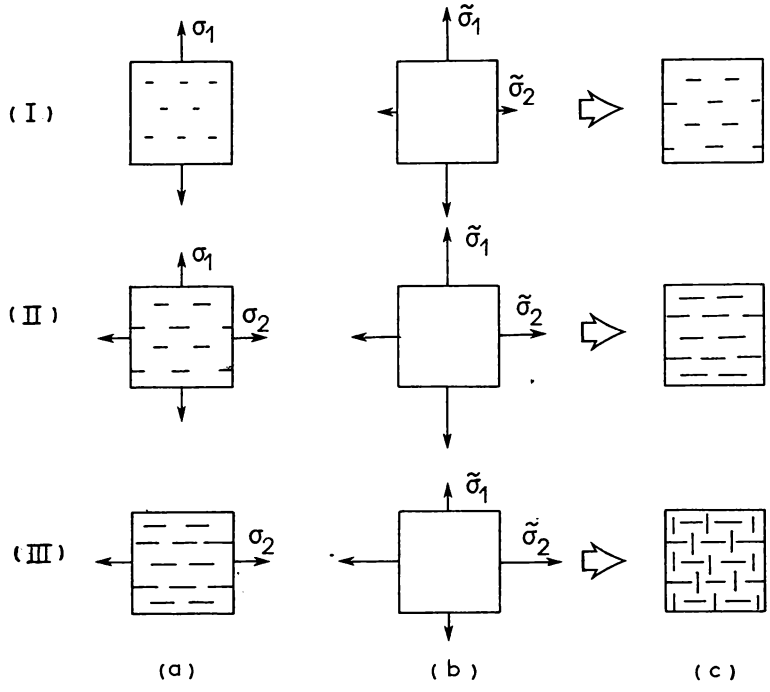


Fig. 39. Schéma du dommage anisotrope sous chargement complexe. (*a*) chargement appliqué, (*b*) contraintes effectives correspondantes, (*c*) dommage résultant de ce chargement.

caractéristique de la loi d'évolution du dommage et non une caractéristique de son état actuel. Notons que le choix de l'expression $\mathbf{D} = \mathbf{Q}D$ implique qu'en traction simple (direction 1) la première composante de $\mathbf{D}$ est toujours égale à D.

4. MODÈLES PARTICULIERS

Les modèles isotropes décrits ci-dessous supposent qu'il n'y a pas couplage entre l'endommagement et les autres phénomènes dissipatifs. La loi d'évolution de la variable D ne dépend pas des autres variables internes, ce qui interdit la prise en compte de certains phénomènes comme, par exemple, l'augmentation de la durée de vie en fatigue provoquée par une prédéformation. Pour rendre compte de ce phénomène particulier, il suffit d'introduire les variables d'écrouissage dans la loi d'endommagement. Cela est possible avec le formalisme décrit au paragraphe 3, mais complexe !

4.1. Endommagement plastique ductile

L'endommagement plastique ductile accompagne les grandes déformations plastiques et, comme la plasticité, il est indépendant de la vitesse de chargement et ne fait pas intervenir le temps d'une manière explicite. Si, par ailleurs, on se restreint au cas de l'endommagement et de l'écrouissage isotropes, la seule variable interne à faire intervenir en plus de l'endommagement est la déformation plastique cumulée définie par (voir chap. 5) :

$$\dot{p} = (\tfrac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^{1/2} .$$

Les deux modèles d'endommagement décrits ci-dessous dérivent d'un potentiel de dissipation construit avec :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R, D) \quad \text{et} \quad \varphi_D^*(Y ; T, D) .$$

La prise en compte du couplage entre plasticité et endommagement est étudiée en détail au paragraphe 5.2.2. Utilisons ici la fonction de charge sous la forme :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, R, D) = \frac{\sigma_{eq}}{1 - D} - R - k \leqslant 0 .$$

Le potentiel d'endommagement est choisi en fonction puissance de $-Y$:

$$\varphi_D^* = \frac{S_0}{s_0 + 1} \frac{1}{1 - D} \left(- \frac{Y}{S_0} \right)^{s_0 + 1}$$

où s_0 et S_0 sont des coefficients caractéristiques de chaque matériau et fonctions de la température. L'application de la méthode générale donne alors :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} , \quad \dot{p} = \left(\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right)^{1/2} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - D}$$

$$\dot{D} = - \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} \left(- \frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} ,$$

$$\dot{D} = \left(- \frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} \dot{p} .$$

4.1.1. *Modèle unidimensionnel en contrainte*

La variable associée Y et la contrainte équivalente $\tilde{\sigma}^*$ sont des variables équivalentes, on l'a vu au paragraphe 3.2 :

$$- Y = \frac{1}{2E} \tilde{\sigma}^{*2} .$$

Par ailleurs, en chargement unidimensionnel monotone croissant, et c'est l'hypothèse que nous ferons concernant le domaine de validité de ce modèle, $\tilde{\sigma}^*$ s'identifie avec la contrainte effective $\tilde{\sigma}$ et $\dot{p}$ avec la vitesse de déformation plastique $|\dot{\varepsilon}_p|$. Il est donc équivalent d'écrire :

$$\dot{D} = \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{2ES_0}\right)^{s_0} |\dot{\varepsilon}_p| .$$

Pour retrouver un modèle proposé à l'origine d'après des considérations phénoménologiques, il faut encore remplacer $\dot{\varepsilon}_p$ par son expression tirée de la loi d'écrouissage introduite au paragraphe 4.2.1.1 du chapitre 5 et écrite ici avec la contrainte effective et $\sigma_Y = 0$:

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\tilde{\sigma}}{K}\right)^M \quad \text{ou} \quad \dot{\varepsilon}_p = \frac{M}{K}\left(\frac{\tilde{\sigma}}{K}\right)^{M-1} \dot{\tilde{\sigma}} .$$

Après un changement évident de notation des constantes :

$$\dot{D} = \left(\frac{\tilde{\sigma}}{S_1}\right)^{s_1} \frac{\dot{\tilde{\sigma}}}{S_1} \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}D = \left(\frac{\tilde{\sigma}}{S_1}\right)^{s_1} \frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}}{S_1} .$$

Une forme voisine, plus proche des résultats expérimentaux puisqu'elle introduit un seuil d'endommagement σ_D, est la suivante :

$$\boxed{\mathrm{d}D = \left\langle \frac{\sigma - \sigma_D}{(1-D)S} \right\rangle^s \frac{\mathrm{d}\sigma}{S}}$$

Le potentiel φ^* correspondant n'a pas de forme explicite. Les trois coefficients caractéristiques de l'endommagement de plasticité ductile, éventuellement fonction de la température, se déterminent par identification avec des mesures d'endommagement effectuées, par exemple, à l'aide de la méthode de variation du module d'élasticité décrite au paragraphe 2.3.1.

L'intégration de cette équation différentielle donne la valeur de l'endommagement pour toute valeur de la contrainte. Avec la condition initiale $\sigma = \sigma_D \rightarrow D = 0$, on trouve :

$$D = 1 - \left(1 - \left\langle \frac{\sigma - \sigma_D}{S} \right\rangle^{s+1}\right)^{\frac{1}{s+1}} .$$

La rupture ductile finale intervient pour :

$$D = D_c \quad \text{ou} \quad \sigma = \sigma_R .$$

L'identification des coefficients caractéristiques de l'endommagement ductile peut se faire par mesure des variations de module d'élasticité lors d'essais d'écrouissage.

Exemples :

— Cuivre Cu/al, $T = 20\ ^{o}C$: $\sigma_D = 330$ MPa, $S = 445$ MPa, $s = 0{,}70$, $D_c = 0{,}85$.

— Alliage AU 4 GT_4, $T = 20\ ^{o}C$: $\sigma_D = 400$ MPa, $S = 580$ MPa, $s = 0{,}58$, $D_c = 0{,}23$.

4.1.2. *Modèle tridimensionnel en déformation*

A partir du même potentiel de dissipation, on peut développer un modèle tridimensionnel valable en chargement quelconque dans le cadre des hypothèses d'isotropie d'endommagement et d'isotropie d'écrouissage :

$$\dot{D} = -\dot{\lambda}\frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y} = \left(\frac{-Y}{S_0}\right)^{s_0}\dot{p}.$$

Remplaçons $-Y$ par son expression en fonction de la contrainte équivalente de Von Mises σ_{eq} et de la contrainte hydrostatique σ_H (§§ 2.5.1 et 3.2.1).

$$-Y = \frac{\tilde{\sigma}^{*2}}{2E} = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2}\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2\right].$$

L'endommagement ductile n'intervient qu'au-delà d'un seuil (voir § 2.4.1). On peut alors considérer que l'écrouissage est saturé dans ce domaine, c'est-à-dire que le comportement du matériau non endommagé équivalent serait parfaitement plastique. Cette hypothèse simplificatrice permet l'intégration analytique du modèle et d'aboutir à une évolution linéaire en fonction de la déformation plastique.

L'expression du critère d'écoulement $\dfrac{\sigma_{eq}}{1-D} - R - k = 0$ montre alors que :

$$\frac{\sigma_{cq}}{1-D} = \tilde{\sigma}_{cq} = K = \text{Cte}$$

d'où :

$$\boxed{\dot{D} = \left(\frac{K^2}{2ES_0}\right)^{s_0}\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2\right]^{s_0}\dot{p}}.$$

L'évolution de l'endommagement en fonction de p s'obtient par intégration de cette équation différentielle avec la condition initiale $p \leqslant p_D \rightarrow D = 0$, p_D étant le seuil d'endommagement en déformation.

Si l'on se restreint au cas du chargement radial pour lequel le rapport de triaxialité σ_H/σ_{eq} est constant, on obtient :

$$D = \left(\frac{K^2}{2\,ES_0}\right)^{s_0} \left[\frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\,\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2\right]^{s_0} \langle p - p_D \rangle .$$

On peut simplifier cette expression en introduisant la condition de rupture

$$p = p_R \rightarrow \quad D = D_c$$

où p_R est la déformation cumulée à rupture. D_c étant une constante propre à chaque matériau, p_R dépend du rapport de triaxialité σ_H/σ_{eq}

$$D_c = \left(\frac{K^2}{2\,ES_0}\right)^{s_0} \left[\frac{2}{3}(1+\nu)+3(1-2\,\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2\right]^{s_0} (p_R - p_D)$$

En reportant dans l'expression de D, on obtient :

$$D = D_c \left\langle \frac{p - p_D}{p_R - p_D} \right\rangle .$$

Cette expression généralise au cas tridimensionnel le modèle empirique du paragraphe 2.4.1, à cette différence près que p_R et p_D sont fonctions du rapport de triaxialité. De l'expression de D_c on tire :

$$p_R - p_D = D_c \left(\frac{K^2}{2\,ES_0}\left[\frac{2}{3}(1+\nu)+3(1-2\,\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2\right]\right)^{-s_0} .$$

En supposant que la triaxialité des contraintes agit de la même manière sur le seuil d'endommagement p_D et sur la déformation à rupture p_R le rapport p_D/p_R est constant pour chaque matériau et égal à sa valeur en unidimensionnel $\varepsilon_D/\varepsilon_R$, en confondant déformations totale et plastique. Le modèle ne fait intervenir que deux constantes D_c et $\varepsilon_D/\varepsilon_R$, et une fonction p_R que l'on peut encore exprimer en fonction de la déformation à rupture unidimensionnelle ε_R qui correspond à un rapport de triaxialité $\dfrac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} = \dfrac{1}{3}$:

$$p_R\left(\frac{1}{3}\right) = \varepsilon_R = \left(\frac{2\,ES_0}{K^2}\right)^{s_0} \frac{D_c}{1 - \varepsilon_D/\varepsilon_R}$$

$$p_R\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) = \varepsilon_R \left[\frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\,\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2\right]^{-s_0} .$$

Si l'on compare les valeurs numériques données par cette expression avec celles qui résultent de l'application des modèles de croissance de cavités de Mac Clintock, Rice et Tracey on voit que $s_0 = 1$ constitue la meilleure identification, d'ailleurs confirmée par le modèle unidimensionnel en contrainte.

En résumé, le modèle d'endommagement plastique ductile tridimensionnel en déformation est le suivant :

Sous forme différentielle	$\dot{D} = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D}\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2\right]\dot{p}$
Sous forme intégrée	$D \simeq \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D}\left(p\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2\right] - \varepsilon_D\right)$

Les trois constantes intrinsèques à chaque matériau se déterminent par des essais unidimensionnels et sont celles qui figurent dans le tableau 10 du paragraphe 2.4.1.

4.2. Endommagement de fluage

La loi d'endommagement de fluage couramment utilisée est celle décrite au paragraphe 2.4.2. Les relations développées ci-dessous correspondent à des généralisations, pour des chargements complexes :

— contrainte variable,
— chargement multiaxial mais proportionnel,
— chargement multiaxial non proportionnel.

4.2.1. *Modèle de cumulation non linéaire*

Une forme qui améliore la loi de Kachanov en introduisant un coefficient supplémentaire k a été proposée par Rabotnov :

$$\dot{D} = \left(\frac{\sigma}{A}\right)^r (1 - D)^{-k}.$$

Elle contient toujours la règle de cumulation linéaire et en général k est supérieur à r : l'influence de l'endommagement est plus forte sur la vitesse de progression du dommage que sur le comportement mécanique global. L'intégration de cette loi, pour un essai à contrainte constante, donne :

$$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{\frac{1}{k+1}} \quad \text{avec} \quad t_c = \frac{1}{k+1}\left(\frac{\sigma}{A}\right)^{-r}.$$

Le tableau 12 donne des valeurs des coefficients $r, k, A = A_0\left(\frac{k+1}{r+1}\right)^{1/r}$. La figure 7 montre la corrélation avec les mesures de dommage faites sur deux matériaux. Elle montre aussi que ces courbes peuvent dépendre du niveau de

contrainte (cas de l'alliage IN 100) ce qui est cohérent avec l'existence d'effets de cumulation non linéaire et conduit à utiliser la généralisation suivante :

$$\dot{D} = \left(\frac{\sigma}{A}\right)^{r} (1 - D)^{-k(\sigma)} .$$

L'exposant k dépendant du niveau de contrainte, les deux variables σ et D ne sont plus séparables. Aucune justification théorique ne vient étayer l'introduction d'une telle fonction $k(\sigma)$ si ce n'est la certitude qu'il s'agit de l'un des moyens les plus simples d'emploi pour rendre compte de la non-linéarité de la cumulation.

Des valeurs discrètes de la fonction $k(\sigma)$ sont déterminées par identification avec l'évolution de l'endommagement mesuré en fluage sous contrainte constante. En effet, les courbes d'évolution de D en fonction de t/t_c, obtenues par intégration entre 0 et D, dépendent de σ :

$$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{\frac{1}{k(\sigma)+1}} \qquad t_c = \frac{1}{k(\sigma) + 1} \left(\frac{\sigma}{A}\right)^{-r} .$$

La fonction $k(\sigma)$ est croissante car les évolutions de dommage sont plus rapides pour les niveaux de contrainte faibles (figs. 7 et 40), ce qui est confirmé par les résultats d'essais à deux niveaux. La loi traduit bien l'effet de cumulation non linéaire : en intégrant au premier niveau entre 0 et D_1, puis au second entre D_1 et 1, on trouve (fig. 41) :

$$\frac{t_2}{t_{c_2}} = \left(1 - \frac{t_1}{t_{c_1}}\right)^{\frac{k(\sigma_2)+1}{k(\sigma_1)+1}} .$$

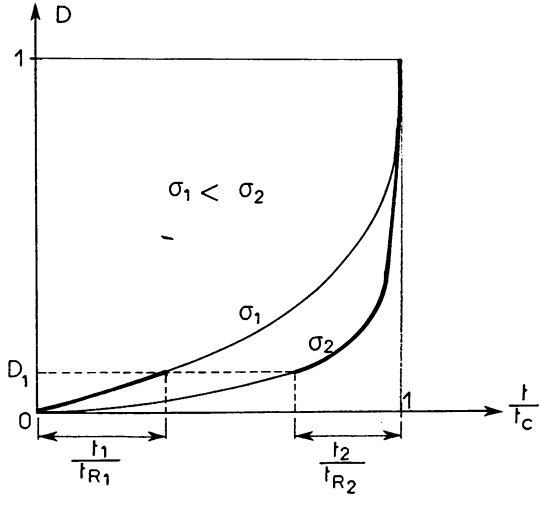


Fig. 40. Evolution schématique du cumul non linéaire dans les essais de fluage à deux niveaux.

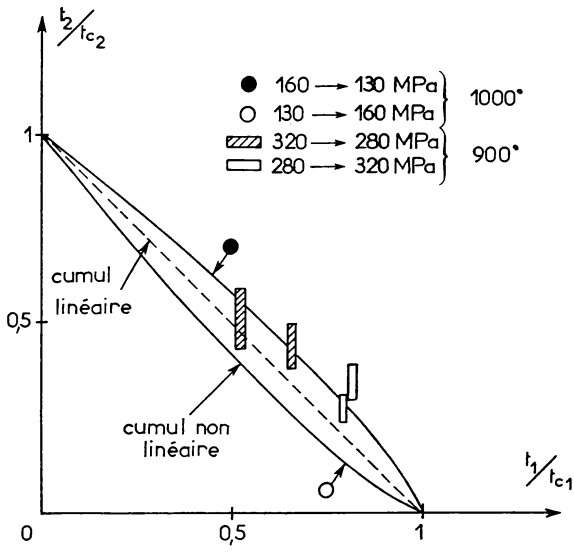


Fig. 41. Exemple de prévision par le modèle d'endommagement pour l'alliage réfractaire IN 100.

Ce qui précède s'applique au fluage en traction ; peu d'études ont été faites à propos de l'endommagement de fluage en compression : la rupture n'est jamais observée, elle est précédée par une instabilité d'origine géométrique. Rien ne prouve cependant que cet endommagement n'existe pas ou que l'influence de la compression ne se fasse pas sentir dans un sens dommageable sur la traction ultérieure.

4.2.2. *Modèle tridimensionnel isotrope*

Le domaine de validité de ce modèle est celui des chargements quasi proportionnels. Si tel n'est pas le cas, il faut envisager de tenir compte des effets d'anisotropie de l'endommagement tels qu'indiqués au paragraphe suivant.

L'écriture d'une loi tridimensionnelle ne nécessite donc que l'utilisation d'une contrainte équivalente au sens de l'endommagement de fluage. Suivant le matériau, on pourra utiliser l'un des critères décrits au paragraphe 2.5 qui permettent de décrire les surfaces isochrones de rupture dans l'espace des contraintes (surfaces reliant les états de contrainte qui provoquent le même temps à rupture en fluage) :

— le critère du taux de restitution d'énergie élastique :

$$\sigma^* = \sigma_{eq}\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2\right]^{1/2},$$

— le critère du coefficient de sensibilité cisaillement-dilatation :

$$\sigma_\beta^* = (1-\beta)\,\sigma_{eq} + 3\,\beta\sigma_H\,.$$

— le critère plus général qui introduit une combinaison des trois invariants élémentaires :

$$\chi(\boldsymbol{\sigma}) = \alpha J_0(\boldsymbol{\sigma}) + \beta J_1(\boldsymbol{\sigma}) + (1 - \alpha - \beta) J_2(\boldsymbol{\sigma})$$

où $J_1(\boldsymbol{\sigma}) = 3\,\sigma_H$, $J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq}$ et $J_0(\boldsymbol{\sigma})$ désigne la contrainte principale maximale.

Pour le cas isotrope la variable d'endommagement se réduit à un scalaire

$$\mathbf{D} = \mathbf{1}\, D$$

et la contrainte effective s'exprime par :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - D}.$$

L'écriture de la loi tridimensionnelle d'évolution de l'endommagement est la suivante :

$$\dot{D} = \left\langle \frac{\chi(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}{A} \right\rangle^r (1 - D)^{r-k}.$$

Si $r = k$, on obtient la loi de Kachanov. Dans le cas de la traction simple, on retrouve exactement les expressions du paragraphe précédent. Si l'exposant dépend de la contrainte, on peut choisir l'expression suivante :

$$\boxed{\dot{D} = \left\langle \frac{\chi(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}{A} \right\rangle^r (1 - D)^{r - k\langle \chi(\boldsymbol{\sigma}) \rangle}}.$$

Notons que cette loi peut encore s'écrire :

$$\dot{D} = \left\langle \frac{\chi(\boldsymbol{\sigma})}{A} \right\rangle^r (1 - D)^{-k\langle \chi(\boldsymbol{\sigma}) \rangle} \quad \text{ou} \quad \dot{D} = \left\langle \frac{\chi(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}{A} \right\rangle^{k\langle \chi(\boldsymbol{\sigma}) \rangle} \left[\frac{\chi(\boldsymbol{\sigma})}{A} \right]^{r - k\langle \chi(\boldsymbol{\sigma}) \rangle}.$$

Le symbole $\langle x \rangle$ désigne comme d'habitude la partie positive de x : en effet, $\chi(\boldsymbol{\sigma})$ peut être négatif pour certains états de contraintes, suivant la valeur des coefficients α et β. L'endommagement est alors nul et il n'y a pas de surface isochrone passant par ces points.

4.2.3. *Modèle d'endommagement anisotrope*

Conformément à la théorie introduite au paragraphe 3.3, une façon simple de tenir compte de l'anisotropie du dommage (déjà créé) dans la loi d'endommagement (évolution ultérieure) consiste à admettre une décomposition multiplicative du taux de croissance du tenseur D :

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}\dot{D} = [(1 - \gamma)\,\boldsymbol{\Gamma} + \gamma\,\mathbf{1}]\,\dot{D}.$$

La partie anisotrope est contenue dans le tenseur **Q**. Elle ne joue un rôle, rappelons-le, qu'en cas de chargement non proportionnel. L'effet d'anisotropie est ainsi considéré comme fixe par rapport aux directions principales actuelles du tenseur des contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ (voir § 3.3.3). La non-linéarité du processus d'évolution de l'endommagement est entièrement contenue dans l'équation gouvernant D et l'on peut choisir, comme dans le cas isotrope :

$$\dot{D} = \left\langle \frac{\chi^*(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, D)}{A} \right\rangle^{k\langle \chi(\boldsymbol{\sigma}) \rangle} \left(\frac{\chi(\boldsymbol{\sigma})}{A} \right)^{r - k\langle \chi(\boldsymbol{\sigma}) \rangle}$$

où la contrainte équivalente effective dépend de D :

$$\chi^*(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, D) = \alpha J_0(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{\beta}{1 + 2A} J_1(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1 - \alpha - \beta}{1 - A} J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$$

avec $A = \dfrac{\nu}{1 - \nu} \dfrac{(1 - \gamma) D}{1 - \gamma D}$. Ce changement de l'expression de cette contrainte équivalente est introduit afin de retrouver la loi de Kachanov dans le cas de la traction simple. En effet, la première composante du tenseur **D** est égale à D et on a alors :

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{1 - D}$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \frac{\nu(1 - \gamma)}{1 - \nu} \frac{D}{1 - \gamma D} \frac{\sigma_1}{1 - D} = \tilde{\sigma}_3 .$$

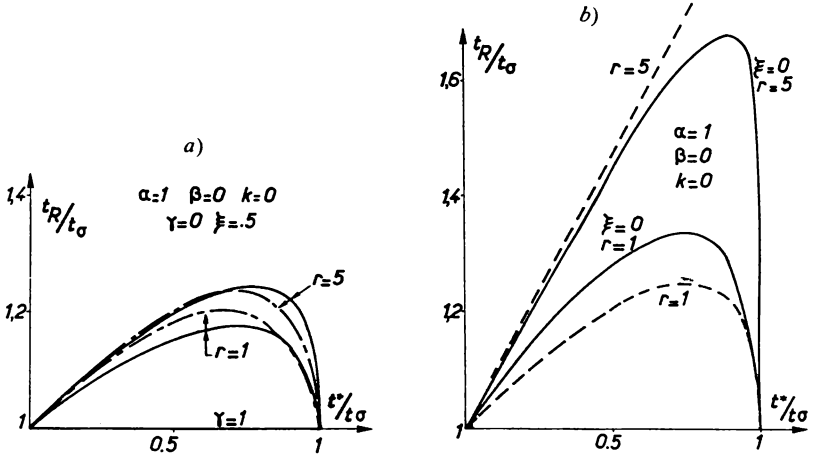


Fig. 42. Calcul du temps à rupture total pour le fluage en traction puis torsion. (*a*) $\xi = 0{,}5$, (*b*) $\xi = 0$, —·—·— théorie de Murakami, ------ théorie de Kachanov.

Le modèle tridimensionnel anisotrope s'identifie donc complètement d'après le modèle unidimensionnel et les coefficients ξ et γ qui fixent l'anisotropie (en plus de ν). Dans le cas isotrope ($\gamma = 1$) on retrouve $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_3 = 0$ et les expressions du paragraphe précédent.

Cette formulation englobe donc les deux cas limites (isotrope et purement anisotrope) et les cas intermédiaires (par combinaison linéaire), elle s'applique dans le cas d'un chargement non proportionnel quelconque et permet de rendre compte des effets d'anisotropie du dommage sur la loi d'endommagement et sur le comportement (par la contrainte effective établie au § 3.1.1).

Elle a été appliquée au cas du fluage en traction suivi d'un fluage en torsion. Les figures 42*a* et 42*b* montrent quelques exemples de prévision du temps à rupture total (rapporté au temps à rupture de référence en traction) en fonction du temps passé en traction. Plusieurs valeurs des coefficients sont utilisées et les théories de Murakami et de Kachanov ont été reportées pour comparaison.

4.3. Endommagement de fatigue

4.3.1. *Définition du dommage par cycle*

La théorie générale du paragraphe 3 utilise le temps comme variable repère et les accroissements des dommages sont écrits en fonction des accroissements de temps, de déformation ou de contrainte. Dans le cas de la fatigue, on emploie le plus souvent la notion de cycle de chargement pour repérer l'évolution du dommage et mesurer la durée de vie. Les équations dépendent alors du chargement à travers des quantités définies globalement sur un cycle, telles qu'amplitude, valeur maximale, valeur moyenne.

On se contente donc d'imaginer une intégration formelle, au cours de chaque cycle, d'une loi d'évolution similaire à celles employées pour l'endommagement plastique ductile. L'équation d'évolution du dommage de fatigue est donc prise sous la forme :

$$\delta D = f(...)\, \delta N$$

dans laquelle les variables dont dépend la fonction f sont :

— les valeurs en début de cycle pour les variables d'état (la température, le dommage D et les variables d'écrouissage),

— la valeur maximale et la valeur moyenne sur le cycle des paramètres définissant le chargement (contrainte, déformation ou déformation plastique).

Un problème particulier se pose pour traduire l'influence de la température lorsque celle-ci évolue au cours du cycle. Ce cas est étudié au paragraphe 4.3.4.

Les équations d'endommagement de fatigue obéissant à la règle de cumul linéaire ont été discutées en tant que lois élémentaires (§ 2.4.3). Au contraire, la loi étudiée ci-dessous permet de décrire les effets de cumul non linéaire en cas de chargements cycliques non périodiques.

4.3.2. *Modèle unidimensionnel*

Il s'écrit à partir de la définition macroscopique du dommage, en faisant référence à deux types d'évaluation :

1) évaluation du dommage au travers de la durée de vie restante,
2) évaluation du dommage par le concept de contrainte effective.

Examinons d'abord la construction d'un modèle basé sur la durée de vie restante. Les essais de fatigue à deux niveaux ($\Delta\sigma_1$ pendant N_1 cycles suivi de $\Delta\sigma_2$ pendant N_2 cycles avec $N_1 + N_2 = N_R$ nombre de cycles à rupture) démontrent la non-linéarité du cumul des dommages et fournissent une mesure indirecte de l'état actuel d'endommagement à partir de la durée de vie restante N_2/N_{F_2}. Ces mesures sont suffisantes pour prouver que les courbes d'évolution du dommage en fonction de la fraction de vie N/N_F dépendent du niveau de sollicitation, comme l'illustre la figure 43*a* : la vie restante au second niveau N_2/N_{F_2} est alors différente de $1 - N_1/N_{F_1}$, valeur donnée par la règle de cumul linéaire.

Une façon simple d'introduire de tels effets dans l'équation d'évolution du dommage consiste à rendre non séparables les variables de chargement et la variable dommage. Par exemple on peut prendre :

$$\delta D = D^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \cdot \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{C(\bar{\sigma})} \right)^{\beta} \delta N .$$

L'exposant α dépend du chargement $(\sigma_M, \bar{\sigma})$, ce qui entraîne la non-séparabilité. Notons qu'une équation similaire à celle utilisée pour l'endommagement de fluage ne convient pas en raison d'une inversion des effets de cumul : en fatigue, la durée de vie au second niveau est plus faible que ne le prévoit la règle linéaire, lorsque le premier chargement est le plus élevé.

Intégrée entre $D = 0$ et $D = 1$, l'équation ci-dessus fournit le nombre de cycles à rupture :

$$N_F = \frac{1}{1 - \alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{C(\bar{\sigma})} \right)^{-\beta}$$

D évolue en fonction de N/N_F et, dans un essai à deux niveaux, la durée de vie au second niveau s'obtient par :

$$\frac{N_2}{N_{F_2}} = 1 - \left(\frac{N_1}{N_{F_1}} \right)^{\eta} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} = \frac{1 - \alpha(\sigma_{M_2}, \bar{\sigma}_2)}{1 - \alpha(\sigma_{M_1}, \bar{\sigma}_1)} .$$

Cette formulation permet de décrire quantitativement la plupart des résultats d'essais à plusieurs niveaux, sur de nombreux matériaux. L'évaluation de D au travers de la durée de vie restante n'est cependant pas suffisante pour fixer totalement sa valeur à chaque instant. Il suffit pour s'en convaincre d'examiner la figure 43 : un simple changement de variable montre en effet

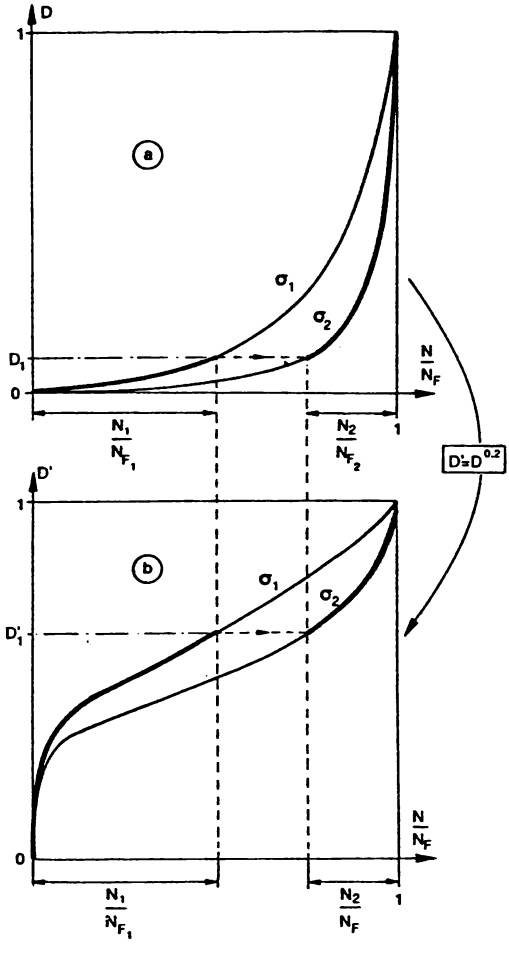


Fig. 43. Cumul non linéaire en fatigue et indétermination partielle du dommage mesuré par la durée de vie restante.

que la durée de vie peut être identique pour tout chargement, alors que la valeur du dommage est différente. Autrement dit, le concept de durée de vie restante ne fournit qu'une évaluation relative de l'endommagement.

Pour lever cette indétermination, on utilise le second type d'évaluation. Le concept de contrainte effective appliqué à la fatigue fournit une mesure indirecte, comme on l'a vu au paragraphe 2.3. Les évolutions mesurées sont extrêmement non linéaires comme le montre la figure 6. Par ce concept, le dommage n'est vraiment mesurable que dans les derniers stades de la durée de vie, lorsque des amorçages microscopiques se sont déjà produits (c'est la phase de micropropagation des défauts).

Pour combiner cette évaluation avec celle correspondant à la « durée de vie restante » il suffit d'un changement de variable, qui remplace D dans l'équation précédente par :

$$1 - (1 - D)^{\beta+1}.$$

La loi différentielle s'écrit alors :

$$\delta D = \left[1 - (1 - D)^{\beta+1}\right]^{\alpha(\sigma_M, \sigma)} \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})(1 - D)}\right]^{\beta} \delta N \,.$$

La forme est plus complexe mais ses propriétés sont identiques à celles de l'équation précédente, hormis la valeur actuelle du dommage. Le nombre de cycles à rupture obtenu par intégration s'écrit :

$$N_F = \frac{1}{(\beta + 1)\left[1 - \alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})\right]} \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})}\right)^{-\beta}$$

et l'on voit que $M(\bar{\sigma}) = C(\bar{\sigma})(\beta + 1)^{1/\beta}$. Le dommage en fonction de N/N_F s'exprime par :

$$D = 1 - \left[1 - \left(\frac{N}{N_F}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Les courbes calculées de la figure 6 montrent que cette expression s'adapte bien aux résultats des mesures. Il faut encore choisir les fonctions α et M de façon à rendre compte à la fois des limites de fatigue, de la rupture statique (en 1 cycle) et des effets de cumul non linéaire :

$$\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma}) = 1 - a \left\langle \frac{\sigma_M - \sigma_l(\bar{\sigma})}{\sigma_u - \sigma_M} \right\rangle$$

$$\sigma_l(\bar{\sigma}) = \sigma_{l_0} + (1 - b\sigma_{l_0})\bar{\sigma}$$

$$M(\bar{\sigma}) = M_0(1 - b\bar{\sigma})$$

où σ_{l_0} est la limite de fatigue à contrainte moyenne nulle, σ_u la contrainte de rupture statique. Le choix d'une relation linéaire pour exprimer l'influence de $\bar{\sigma}$ est justifié par les observations expérimentales sur la limite de fatigue. Des exemples de corrélation avec les courbes de Woehler ont été montrés sur la figure 15 (les coefficients β et M_0 sont déterminés à partir de ces courbes expérimentales).

Le coefficient a ne peut être identifié qu'à partir des mesures de dommage mentionnées ci-dessus (fig. 6), mais le choix de la valeur de a n'a d'importance que dans le cas où le dommage de fatigue est combiné avec un autre type de dommage (de fluage par exemple). En fatigue pure, tous les chargements peuvent être décrits en donnant à a une valeur arbitraire. La relation entre B_0 et M_0 du tableau 17 est : $M_0 = B_0[a(\beta + 1)]^{1/\beta}$.

Les essais à deux niveaux sont décrits par les mêmes relations que précédemment. La durée de vie restante au second niveau est :

$$\frac{N_2}{N_{F_2}} = 1 - \left(\frac{N_1}{N_{F_1}}\right)^{\eta} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} = \frac{\sigma_{M_2} - \sigma_I(\bar{\sigma}_2)}{\sigma_{M_1} - \sigma_I(\bar{\sigma}_1)} \cdot \frac{\sigma_u - \sigma_{M_1}}{\sigma_u - \sigma_{M_2}}$$

Des résultats expérimentaux sur de nombreux matériaux montrent des corrélations correctes, à température ambiante ou à haute température (fig. 44). Ces effets de cumul non linéaire sont peu différents de ceux décrits par des équations utilisées par Subramanyan et par Manson. La même relation gouverne N_2/N_{F_2}, avec respectivement (fig. 45, d'après tabl. 17) :

$$\eta = \frac{\sigma_{M_2} - \sigma_I}{\sigma_{M_1} - \sigma_I} \quad \text{et} \quad \eta = \left(\frac{N_{F_1}}{N_{F_2}}\right)^{0,45}.$$

4.3.3. *Extension au cas tridimensionnel*

Le principe de généralisation au cas tridimensionnel du modèle précédent consiste à utiliser simultanément :

— la loi unidimensionnelle qui permet de décrire correctement l'évolution de l'endommagement en traction et, par suite, les effets de cumulation non linéaire,

— les critères tridimensionnels de limite de fatigue qui constituent un guide pour le choix des invariants significatifs à utiliser dans la loi : nous choisissons ici le critère de Sines, mais une formulation analogue pourrait être établie avec le critère de Crossland ou avec celui de Dang Van (voir § 2.5.4),

— l'anisotropie de la loi d'endommagement, avec une méthode similaire à celle utilisée en fluage.

Dans la loi unidimensionnelle, c'est la fonction α qui permet d'introduire la limite de fatigue, avec le terme $\sigma_M - \sigma_I(\bar{\sigma})$, qui peut encore se mettre sous la forme $\sigma_a - \sigma_{aI}(\bar{\sigma})$. En tridimensionnel un cycle de contrainte correspondant à une durée de vie illimitée est tel que :

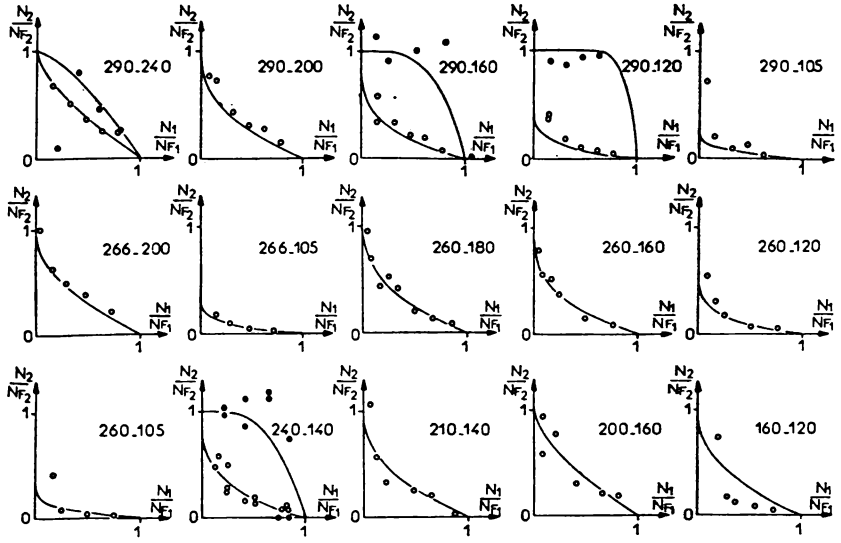
$$A_{II} \leqslant A_{II}^{*}(\bar{\sigma}_H) = \sigma_I(1 - 3\, b\bar{\sigma}_H)$$

avec

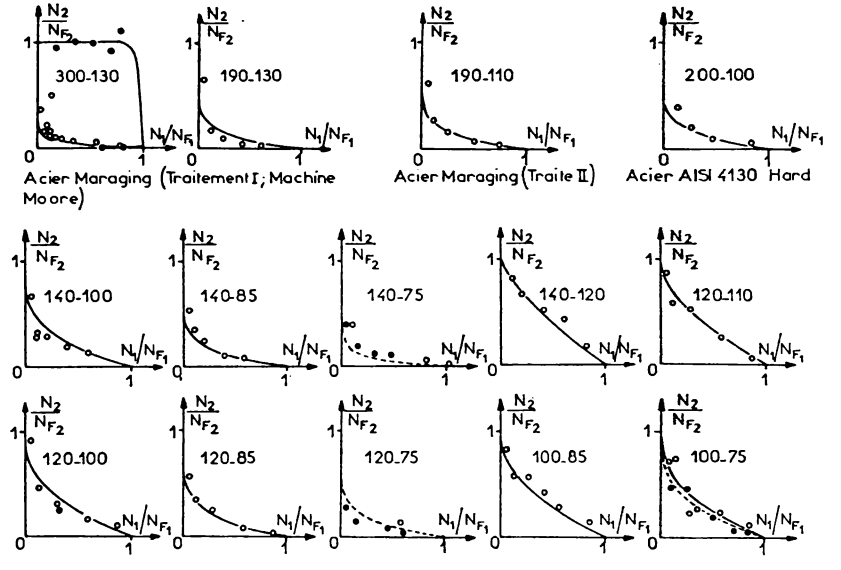
$$A_{II} = \tfrac{1}{2} \operatorname*{Max}_{t_0} \operatorname*{Max}_{t} J_2(\boldsymbol{\sigma}(t) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t_0)).$$

De même, la rupture statique est décrite par le critère de Von Mises (par exemple) en remplaçant $\sigma_u - \sigma_M$ dans la fonction α par $\sigma_u - \sigma_{eq\,M}$ où $\sigma_{eq\,M}$ est la valeur maximale au cours du cycle du second invariant de $\boldsymbol{\sigma}$:

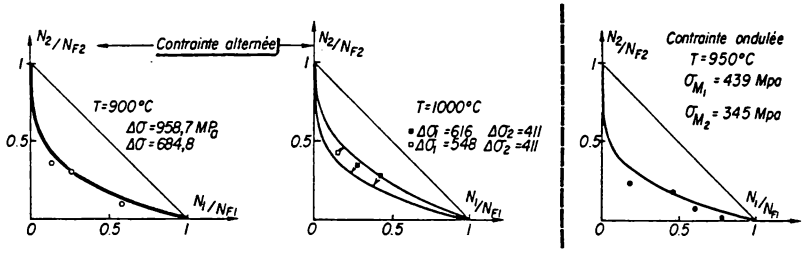
$$\sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}$$



— **Acier Maraging (traitement I; machine Krouse). Les amplitudes sont indiquées en ksi.**
○ **Niveau élevé d'abord;** ● **Niveau bas d'abord.**



Acier AISI 4130 Soft (- - - ● - - - Traitement I; —○— Traitement II)



Essais de fatigue pure à deux niveaux (IN 100)

Fig. 44. Prévision des essais de fatigue à deux niveaux sur deux aciers à température ambiante et sur l'alliage IN 100 à haute température.

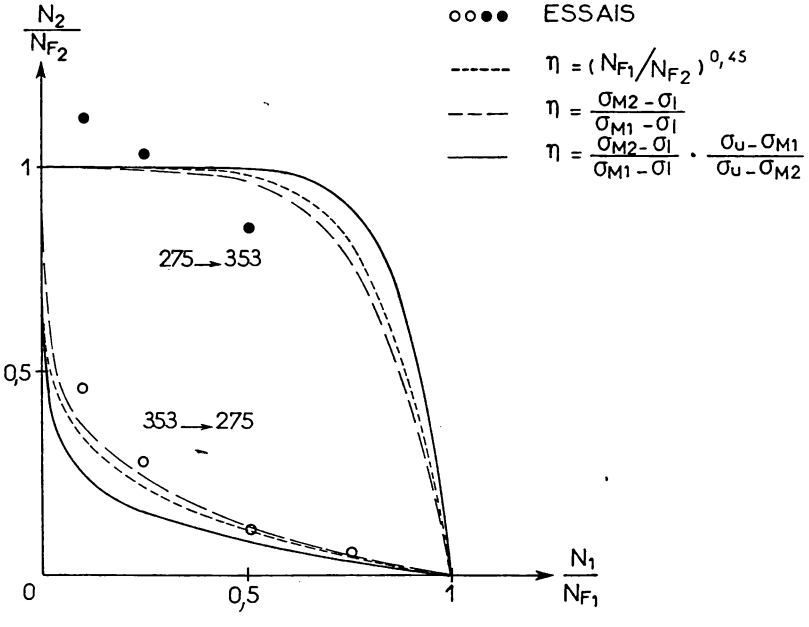


Fig. 45. Comparaison de trois exposants pour le cumul non linéaire du dommage de fatigue. Cas de l'acier C 35.

on exprime donc les fonctions α et M par :

$$\alpha(A_{II}, \bar{\sigma}_H, \sigma_{eq\,M}) = 1 - a \left\langle \frac{A_{II} - A_{II}^*(\bar{\sigma}_H)}{\sigma_u - \sigma_{eq\,M}} \right\rangle$$

$$M(\bar{\sigma}_H) = \sigma_{I_0}(1 - 3\,b\bar{\sigma}_H).$$

Dans la loi d'endommagement unidimensionnelle intervient l'amplitude de contrainte effective $(\sigma_M - \bar{\sigma})/(1 - D)$. En tridimensionnel, on peut employer à la place :

$$\tilde{A}_{II} = \tfrac{1}{2} \underset{t_0}{\text{Max}} \underset{t}{\text{Max}}\, J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t_0)).$$

La loi d'endommagement générale isotrope s'écrit alors :

$$\boxed{\delta D = \left[1 - (1 - D)^{\beta+1}\right]^{\alpha(A_{II}, \bar{\sigma}_H, \sigma_{eq\,M})} \left[\frac{\tilde{A}_{II}}{M(\bar{\sigma}_H)}\right]^{\beta} \delta N}.$$

Notons que pour une théorie d'endommagement isotrope on a :

$$\tilde{A}_{II} = A_{II}/(1 - D).$$

L'anisotropie de la loi d'évolution du dommage de fatigue est introduite en exprimant le taux d'accroissement du tenseur $\mathbf{D}$ par :

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{Q}_F \dot{D}$$

où $\mathbf{Q}_F$ dépend du matériau et est défini dans le système des axes principaux du tenseur des contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, à l'instant considéré comme le plus endommageant dans le cycle. Trop peu de recherches et trop peu de résultats expérimentaux existent (en 1984 !) pour que l'on puisse établir et valider complètement une telle théorie anisotrope.

4.3.4. *Cas de la température variable au cours du cycle*

Lorsque la température évolue lentement d'un cycle à l'autre, ou par blocs de cycles, il suffit de considérer chaque cycle comme isotherme et de tenir compte de la température dans les coefficients du modèle, alors variables en fonction du nombre de cycles.

Au contraire, si la température varie fortement au cours de chaque cycle, le problème est plus délicat. Il peut se résoudre en introduisant :

— *Une contrainte réduite* : $S = \sigma/\sigma_u(T)$ où $\sigma_u(T)$ est la contrainte de rupture en traction, dépendant de la température. La figure 46 illustre le cas de l'alliage IN 100 et montre bien qu'une grande partie de l'influence de la température est prise en compte par ce paramètre. Notons qu'une loi exprimée avec l'amplitude de déformation plastique (loi de Manson-Coffin, décrite au paragraphe 2.4.3.3) est elle aussi peu influencée par la température.

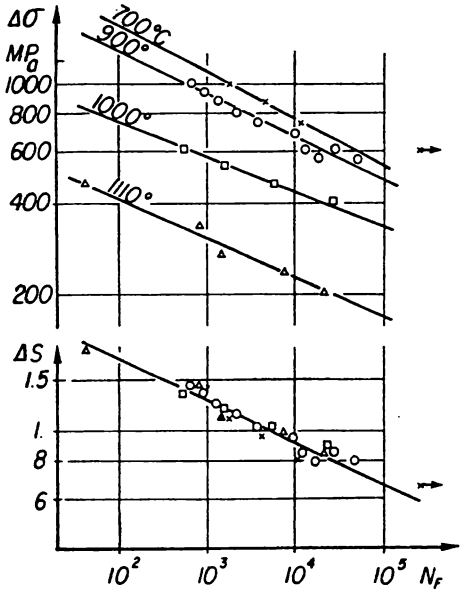


Fig. 46. (*a*) Influence de la température sur les courbes de Woehler de l'alliage IN 100.
(*b*) Prise en compte de la température par la contrainte réduite.

Une température moyenne équivalente, comme le propose Taira, en cumulant linéairement les effets de la température au cours d'un cycle. Pour la définition de cette température équivalente on utilise une loi simplifiée (cumul linéaire), déterminée en isotherme, telle que :

$$\delta D = \frac{\delta N}{N_F(S_M, \bar{S}, T)} = \frac{(S_M - \bar{S})^{\beta(T)}}{A(\bar{S}, T)} \delta N$$

où S_M et $\bar{S}$ sont les valeurs maximale et moyenne de S au cours du cycle. On définit alors l'accroissement de dommage par cycle :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \int_{\text{cycle}} \frac{\beta(T)}{2} \frac{\langle S - \bar{S} \rangle^{\beta(T)-1}}{A(\bar{S}, T)} \, \mathrm{d}S$$

où T dépend du temps, donc de S. En isotherme, on retrouve évidemment :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \frac{1}{N_F(S_M, \bar{S}, T)}.$$

Dans le cas contraire, on obtient la température équivalente T^*, c'est-à-dire la température du chargement isotherme produisant le même dommage :

$$\frac{1}{N_F(S_M, \bar{S}, T^*)} = \frac{1}{2} \int_{\bar{S}}^{S_M} \frac{\beta(T(S)) \, \mathrm{d}S}{(S - \bar{S}) \, N_F(S, \bar{S}, T(S))}$$

Dans la pratique S_M et $\bar{S}$ sont données, ainsi que l'évolution de S et de T au cours du cycle, ce qui permet de calculer le second membre. L'expression de N_F en fonction de T étant supposée monotone, cela permet de définir la température équivalente T^*. C'est cette température qui doit alors être employée pour définir les coefficients de la loi d'endommagement.

4.4. Effets d'interaction des endommagements de fatigue et de fluage

A température élevée, les processus d'endommagement de fatigue (dus aux cycles de chargement) et de fluage (liés au temps sous charge) peuvent interagir. Les phénomènes physiques intervenant à l'échelle de la microstructure sont complexes et l'influence de l'environnement n'est pas négligeable. On se limite ici à une description macroscopique de ces effets d'interaction, au travers des modèles d'évolution d'endommagement décrits dans les paragraphes précédents.

4.4.1. *Le cumul de dommages de natures différentes*

Les modèles d'endommagement de fluage et de fatigue définis aux paragraphes 4.2 et 4.3 considèrent séparément deux types de processus :

— un endommagement de fluage D_c, caractérisé par des défauts intercristallins, qui évolue en fonction du temps passé sous contrainte ; en unidimensionnel :

$$\mathrm{d}D_c = f_c(\sigma, T, D_c, \ldots)\,\mathrm{d}t$$

— un endommagement de fatigue D_F, pour lequel les défauts s'amorcent généralement en surface et progressent de façon transcristalline, qui évolue en fonction des cycles de chargement ; en unidimensionnel :

$$\delta D_F = f_F(\sigma_M, \bar{\sigma}, T, D_F, \ldots)\,\delta N\,.$$

Lorsque les deux processus sont présents simultanément les effets d'interaction se traduiront de façon macroscopique par l'introduction de couplages :

$$\mathrm{d}D_c = f_c(\sigma, T, D_c, D_F, \ldots)\,\mathrm{d}t$$
$$\delta D_F = f_F(\sigma_M, \bar{\sigma}, T, D_F, D_c, \ldots)\,\delta N\,.$$

Comment D_F doit-il s'introduire dans la première équation et D_c dans la seconde ? Par souci de simplification et pour rendre possible une prévision à partir du fluage pur et de la fatigue pure, on est amené à supposer que les dommages D_c et D_F ont des effets macroscopiques additifs :

$$\mathrm{d}D_c = f_c(\sigma, T, D_c + D_F, \ldots)\,\mathrm{d}t$$
$$\delta D_F = f_F(\sigma_M, \bar{\sigma}, T, D_F + D_c, \ldots)\,\delta N$$

si bien qu'une seule variable dommage subsiste, dont l'évolution peut être décrite par :

$$dD = dD_c + dD_F = f_c(\sigma, T, D, ...)\, dt + f_F(\sigma_M, \bar{\sigma}, T, D, ...)\, dN .$$

C'est cette forme d'équation qui est utilisée ci-dessous.

4.4.2. *Règle de cumulation et d'interaction linéaires*

Développée par Robinson puis Taira, elle consiste à additionner les dommages de fluage et de fatigue pure, définis par des relations linéaires :

$$\boxed{dD = \frac{dt}{t_c(\sigma, T)} + \frac{dN}{N_F(\Delta\varepsilon, T)}}$$

où $t_c(\sigma, T)$ est le temps à rupture en fluage pour la contrainte σ et la température T. N_F est le nombre de cycles à rupture en fatigue pure pour un chargement périodique sous l'amplitude de déformation $\Delta\varepsilon$ (dans cette méthode on emploie $\Delta\varepsilon$ plutôt que des paramètres en contraintes).

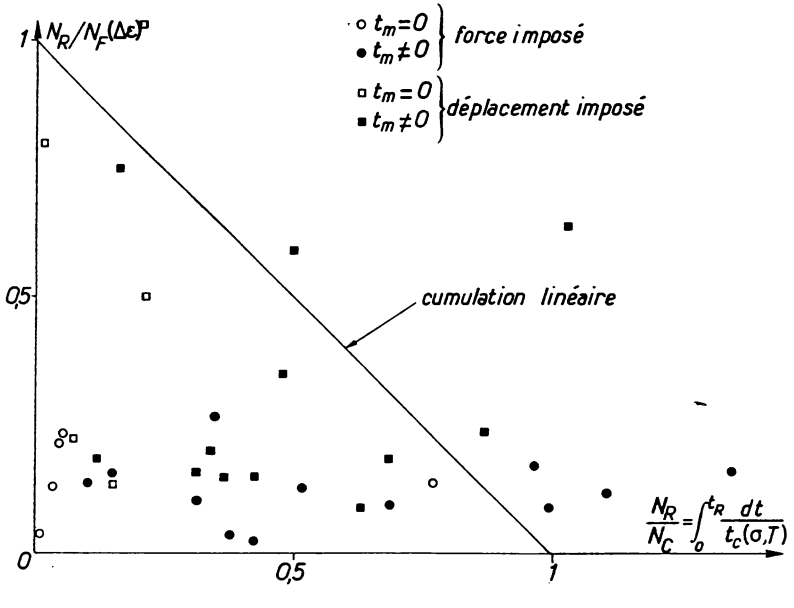


Fig. 47. Interaction non linéaire des dommages de fatigue et de fluage sur l'alliage IN 100. Critère de fatigue en $\Delta\varepsilon$.

La relation précédente s'intégre sur un cycle pour donner :

$$\delta D = \left[\int_0^{\Delta t} \frac{\mathrm{d}t}{t_c(\sigma, T)} + \frac{1}{N_F(\Delta\varepsilon, T)} \right] \delta N$$

où Δt est la période du cycle. Lorsque le chargement est périodique, on trouve le nombre de cycles à rupture N_R sous fatigue-fluage combinés par intégration :

$$\frac{1}{N_R} = \int_0^{\Delta t} \frac{\mathrm{d}t}{t_c(\sigma, T)} + \frac{1}{N_F(\Delta\varepsilon, T)}.$$

Si la température est variable au cours du cycle, on remplace T dans N_F par la température équivalente T^*, définie au paragraphe 4.3.4.

Bien que donnant satisfaction dans un certain nombre de cas, cette méthode est mise en défaut pour plusieurs matériaux, en particulier pour l'alliage IN 100, comme le montre la figure 47 dans laquelle sont reportées les valeurs expérimentales des pourcentages de fatigue et de fluage. Notons que, pour les matériaux qui présentent une ductilité importante en fluage, il faut tenir compte des corrections géométriques : les essais de fluage doivent être interprétés en contrainte vraie puisque ces données sont ensuite appliquées à des essais cycliques dans lesquels les déformations restent toujours faibles.

4.4.3. *Modèle de cumulation et d'interaction non linéaires*

La méthode développée ici est celle qui découle directement des équations d'endommagement avec cumulation non linéaire :

— pour le fluage, c'est la loi de Kachanov dans laquelle les coefficients caractéristiques sont identifiés par les essais de fluage pur,

— pour la fatigue, c'est le modèle développé en 4.3.2, dans lequel le dommage évolue de façon très fortement non linéaire, conformément aux mesures d'endommagement.

Les deux modèles sont couplés par l'hypothèse d'additivité des dommages de fatigue et de fluage. Cela permet de tenir compte des effets physiques suivants :

— la présence d'un dommage de fluage accélère la progression des microfissures de fatigue (les joints de grains près de la pointe de la fissure sont moins résistants ;

— la présence de fissures de fatigue augmente le taux de croissance des cavités de fluage par effets de concentration de contrainte.

En compression, la vitesse d'évolution du dommage de fluage peut être plus faible qu'en traction. On prend cet effet en compte en remplaçant σ par :

$$\chi(\sigma) = \langle c\sigma + (1 - c) \mid \sigma \mid \rangle .$$

Pour $c = 0$, on a la propriété de symétrie (compression identique à traction). Pour $c = 1$, au contraire, il n'y a pas d'endommagement de fluage en compression car χ est alors nul. C'est l'application à la traction-compression du critère général des paragraphes 2.5.2 et 4.2.2.

Pour simplifier, on suppose de plus que l'exposant k de la loi de Rabotnov est constant. Sous ces hypothèses, la loi générale d'évolution sous conditions d'interaction fatigue-fluage s'écrit :

$$dD = \left[\frac{\chi(\sigma)}{A}\right]^r (1 - D)^{-k}\, dt + \\ + \left[1 - (1 - D)^{\beta+1}\right]^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})(1 - D)}\right]^{\beta} dN .$$

Pour des durées de vie se chiffrant en centaines de cycles au moins, ce qui est le cas courant d'utilisation, on peut négliger la variation de l'endommagement au cours de chaque cycle pris indépendamment. On peut ainsi intégrer simplement les effets d'endommagement de fluage au cours d'un cycle et les reporter à la fin de ce cycle. On aboutit à :

$$\delta D = \left((1 - D)^{-k} \int_0^{\Delta t} \left(\frac{\chi(\sigma)}{A}\right)^r dt + \right. \\ \left. + \left[1 - (1 - D)^{\beta+1}\right]^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})} \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})(1 - D)}\right]^{\beta}\right) \delta N$$

où Δt est la période du cycle.

En désignant par N_F le nombre de cycles à rupture qui existerait si l'endommagement de fatigue se produisait seul, et par N_c le nombre de cycles à rupture qui existerait si l'endommagement de fluage se produisait seul,

$$\frac{1}{N_c} = \int_0^{\Delta t} \frac{dt}{t_c(\chi(\sigma), T)} = (k + 1) \int_0^{\Delta t} \left(\frac{\chi(\sigma)}{A}\right)^r dt$$

$$\frac{1}{N_F} = (\beta + 1)\left[1 - \alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})\right] \left[\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{M(\bar{\sigma})}\right]^{\beta}$$

et en remplaçant dans l'équation précédente, on est conduit à la relation suivante :

$$\boxed{\delta D = \left(\frac{(1 - D)^{-k}}{(k + 1) N_c} + \frac{\left[1 - (1 - D)^{\beta+1}\right]^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})}}{(\beta + 1) N_F \left[1 - \alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})\right](1 - D)^{\beta}}\right) \delta N} .$$

On trouve le nombre de cycles à rupture N_R en intégrant pour D compris entre 0 et 1 ce qui s'exprime par :

$$\frac{N_R}{N_F} = \int_0^1 \left(\frac{N_F}{N_c} \frac{(1-D)^{-k}}{k+1} + \frac{[1-(1-D)^{\beta+1}]^{\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})}}{(\beta+1)\,[1-\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})]\,(1-D)^{\beta}} \right)^{-1} \mathrm{d}D .$$

Le calcul du nombre de cycles à rupture théorique N_R est effectué en deux étapes en supposant que l'endommagement de fluage en compression est aussi important qu'en traction ($c = 1$) :

— calcul des nombres de cycles à rupture en fluage seul N_c et fatigue seule N_F ; dans les essais à déplacement imposé, il est tenu compte de l'évolution du cycle de contrainte jusqu'aux conditions stabilisées ;

— connaissant la contrainte maximale, la contrainte moyenne, N_F/N_c et les coefficients r, k, β, on calcule facilement N_R/N_F par intégration, ce qui donne la valeur de N_R.

La confrontation entre prévisions et résultats expérimentaux est faite dans les diagrammes d'interaction dont un exemple est donné sur la figure 48 pour des essais à contrainte imposée. Les points d'essai correspondent aux valeurs mesurées de N_R divisées par les valeurs calculées de N_c et de N_F.

Pour ce matériau la non-linéarité de l'interaction est d'autant plus grande que l'amplitude de contrainte est plus faible, ce qui est correctement prévu par la théorie, surtout si l'on compare à la prévision par la règle de cumulation linéaire.

La figure 49 résume l'ensemble des confrontations pour les essais de référence (fatigue pure et fluage), pour les essais de fatigue viscoplastique à force ou à déplacement imposé, pour des essais de fatigue viscoplastique à deux niveaux de température, pour les essais de fatigue pure à deux niveaux de contrainte, pour des essais de fluage après fatigue (voir ci-dessous) et pour des essais de fatigue thermomécanique. Les différences jouent sur un facteur inférieur à deux, ce qui constitue une bonne vérification du modèle, la règle de cumulation linéaire pouvant conduire à des erreurs supérieures à un facteur 10.

La validité de cette modélisation découle de plusieurs faits reconnus pour ce type d'alliage réfractaire :

— l'endommagement de fluage évolue beaucoup plus vite que l'endommagement de fatigue (rapporté à la durée de vie nominale) : cette différence de rapidité d'évolution est correctement décrite par les modèles choisis ;

— il n'y a pas d'effet de consolidation cyclique : l'effet de l'écrouissage sur l'évolution de l'endommagement est négligeable.

La première remarque implique l'existence de conditions d'essais pour lesquelles l'effet de cumulation non linéaire s'observe en sens contraire, c'est-à-dire dans un sens bénéfique par rapport à la règle de cumulation linéaire.

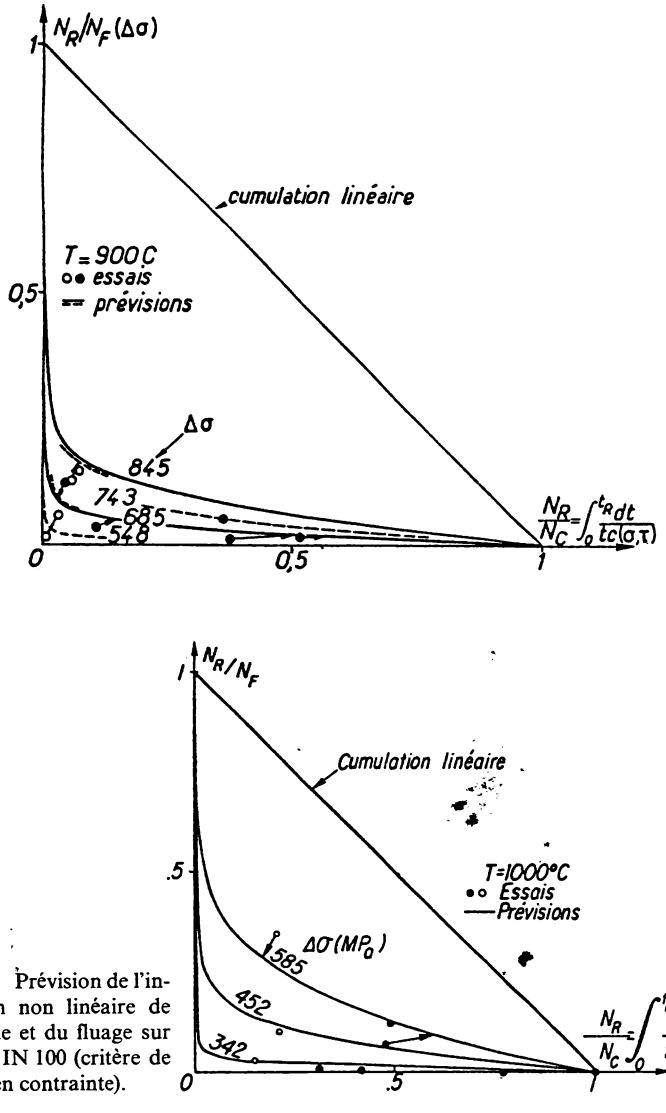


Fig. 48. Prévision de l'interaction non linéaire de la fatigue et du fluage sur l'alliage IN 100 (critère de fatigue en contrainte).

Il s'agit des essais commencés en fatigue, pendant N_1 cycles et poursuivis en fluage, pendant le temps t'_c, jusqu'à rupture; on doit avoir :

$$\frac{N_1}{N_F} + \frac{t'_c}{t_c} > 1$$

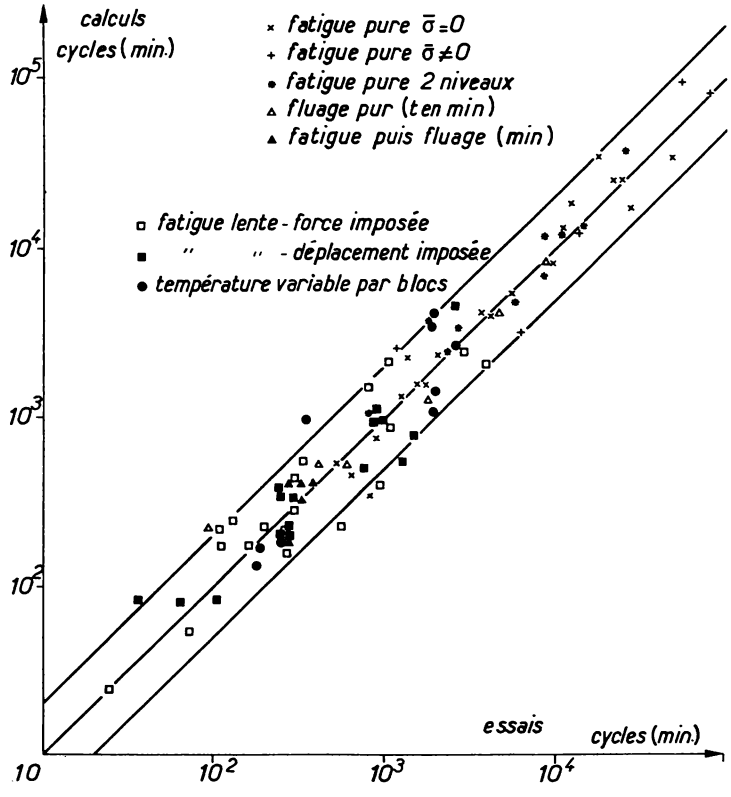


Fig. 49. Confrontations calculs-essais sur le nombre de cycles ou le temps à rupture IN 100.

où N_F et t_c sont respectivement le nombre de cycles à rupture en fatigue et le temps à rupture en fluage, correspondants à la contrainte appliquée (contrainte alternée en fatigue).

De tels essais ont été réalisés sur l'IN 100 à 1 000 °C et l'effet annoncé est effectivement observé comme on peut le voir sur la figure 50. Les modèles d'endommagement de fatigue et de fluage peuvent être utilisés pour une prévision plus précise. En fatigue, après N_1 cycles, on a :

$$[1 - (1 - D_1)^{\beta+1}]^{1-\alpha} = \frac{N_1}{N_F}$$

où α désigne la valeur de la fonction $\alpha(\sigma_M, \bar{\sigma})$ correspondant à la contrainte

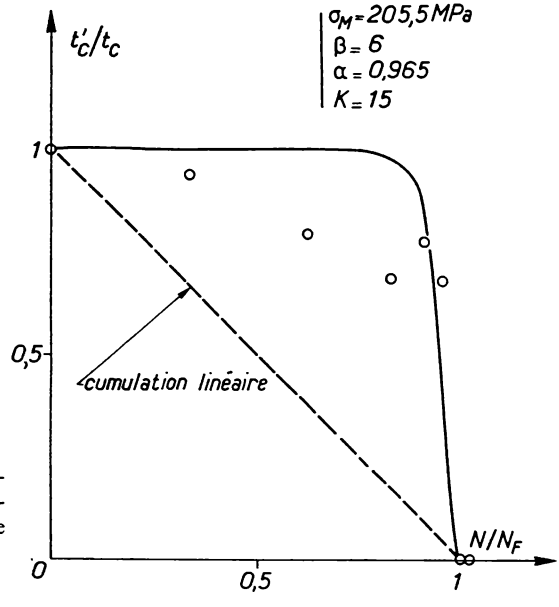


Fig. 50. Rupture en fluage après fatigue pure. Prévisions et essais sur l'alliage IN 100 à 1 000 °C.

maximale appliquée ($\bar{\sigma} = 0$). L'intégration de la loi d'endommagement de fluage entre D_1 et 1 conduit à :

$$(1 - D_1)^{k+1} = \frac{t'_c}{t_c}$$

où k est la valeur de $k(\sigma)$. On en déduit la relation permettant de prévoir le temps à rupture en fluage en fonction de la durée du précyclage de fatigue :

$$\frac{t'_c}{t_c} = \left[1 - \left(\frac{N_1}{N_F}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{\frac{k+1}{\beta+1}}.$$

Cette relation, appliquée avec les valeurs $\beta = 6$, $\alpha = 0{,}965$, $k = 15$, correspondant au chargement considéré, reproduit assez bien les résultats expérimentaux compte tenu de la dispersion relativement importante dans les essais à rupture en fluage (fig. 11).

5. COUPLAGE DÉFORMATION-ENDOMMAGEMENT

On entend par couplage déformation-endommagement le fait que la solution en contraintes et déformations d'un problème aux limites dépend de l'état d'endommagement de la structure considérée. D'une manière générale,

on l'a vu, l'endommagement diminue la rigidité et la résistance des matériaux. Pour un état de contraintes donné, les déformations sont d'autant plus grandes que l'endommagement est élevé, d'où l'importance des calculs « couplés », où l'on calcule simultanément contraintes, déformations et endommagement dans des problèmes d'évolution.

La notion de contrainte effective, associée au principe d'équivalence en déformation, permet d'écrire très simplement les lois de comportement couplées, puisqu'il suffit de remplacer la contrainte usuelle $\boldsymbol{\sigma}$ par la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$.

On introduit ci-dessous les quelques éléments de l'approche générale et on l'applique à quelques exemples simples de lois de comportement. La loi d'endommagement est supposée isotrope pour simplifier.

5.1. Elasticité couplée à l'endommagement

Ce cas est important pour les matériaux dans lesquels les effets de plasticité sont peu importants. L'exemple type est celui du béton pour lequel les déformations non linéaires, quelquefois irréversibles, sont produites par des décohésions que l'on peut considérer au travers d'une théorie d'endommagement.

L'étude théorique de ce cas découle directement des choix effectués précédemment pour la contrainte effective. Dans le cas de l'élasticité isotrope et de l'endommagement isotrope, dans les conditions initiales, la loi d'élasticité du matériau endommagé s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$

ou :

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-D} - \frac{\nu}{E}\frac{Tr(\boldsymbol{\sigma})}{1-D}\mathbf{1}}$$

relation qui doit être associée à la loi d'endommagement choisie.

Prenons un exemple très schématique, particularisé en traction uniaxiale, en supposant que D évolue par la déformation (élastique) et en introduisant un seuil variable ε_D :

$$dD = \begin{cases} \left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{s^*} d\varepsilon & \text{lorsque } \varepsilon = \varepsilon_D \text{ et } d\varepsilon = d\varepsilon_D > 0 \\ 0 & \text{lorsque } \varepsilon < \varepsilon_D \text{ ou } d\varepsilon < 0 \end{cases}$$

En prenant pour conditions initiales $D = \varepsilon_D = 0$ et en intégrant jusqu'à rupture $D = 1$, on obtient :

$$D = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R}\right)^{s^*+1} \qquad \sigma = E\varepsilon\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R}\right)^{s^*+1}\right]$$

où $\varepsilon_R = [(s^* + 1)\, \varepsilon_0^{s^*}]^{\frac{1}{s^*+1}}$ est la déformation à rupture. La figure 51*a* illustre l'évolution de contrainte que l'on peut obtenir ($s^* = 2$) avec une telle théorie d'élasticité couplée avec l'endommagement. Pendant une éventuelle décharge-charge, on retrouve un comportement élastique linéaire avec un module d'élasticité plus faible. Les résultats obtenus sont similaires à des observations expérimentales comme le montre la figure 51*b*.

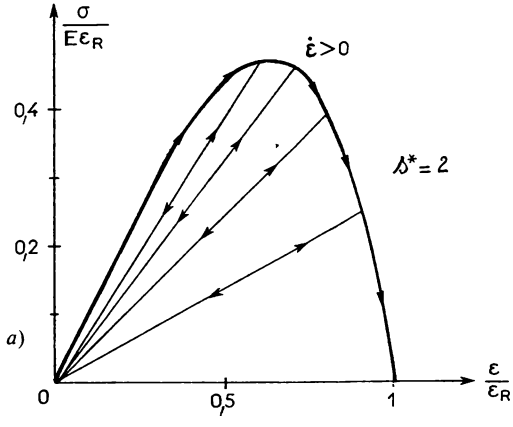
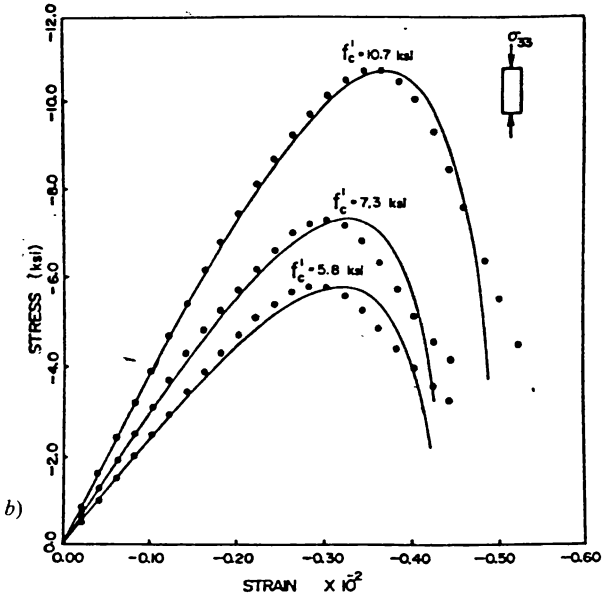


Fig. 51. (*a*) Courbe contrainte-déformation pour une théorie d'élasticité couplée à l'endommagement. (*b*) Exemple sur le béton en compression (d'après D. Krajcinovic).



5.2. Plasticité couplée à l'endommagement

5.2.1. *Formulation générale*

Pour traduire le comportement du matériau plastique écrouissable et endommageable, on applique encore le principe d'équivalence en déformation en remplaçant, dans le potentiel de dissipation, la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ par la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, les autres variables restant inchangées (voir chapitre 5).

$$\boldsymbol{\sigma} \to \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - D}$$

$$\mathbf{X} \to \mathbf{X}$$

$$R \to R ;$$

le domaine d'élasticité s'exprime alors :

$$f = J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{X}) - R - k = J_2\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - D} - \mathbf{X}\right) - R - k \leqslant 0 ;$$

la loi d'écoulement et les évolutions des variables internes et de l'endommagement sont obtenues par la loi de dissipativité normale, comme dans le cas général ;

le potentiel de dissipation φ^* se décompose en :

$$f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{X}, R) \text{ et } \varphi_D^*(Y ; \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}, r, D)$$

le premier terme correspond à la dissipation plastique, le second à la dissipation par endommagement, supposée découplée de la première. La variable associée à R est maintenant désignée par r.

La règle de normalité généralisée fournit la loi d'écoulement et les évolutions des variables internes :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R}$$

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y}.$$

Le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ est alors déterminé par la condition de consistance de l'écoulement plastique : $\dot{f} = f = 0$ (voir chap. 5). Nous n'étudions ci-dessous que le cas de l'écrouissage isotrope.

5.2.2. *Couplage entre endommagement plastique ductile isotrope et écrouissage isotrope*

Le domaine élastique s'exprime maintenant par $f = \dfrac{\sigma_{eq}}{1-D} - R - k \leqslant 0$ en supposant que le matériau obéit au critère de Von Mises. φ_D^* ne dépend plus que de Y, D.

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2}\frac{\dot{\lambda}}{1-D}\frac{\tilde{\sigma}'}{\tilde{\sigma}_{eq}} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\lambda}}{1-D}\frac{\sigma'}{\sigma_{eq}}$$

$$\dot{r} = \dot{\lambda} = \left(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p\right)^{1/2}(1-D) = \dot{p}(1-D)$$

Supposons donnée la loi d'écrouissage du matériau avec endommagement :

$$R = \rho\frac{\partial\psi(r)}{\partial r} = R(r)$$

λ *ou* $\dot{r}$ s'expriment par la condition de consistance :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial\sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial R}\dot{R} + \frac{\partial f}{\partial D}\dot{D} = 0$$

ou

$$\frac{3}{2}\frac{\sigma' : \dot{\sigma}}{\sigma_{eq}(1-D)} - R'(r)\,\dot{r} + \frac{\sigma_{eq}}{(1-D)^2}\dot{D} = 0$$

avec

$$\dot{r} = \dot{\lambda}, \quad \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - R = k \text{ et } \dot{D} = -\frac{\partial\varphi_D^*}{\partial Y}\dot{\lambda}$$

on tire

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\sigma}_{eq}}{(1-D)R'(r) + (k + R(r))\dfrac{\partial\varphi_D^*}{\partial Y}}$$

Le critère de charge-décharge s'exprime par :

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\sigma}_{eq} \leqslant 0$$

$$\dot{\lambda} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\sigma}_{eq} > 0\,.$$

De plus, il n'y a écoulement que si $f = 0$. En notant $h(r, D, Y)$ le module d'écrouissage :

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} = H(f) \frac{\langle \dot{\sigma}_{eq} \rangle}{h(r, D, Y)}$$

avec

$$h(r, D, Y) = (1 - D)^2 R'(r) + (1 - D)(k + R(r)) \frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y}$$

$\partial\varphi^*/\partial Y$ étant négatif, ce module d'écrouissage peut être négatif. En fait, il est positif lorsque la déformation r est petite et $R'(r)$ grand et il devient négatif à partir de la condition d'instabilité

$$h(r, D, Y) = 0 .$$

Dans ce cas l'écriture ci-dessus ne s'applique plus, il faudrait écrire la condition de charge-décharge avec $\dot{\bar{\sigma}}_{eq}$.

Ainsi l'équation de Prandtl-Reuss dans laquelle la loi d'écrouissage intervenait sous forme d'une fonction puissance

$$R(p) = K_Y p^{1/M_Y} = \sigma_{eq} - \sigma_Y$$

s'écrit maintenant :

$$\boxed{\begin{aligned} d\varepsilon &= d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \\ d\varepsilon^e &= \frac{1 + \nu}{E} \frac{d\sigma}{1 - D} - \frac{\nu}{E} \frac{d(\mathrm{Tr}(\sigma))}{1 - D} \mathbf{1} \\ d\varepsilon^p &= \frac{3}{2} H(f) \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\frac{K_Y (1 - D)^2}{M_Y} \left\langle \frac{\sigma_{eq}}{K_Y (1 - D)} - \frac{\sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{1 - M_Y} + \sigma_{eq} \frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y}} \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} . \end{aligned}}$$

Il faut ajouter la loi d'endommagement correspondante (voir § 4.1)

$$\dot{D} = - \frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y} \dot{\lambda} = - \frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y} (1 - D) \dot{p}$$

ou

$$\boxed{dD = \frac{D_c}{\varepsilon_R - \varepsilon_D} \left[\frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] dp}$$

et

$$\frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y} = - \frac{D_c}{(\varepsilon_R - \varepsilon_D)(1 - D)} \left[\frac{2}{3} (1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right].$$

5.3. Viscoplasticité couplée à l'endommagement

Le lecteur attentif (sic !) ayant bien compris la méthode d'après les exemples des paragraphes 5.1 et 5.2, écrivons directement la loi de viscoplasticité isotrope couplée, étudiée au paragraphe 4.2.1.3 du chapitre 6.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$$

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{1+\nu}{E}\frac{\dot{\sigma}}{1-D} - \frac{\nu}{E}\frac{\mathrm{Tr}(\dot{\sigma})}{1-D}\mathbf{1}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2}\dot{p}\frac{\sigma'}{\sigma_{eq}}, \quad \dot{r} = \dot{p}(1-D)$$

$$\dot{r} = \left[\frac{\sigma_{cq}}{(1-D)Kr^{1/M}}\right]^N.$$

Comme dans le cas de la plasticité, la relation $\dot{r} = \dot{p}(1-D)$ vient du choix d'un potentiel viscoplastique de la forme :

$$\varphi^* = \Omega = \frac{K}{N+1}\left\langle \frac{J_2(\tilde{\sigma}) - R + h'(r)}{K} \right\rangle^{N+1} r^{-N/M}$$

et de la règle de normalité :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}.$$

Dans le cas de la viscoplasticité, seul l'endommagement de fluage peut intervenir simultanément :

$$\dot{D} = \left\langle \frac{\chi(\sigma)}{A} \right\rangle^r (1-D)^{-k\langle\chi(\sigma)\rangle}.$$

Dans les applications on considère que l'endommagement est négligeable en fluage primaire et que l'écrouissage est saturé en fluage tertiaire. Par exemple, en traction simple :

— fluage primaire : $\varepsilon_p < \varepsilon_p^*$,

$$D = 0 \to r = \varepsilon_p = \left[\frac{N+M}{M}\left(\frac{\sigma}{K}\right)^N t\right]^{M/N+M},$$

où ε_p^* est la déformation de fin de fluage primaire, exprimée au paragraphe 2.4 du chapitre 6 ;

— fluage tertiaire : $\varepsilon_p \geqslant \varepsilon_p^* \to Kr^{1/M}$ est remplacé par $K\varepsilon_p^{*1/M}$.

La loi d'endommagement donne d'abord :

$$D = 1 - \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{\frac{1}{k+1}} \quad \text{avec} \quad t_c = \frac{1}{k+1}\left(\frac{\sigma}{A}\right)^{-r}$$

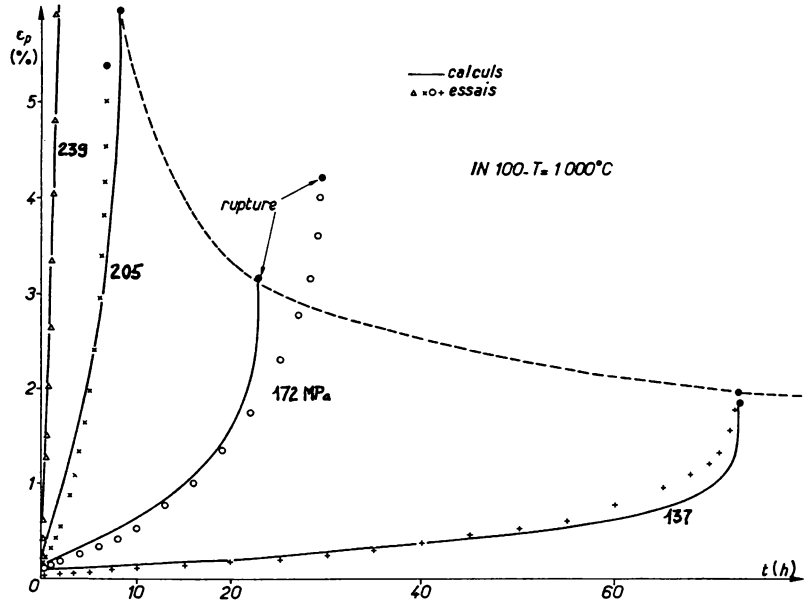


Fig. 52. Prévision du fluage tertiaire et de la déformation à rupture pour l'alliage IN 100 à 1 000 °C.

puis la loi de comportement s'écrit :

$$d\varepsilon_p = \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{-\frac{N+1}{k+1}} \cdot \left(\frac{\sigma}{K}\right)^N dt$$

après intégration pour σ = Cte. on trouve :

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p^* + (\varepsilon_{p_R} - \varepsilon_p^*)\left[1 - \left(\frac{1 - t/t_c}{1 - t^*/t_c}\right)^{\frac{k-N}{k+1}}\right]$$

$$\varepsilon_{p_R} = \varepsilon_p^* + \frac{k-1}{k-N}\left(\frac{\sigma}{K\varepsilon_p^{*1/M}}\right)^N t_c\left(1 - \frac{t^*}{t_c}\right)^{\frac{k-N}{k+1}}$$

avec $$t^* = \frac{M}{N+M}\left(\frac{\sigma}{K}\right)^{-N} \varepsilon_p^{*\frac{N+M}{M}}$$

les exposants sont généralement ordonnés de la façon suivante : $r \leqslant N \leqslant k$ on en déduit que la déformation à rupture ε_R est une fonction décroissante de la contrainte appliquée en fluage, ce qui est généralement bien vérifié par l'expérience. La figure 52 montre une concordance correcte dans le cas de l'alliage IN 100, aussi bien pour le fluage tertiaire que pour la déformation à rupture.

6. PRÉVISION DE L'AMORÇAGE DES FISSURES DANS LES STRUCTURES

On donne dans ce paragraphe quelques éléments sur l'utilisation des modèles d'endommagement à des fins de prévision de l'amorçage des fissures. L'utilisation de ces modèles pour prévoir la croissance des fissures dans le cadre de l'approche locale sera discutée au § 7 du chapitre 8.

6.1. Endommagement initial

Un premier problème qui se pose dans l'intégration des modèles différentiels d'endommagement est celui des conditions initiales. Les procédés d'élaboration, la mise en forme, l'usinage des pièces mécaniques peuvent laisser un endommagement initial, appelé D_0, que l'on se doit de prendre en compte dans les calculs de prévision de la rupture.

Ecrire $t = 0$ ou $N = 0 \rightarrow D = D_0$ est chose aisée ! Mais déterminer la valeur de l'endommagement initial D_0 l'est moins. Les méthodes ultrasonores peuvent donner quelques indications mais, le plus souvent, il faut avoir recours à une estimation d'après des informations indirectes.

6.2. Calcul de l'endommagement aux points critiques

6.2.1. *Méthode classique sans couplage*

Dans de nombreuses applications, on peut considérer que l'influence de l'endommagement sur le comportement à la déformation est faible en supposant le découplage. En fatigue par exemple, dans le domaine des déformations limitées, une telle hypothèse est acceptable : l'effet du couplage ne se manifeste, on l'a vu (§ 2.3.2.2), que très tardivement lorsqu'une ou plusieurs microfissures sont déjà amorcées. En tout cas c'est l'hypothèse la plus simple, couramment admise dans la plupart des applications.

Le calcul à l'amorçage s'effectue alors en deux étapes :

1) Calcul de la réponse contrainte-déformation de la structure par la méthode des éléments finis par exemple (voir chap. 4, 5 et 6 pour une description sommaire de la méthode en élasticité, plasticité et viscoplasticité). Sous le chargement imposé, supposé connu, on a à résoudre un problème aux limites, rendu complexe dans de nombreuses applications par l'effet des déformations plastiques ou viscoplastiques. Dans le cas des chargements cycliques on cherche à obtenir la solution au cycle dit stabilisé, c'est-à-dire pour une loi de comportement cyclique stable (les effets de déconsolidation ou de durcissement cyclique sont éliminés du modèle de comportement) et pour des redistributions de contrainte stabilisées. Pour ce dernier point, il faut calculer plusieurs cycles successifs afin de tenir compte des redistributions de contraintes dans la structure.

2) Connaissant les contraintes et les déformations en tout point de la structure, on est à même de déterminer le ou les points critiques (où risque de se produire l'amorçage d'une fissure) et une durée de vie, c'est-à-dire le temps ou le nombre de cycles correspondant à l'amorçage. Cette étape nécessite le choix d'un critère d'amorçage qui peut découler de la loi d'évolution d'endommagement. En général, il suffit d'employer une relation directe entre les contraintes et/ou déformations, calculées en régime stabilisé, et un temps ou un nombre de cycles à rupture. En fatigue par exemple on utilisera :

$$N_R = N_F(\sigma_M, \overline{\sigma}, T)\,.$$

Un problème supplémentaire intervient lorsque les sollicitations ne sont ni constantes, ni périodiques. Pour certaines applications, il faut tenir compte des charges réelles en service, le plus souvent idéalisées, mais cela implique quelquefois des effets de cumul des dommages. Toujours dans le contexte d'une théorie non couplée, on réalise autant d'analyses de structure qu'il y a de cas de chargement et on applique la règle choisie pour cumuler les dommages obtenus indépendamment pour ces différents cas. Par exemple, pour la règle de cumul linéaire en fatigue sous un chargement de m blocs répétés (voir fig. 53), on a :

$$n_R \sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N_{F_i}} = 1$$

où n_R est le nombre de séquences avant amorçage, N_i le nombre de cycles dans chaque bloc, N_{F_i} le nombre de cycles à rupture correspondant à des contraintes et/ou déformations périodiques égales à celles calculées pour les conditions de chargement i.

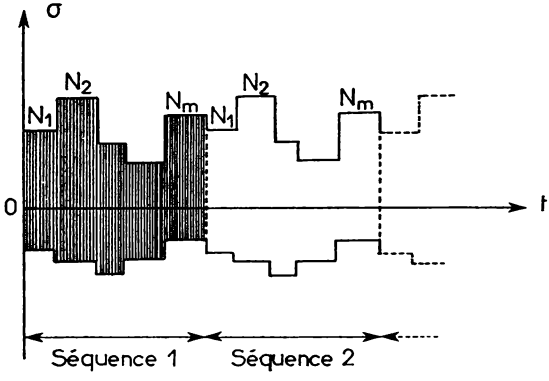


Fig. 53. Chargement par blocs programmés.

Exemple du calcul de l'amorçage d'une fissure dans une aube de turbine

Il s'agit d'aubes de turbine « haute pression » de moteur d'avion, refroidies par circulation interne d'air du compresseur dans des canaux ou des cavités (fig. 54). Le matériau est le superalliage base-nickel IN100. Il est protégé contre l'oxydation par un procédé d'aluminisation. Les sollicitations principales sont celles des cycles marche-arrêt du moteur :

— efforts d'origine centrifuge,

— températures cycliques engendrant des contraintes d'origine thermique responsables de la « fatigue thermique ».

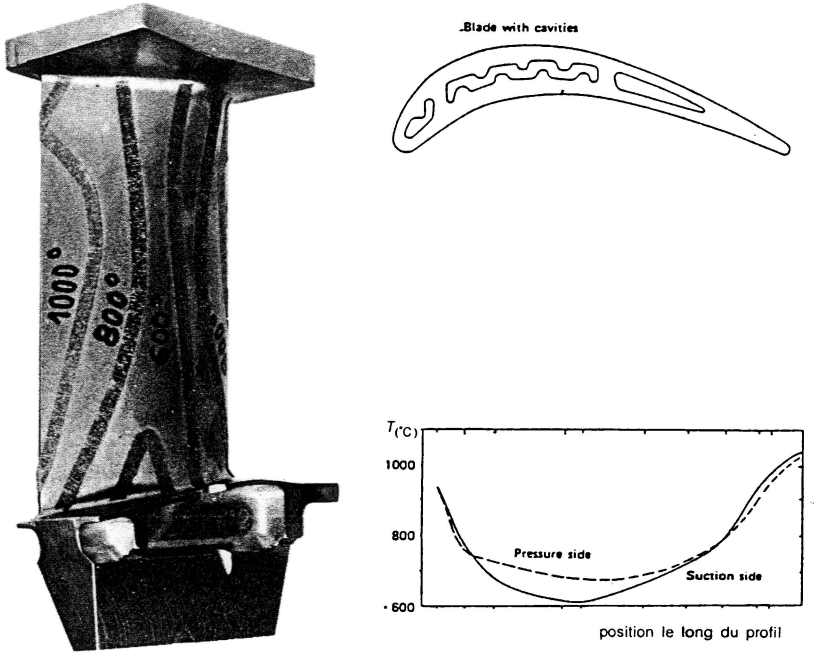


Fig. 54. Aube de turbine et champs de température.

La méthode de prévision de l'amorçage définie ci-dessus s'applique de la façon suivante :

— Utilisation d'une loi de viscoplasticité cyclique, avec écrouissage cinématique non linéaire (§ 4.3, chap. 6), au régime stabilisé.

— Calcul des contraintes et déformations par une méthode de tranches à sections planes et contraintes uniaxiales permettant trois degrés de liberté (une translation de traction et deux rotations de flexion). La figure 55 indique schématiquement comment la dilatation libre des éléments est contrariée pour produire des contraintes d'origine thermique et des déformations mécaniques élasto-viscoplastiques. Les effets de redistribution des contraintes dus à la

viscoplasticité et aux cycles successifs sont pris en compte par un calcul pas à pas comme indiqué au paragraphe 5.2 du chapitre 6.

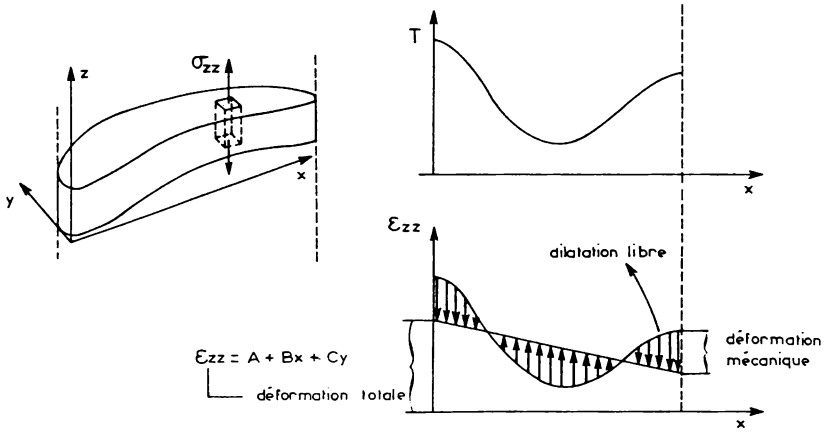


Fig. 55. Schéma de la méthode des tranches planes.

— Calcul du nombre de cycles à amorçage en chaque point, le point critique d'amorçage étant évidemment celui qui correspond au nombre de cycles à rupture minimal. Ces calculs sont effectués avec les contraintes et déformations obtenues au premier cycle, au deuxième, ... au sixième ou septième de façon à obtenir par extrapolation le nombre de cycles à amorçage qui prenne en compte les redistributions de contraintes à chaque cycle (fig. 56). On tient compte des effets d'interaction non linéaire fatigue-fluage par les modèles décrits au paragraphe 4.4.3.

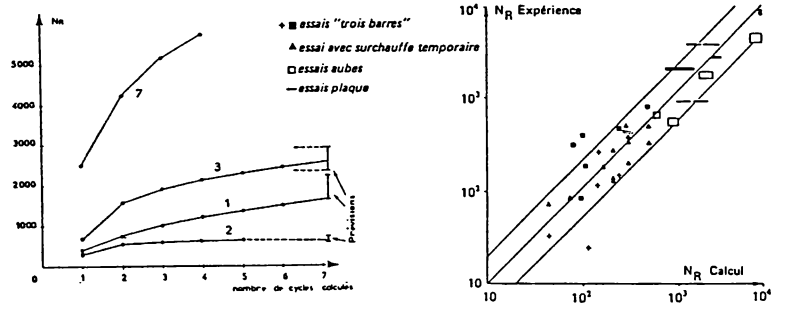


Fig. 56. *a*) Prévision du nombre de cycles à amorçage en fonction du nombre de cycles calculés. *b*) Comparaison avec l'expérience.

Les prévisions sont conformes aux observations expérimentales d'essais pratiqués en laboratoire sur des aubes réelles avec des sollicitations voisines des sollicitations de moteurs en service. Des résultats analogues ont été obtenus sur des plaques sous gradient thermiques et pour différents types d'essais de traction-compression anisothermes, toujours avec les mêmes jeux de coefficients (fig. 56*b*).

Cette méthode est utilisée couramment à la Société SNECMA dans la phase finale de dimensionnement des aubes de turbine, à l'aide du programme « CALIFAT » (CALcul d'Initiation des Fissures dans les Aubes de Turbine). La méthode des éléments finis permet sa généralisation pour d'autres pièces critiques de moteurs (disques, chambres de combustion) et dans d'autres secteurs industriels (industrie nucléaire, industrie automobile).

6.2.2. *Prise en compte du couplage déformation-endommagement*

Cet effet peut être important pour certains matériaux ou certains types de chargement, dans la mesure où les contraintes et déformations calculées sont modifiées par l'introduction d'un tel couplage. Deux exemples sont brièvement décrits.

Endommagement de fluage

L'influence de l'endommagement de fluage sur le comportement viscoplastique est importante : elle se traduit, on l'a vu, par le fluage tertiaire. Dans le cas d'une structure, même si celle-ci est sollicitée par des efforts imposés, cela peut entraîner une redistribution de contrainte supplémentaire.

Un tel calcul n'est pas facile, même sous une charge constante. La figure 57 montre l'exemple d'une plaque entaillée, calculée en contraintes planes en

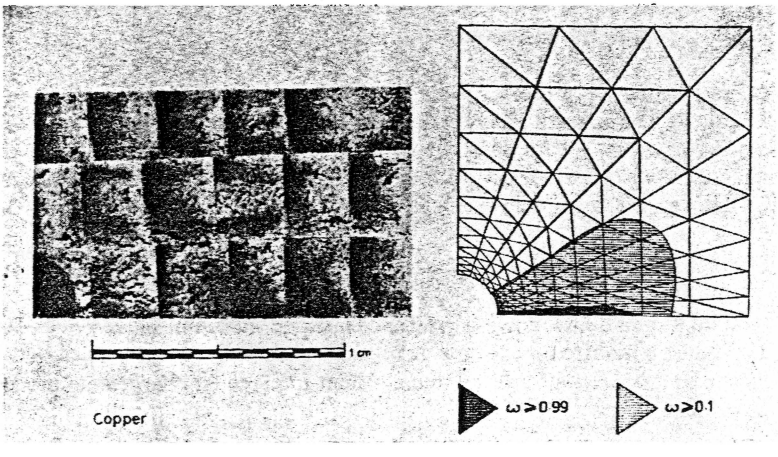


Fig. 57. Zone endommagée dans une plaque entaillée (d'après D. Hayhurst).

tenant compte de ce couplage. Les équations sont celles de la viscoplasticité parfaite (sans écrouissage) et de l'endommagement isotrope, particularisées par :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2}\left[\frac{\sigma_{eq}}{\lambda^*(1-D)}\right]^{N^*}\frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} \qquad \dot{D} = \left[\frac{\sigma_{eq}}{A(1-D)}\right]^r.$$

Le calcul est effectué par la méthode des éléments finis appliquée en viscoplasticité (voir chap. 6). La matrice de rigidité des éléments les plus sollicités est réactualisée périodiquement pour tenir compte de la diminution des caractéristiques d'élasticité. Les équations sont intégrées pas à pas dans le temps.

Endommagement du béton

Le béton est un matériau dont le comportement non linéaire en traction peut être traduit par le couplage entre la loi d'élasticité linéaire et un endommagement induit par la déformation. On a vu au paragraphe 5.1 un modèle simple mais réaliste pour décrire un tel comportement en unidimensionnel. On lui ajoute un critère multiaxial en déformation qui différencie le cas de la traction de celui de la compression. Par exemple, celui écrit au paragraphe 2.5.3 qui fait intervenir l'invariant ε^* déduit des parties positives des déformations principales :

$$\varepsilon^* = (\langle \varepsilon_1 \rangle^2 + \langle \varepsilon_2^2 \rangle + \langle \varepsilon_3^2 \rangle)^{1/2}.$$

En supposant un endommagement isotrope on écrit :

$$\dot{D} = KH(f)\,\varepsilon^{*s^*}\langle \dot{\varepsilon}^* \rangle$$

où f est le critère d'endommagement :

$$f = \varepsilon^* - \varepsilon_D \leqslant 0$$

$H(f)$ est la fonction d'Heaviside, utilisée comme en plasticité.

Le calcul de structure s'effectue par la méthode des éléments finis. L'équation d'endommagement est intégrée pas à pas, tandis que la rigidité élastique de chaque élément fini est modifiée à chaque pas pour tenir compte de l'effet du dommage sur la loi d'élasticité :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-D} - \frac{\nu}{E}\frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}{1-D}\mathbf{1}$$

on voit qu'il suffit d'introduire le module d'élasticité endommagée $\tilde{E} = E(1-D)$.

La figure 58 montre un exemple de résultat obtenu sur une poutre en béton sollicitée en flexion. La loi d'endommagement intégrée en chargement monotone est ici du type :

$$D = 1 - \frac{\varepsilon_{D_0}(1-A)}{\varepsilon^*} - \frac{A}{\exp(B[\varepsilon^* - \varepsilon_{D0}])}$$

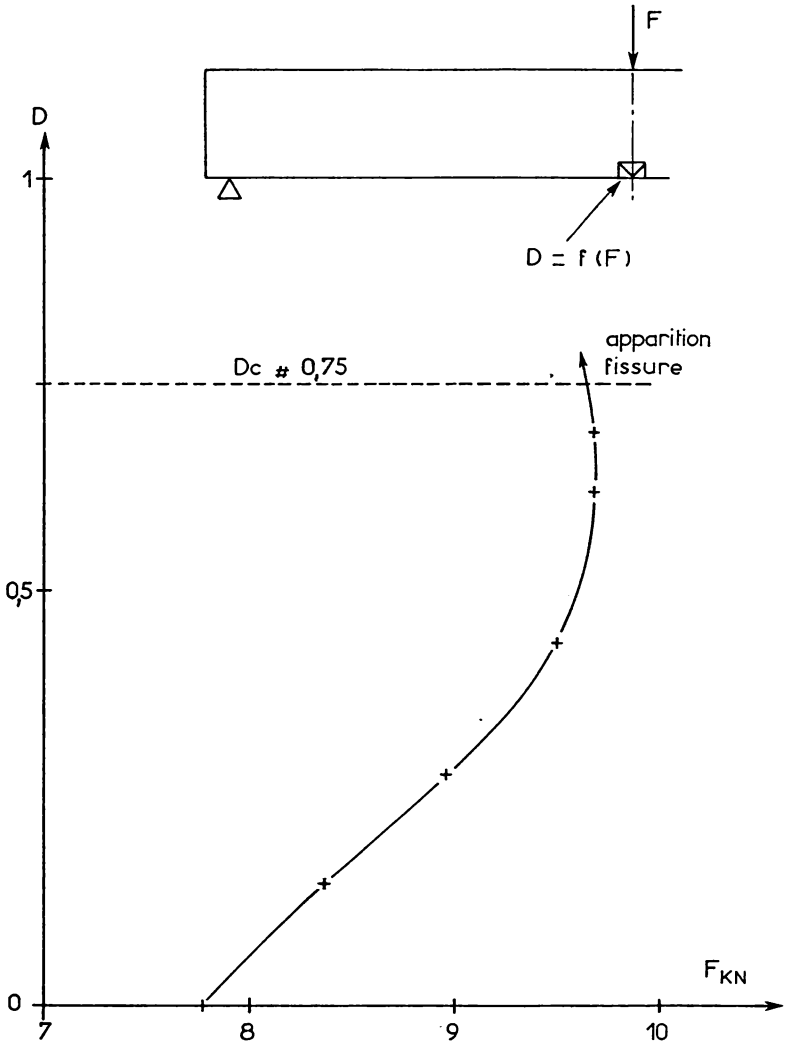


Fig. 58. Evolution de l'endommagement au point le plus critique d'une poutre en béton sollicitée en flexion (d'après J. Mazars).

La prévision de la propagation des fissures considérée comme la croissance d'une zone complètement endommagée est décrite au paragraphe 7 du chapitre 8.

avec pour le béton considéré $E = 30\,000$ MPa, $\nu = 0{,}2$; $\varepsilon_{D0} = 10^{-4}$; $A = 0{,}8$; $B = 2.10^4$.

Les expériences réalisées dans les conditions correspondantes ont confirmé à la fois la position des zones endommagées et le niveau d'endommagement pour une charge donnée (méthode de mesure par ultrasons).

7. BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE 7

KRAJCINOVIC D., LEMAITRE J. — *Continuum damage mechanics Theory and applications*. CISM Course, Springer-Verlag, Berlin (1987).

KACHANOV L.M. — *Introduction to continuum damage mechanics*. Martinus Nijhoff (1986).

CHABOCHE J. L. *Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement*. Thèse d'Etat, Université P. et M. Curie (Paris VI) (1978).

CAZAUD R., JANSSEN C., POMEY G., RABBE P. *La fatigue des métaux*. Dunod (1977).

BATHIAS C., BAILON J. P. *La fatigue des matériaux et des structures*. Maloine, Paris (1980).

OSGOOD C. C. *Fatigue design*. Pergamon press (1982).

BAZANT Z. P. *Advanced topics in inelasticity and failure of concrete*. Cement Och. Betoninstituted, Stockholm (1979).

WILSHIRE B., OWEN D. R. J. *Engineering approaches of engineering design*. Pineridge Press (1983).

Chapitre 8

FISSURATION

« *Une fissure instable est une crique qui craque* ! »

Tous les chapitres précédents traitent du comportement de l'élément de volume considéré comme milieu continu, représenté par ses variables d'état. La théorie de la fissuration décrit le comportement des solides ou structures présentant des discontinuités géométriques macroscopiques à l'échelle de la structure, discontinuités linéiques dans les milieux considérés comme bidimensionnels (plaques, coques), discontinuités surfaciques dans les milieux tridimensionnels. La théorie de l'endommagement permet de prévoir l'apparition d'une fissure macroscopique. La théorie de la fissuration permet de prévoir son évolution jusqu'à la rupture complète de la structure.

Dans les calculs de structures, ces discontinuités doivent être prises en compte car elles modifient les champs de contraintes, déformations et déplacements à une échelle telle que l'homogénéisation du milieu n'aurait plus de sens. La théorie de l'endommagement permet aussi d'étudier l'évolution des fissures, comme on le verra au paragraphe 6.4, mais des méthodes plus globales permettent d'appréhender ces problèmes d'une manière plus synthétique et plus simple, tout au moins dans les cas de structures et de chargements assez simples.

Dès 1920, Griffith montrait que la rupture d'un milieu élastique-fragile pouvait être caractérisée par une variable appelée plus tard taux de restitution d'énergie, dont la valeur critique, indépendante de la géométrie de la structure, était une caractéristique du matériau. Cette approche, qualifiée de globale, n'a été généralisée et formellement construite à partir de la thermodynamique des processus irréversibles qu'au cours des années 1970. (N.Q. Son, Lemaitre, Chaboche.) Elle montrait, en tout cas, que les phénomènes essentiels se situent au voisinage du front de fissure et qu'il est possible d'étudier le milieu fissuré macroscopique à l'aide de variables intrinsèques. Ceci est dû aux fortes concentrations de contraintes qui existent à la « pointe » des fissures et que l'analyse élastique linéaire traduit par des singularités du champ de contraintes. L'étude de ces singularités devait conduire G. R. Irwin, en 1956, à définir des facteurs d'intensité des contraintes, correspondant à des cinématiques particulières du

mouvement des fissures. Ces paramètres semi-locaux sont largement utilisés pour étudier la rupture fragile ou la rupture par fatigue des milieux bidimensionnels.

Entre ces deux approches, globale et semi-locale, se situent les intégrales de contour, intégrales de Rice (1968) et Bui (1973) qui caractérisent la singularité d'un point de vue énergétique.

La période 1960-1980 a été celle du grand essor de la mécanique de la rupture par fissuration. De très nombreux et volumineux ouvrages ont été publiés, le présent chapitre n'en représente qu'une synthèse rapide, traitée dans le même esprit que les autres chapitres. Le lecteur courageux est prié de se reporter aux quelques 6 000 pages que représentent les ouvrages les plus significatifs donnés en bibliographie de ce chapitre.

1. DOMAINE DE VALIDITÉ ET D'EMPLOI

La mécanique linéaire de la rupture par fissuration est fondée sur une analyse élastique du champ des contraintes en petites déformations. Elle donne d'excellents résultats pour les matériaux élastiques-fragiles comme les aciers à haute résistance, les verres, et, dans une moindre mesure, les bétons et les bois. La valeur critique du taux de restitution d'énergie, des facteurs d'intensité des contraintes ou de l'intégrale de Rice est une condition précise de rupture par instabilité du milieu fissuré. De même, les modèles de fatigue de Paris et ses dérivés, qui expriment le taux d'accroissement de fissure par cycle en fonction de l'amplitude de l'une de ces trois variables, permettent de prévoir correctement, c'est-à-dire avec un écart inférieur à un facteur 2 sur la vitesse, la progression des fissures dans les structures bidimensionnelles soumises à des chargements périodiques.

Les problèmes tridimensionnels se traitent avec les mêmes concepts pour les matériaux élastiques-fragiles si toutes les charges extérieures sont proportionnelles à un seul paramètre. C'est un cas fréquent dans les applications. Si le chargement n'est pas proportionnel, il faut ajouter des critères de déviation. Le mot critères est au pluriel, cela signifie que plusieurs théories sont possibles, avec d'ailleurs des domaines de validité voisins.

Avec l'intervention de la plasticité ou de la viscoplasticité, on entre dans le domaine de la mécanique non linéaire de la rupture. C'est le cas des matériaux ductiles comme les aciers à faible teneur en carbone, les aciers inoxydables, certains alliages d'aluminium, les polymères. La plasticité intervient sous deux aspects : au niveau d'une zone plastique en amont du front de fissure, source d'un effet d'histoire par développement de contraintes résiduelles ; au niveau du mécanisme de progression de fissure par superposition du mécanisme de rupture ductile. Tant que les sollicitations sont assez faibles, monotones croissantes, ou périodiques, ces effets peuvent être négligés, la mécanique linéaire de la rupture continue d'être une assez bonne approximation de la réalité physique. Par contre, pour les sollicitations importantes et fortement variables, la progression stable des fissures de rupture ductile et les effets d'histoire liés aux surcharges ne peuvent être modélisés qu'avec la prise en

compte, d'une matière ou d'une autre, de la plasticité. Les températures moyennes et élevées induisent comme pour l'endommagement des effets d'interaction fatigue-fluage.

2. ÉLÉMENTS SUR L'ANALYSE DES MILIEUX FISSURÉS

L'analyse des contraintes et des déformations au voisinage des pointes ou fronts de fissures constitue une base nécessaire pour étudier le comportement des fissures. Celui-ci est en effet gouverné par des transferts d'énergie de déformation en énergie de décohésion dans ces zones. Bien qu'une zone plastique, ou endommagée, soit toujours présente en pointe de fissure on verra que l'analyse élastique linéaire fournit une schématisation suffisamment correcte de la réalité.

2.1. Fissures initiales

La mécanique de la rupture par fissuration suppose l'existence d'une fissure initiale dans la structure étudiée et un système de sollicitations extérieures. La fissure initiale est soit une fissure créée par endommagement sous l'effet de cette sollicitation, soit un défaut créé lors de l'élaboration du matériau ou lors de sa mise en forme. Dans le premier cas, elle progressera par continuité du mécanisme d'endommagement; sans transition. Dans le second cas, il n'y a pas de relation entre l'orientation de la fissure et le système de chargement. Sa progression met en jeu un phénomène d'amorçage d'une nouvelle direction qui constitue une phase transitoire, on la qualifie de fissure incompatible.

Pour savoir s'il y a lieu ou non d'étudier cette phase dans un problème donné on appliquera la définition suivante : un système de chargement est compatible avec une fissure de configuration de front de fissure $\Gamma(x_1, x_2, x_3)$ si l'accroissement de fissure $\delta\Gamma$ qui résulte du chargement s'opère sans bifurcation au sens des critères énoncés au paragraphe 4.5, $\Gamma(x_1, x_2, x_3)$ étant l'équation de la ligne de front de fissure dans un repère orthonormé (x_1, x_2, x_3). Des exemples sont donnés sur la figure 1.

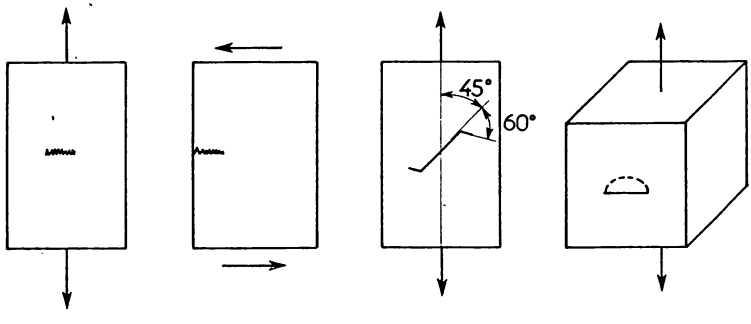


Fig. 1. Exemples de sollicitations et fissures compatibles.

2.2. Analyses élastiques

En mécanique de la rupture, le problème de base est l'analyse du champ des contraintes dans les milieux fissurés plans, élastiques linéaires. Ceci pour des raisons théoriques (en élasticité plane on a quelque chance de trouver des solutions analytiques !) et pratiques (beaucoup de constructions mécaniques sont réalisées avec des tôles qui ont une forte propension à se fissurer : « les avions volent avec de nombreuses fissures, mais on vit très bien avec » merci !).

2.2.1. *Modes de sollicitations*

Considérons une fissure dans un milieu plan. Selon la direction de la sollicitation par rapport à celle de la fissure, on distingue trois cinématiques remarquables du déplacement relatif des lèvres de la fissure, elles sont indiquées sur la figure 2 dans le repère orthonormé (x_1, x_2, x_3) :

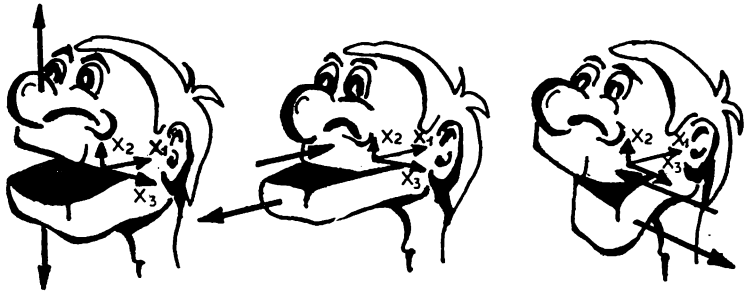


Fig. 2. Modes de sollicitations d'une fissure (dessins de Bill Bocquet).

— Mode I : ou mode d'ouverture, le champ de déplacement relatif des lèvres de la fissure est défini par la discontinuité :

$$[\![u_1]\!] = 0, \quad [\![u_2(x_1)]\!] \neq 0, \quad [\![u_3]\!] = 0.$$

— Mode II : ou mode de cisaillement plan :

$$[\![u_1(x_1)]\!] \neq 0, \quad [\![u_2]\!] = 0, \quad [\![u_3]\!] = 0.$$

— Mode III : ou mode de cisaillement antiplan :

$$[\![u_1]\!] = 0, \quad [\![u_2]\!] = 0, \quad [\![u_3(x_3)]\!] \neq 0.$$

2.2.2. *Solution asymptotique de Westergaard*

Traitons, par exemple, le problème du milieu plan fini peu épais, justiciable de l'hypothèse des contraintes planes, soumis suffisamment loin de la fissure

de longueur $2a$ à un champ de contrainte uniforme $\sigma_{ij} = 0$ sauf $\sigma_{22} = \sigma_{22}^{\infty}$, sollicitant la fissure en mode I (fig. 3).

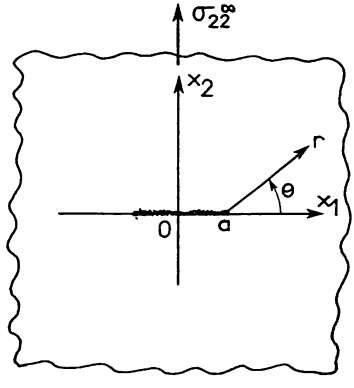


Fig. 3. Fissure sollicitée en mode *I*.

Le problème d'élasticité plane à résoudre se pose ainsi :

$$\text{Contraintes} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{Déformations } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \varepsilon_{13} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

Loi de comportement d'élasticité linéaire (chap. 4) :

$$[\varepsilon] = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \nu\sigma_{22} & (1+\nu)\,\sigma_{12} & 0 \\ (1+\nu)\,\sigma_{12} & \sigma_{22} - \nu\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \end{bmatrix}.$$

La solution du problème asymptotique au voisinage de la pointe de la fissure s'obtient par la fonction d'Airy de la variable complexe $z = x_1 + ix_2$ suivante :

$$\chi = \mathrm{Re}\,(\overline{\overline{Z}}) + x_2\,\mathrm{Im}\,(\overline{Z})$$

avec

$$\frac{d\overline{\overline{Z}}}{dz} = \overline{Z}, \quad \frac{d\overline{Z}}{dz} = Z, \quad \frac{dZ}{dz} = Z' \quad \text{et} \quad Z = \frac{K_I(\sigma_{22}^{\infty}, a)}{\sqrt{\dfrac{\pi}{a}(z^2 - a^2)}}$$

où K_I est un paramètre scalaire indépendant du point et qui ne varie qu'avec la sollicitation σ_{22}^{∞} et la demi-longueur de fissure a.

Les équations d'équilibre sont automatiquement satisfaites et les conditions de Cauchy-Riemann permettent d'effectuer le calcul des contraintes :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} = \operatorname{Re} Z - x_2 \operatorname{Im} Z' \quad *$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} = \operatorname{Re} Z + x_2 \operatorname{Im} Z'$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2} = -x_2 \operatorname{Re} Z' .$$

Avec le changement de variable $z - a = r \exp(i\theta)$ qui permet de repérer les contraintes en coordonnées polaires, l'origine étant prise à la pointe de la fissure (fig. 3) et en considérant l'approximation $r/a \ll 1$, on obtient l'expression de la fonction Z, valable lorsque r tend vers 0 (et pour le mode I)

$$Z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Les contraintes et déplacements au voisinage de la pointe de fissure s'en déduisent par :

$$[\sigma] = \frac{K_I(\sigma_{22}^{\infty}, a)}{\sqrt{2\pi r}} \times \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3}{2}\theta\right) & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3}{2}\theta \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3}{2}\theta & \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3}{2}\theta\right) \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}[3 - \nu - (1 + \nu)\cos\theta]$$

$$u_2 = \frac{K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}[3 - \nu - (1 + \nu)\cos\theta] .$$

Le déplacement d'ouverture de fissure $[u_2]$ est défini, en contraintes planes par :

$$[u_2] = u_2(r, \pi) - u_2(r, -\pi) = \frac{8 K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} .$$

* Re et Im désignent partie réelle et partie imaginaire.

Ce qui montre, qu'à la pointe de la fissure, les contraintes sont singulières en $r^{-1/2}$ et que le déplacement d'ouverture tend vers 0 comme $r^{1/2}$.

Le même problème traité avec l'hypothèse des déformations planes donne les mêmes expressions pour les contraintes avec :

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \neq 0$$

mais un champ de déplacement différent :

$$u_1 = \frac{K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}(1+\nu)\cos\frac{\theta}{2}(3-4\nu-\cos\theta)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}(1+\nu)\sin\frac{\theta}{2}(3-4\nu-\cos\theta)$$

et une ouverture de fissure exprimée par :

$$\boxed{[u_2] = \frac{8K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}(1-\nu^2)}.$$

Remarque :

Notons que la solution en contrainte plane présente une incompatibilité au niveau de la composante ε_{33} des déformations. L'hypothèse des contraintes planes entraîne $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ qui est donc singulière en $r^{-1/2}$; or les équations de compatibilité $\varepsilon_{33,11} = \varepsilon_{33,22} = \varepsilon_{33,12} = 0$ imposent à ε_{33} d'être linéaire en x_1 et x_2 donc régulière ! Cette incompatibilité n'existe pas dans la solution en déformations planes.

Des procédures similaires, appliquées à l'étude du même milieu sollicité en mode II (problème plan) et en mode III (problème antiplan), donnent les résultats suivants :

Mode II

— Contraintes et déplacements dans l'hypothèse des contraintes planes ou des déformations planes :

$$\boxed{[\sigma] = \frac{K_{II}(\sigma_{12}^{\infty}, a)}{\sqrt{2\pi r}}\begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) & \cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ \cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix}}.$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}(1+\nu)\sin\frac{\theta}{2}(C_1+2+\cos\theta)$$

$$u_2 = \frac{K_{II}}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}(1+\nu)\cos\frac{\theta}{2}(C_1-2+\cos\theta)$$

avec $C_1 = \dfrac{3 - \nu}{1 + \nu}$ en contraintes planes, $C_1 = 3 - 4\nu$ en déformations planes. Le déplacement de cisaillement plan des lèvres de la fissure est :

$$[u_1] = u_1(r, \pi) - u_1(r, -\pi)$$

$$\text{en contraintes planes :} \quad [u_1] = \frac{8 K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

$$\text{en déformations planes :} \quad [u_1] = \frac{8(1 - \nu^2) K_{II}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

Mode III

— Contraintes antiplanes :

$$[\sigma] = \frac{K_{III}(\sigma_{13}^{\infty}, a)}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & \cos\dfrac{\theta}{2} \\ -\sin\dfrac{\theta}{2} & \cos\dfrac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

— Déplacements antiplans :

$$u_1 = u_2 = 0$$

$$u_3 = \frac{4(1 + \nu)}{E} K_{III} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}.$$

— Déplacement de cisaillement antiplan des lèvres de fissure :

$$[u_3] = u_3(r, \pi) - u_3(r, -\pi)$$

$$[u_3] = \frac{8(1 + \nu) K_{III}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

2.2.3. *Solution exacte de Muskhelishvili*

Si le milieu étudié au paragraphe précédent est infini dans les deux directions, on connaît la solution exacte pour le Mode I de sollicitation. Elle s'obtient par superposition des solutions du problème trivial du milieu sans fissure et du problème à contrainte nulle à l'infini et égale à $-\sigma_{22}^{\infty}$ sur la ligne de fissure

$-a < x_1 < a$. Cette solution est analytique pour $x_2 = 0$. Dans le cas des contraintes planes, elle est la suivante :

— pour $x_1 \geqslant a$:

$$\sigma_{22}(x_2 = 0) = \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x_1}\right)^2}}$$

$$\sigma_{11}(x_2 = 0) = \sigma_{22} - \sigma_{22}^{\infty}$$

$$\varepsilon_{22}(x_2 = 0) = \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{E}\left[\frac{1 - \nu}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x_1}\right)^2}} + \nu\right]$$

— pour $0 \leqslant x_1 \leqslant a$:

$$[u_2] = 2\,u_2$$

$$[u_2] = \frac{4\,\sigma_{22}^{\infty}\,a}{E}\sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2}.$$

Si, dans l'expression de σ_{22}, on fait le changement de variable (fig. 4) $x_1 = a + r$ on trouve :

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{\sqrt{\frac{r^2 + 2\,ar}{(a + r)^2}}} = \sigma_{22}^{\infty}\frac{a + r}{\sqrt{r(2\,a + r)}}$$

ou, pour r petit devant a :

$$\sigma_{22} \to \sigma_{\infty}\sqrt{\frac{a}{r}}$$

ce qui montre que la composante $\sigma_{22}(x_2 = 0)$ est bien singulière en $r^{-1/2}$ à la pointe de la fissure $r = 0$ (ou $x_1 = a$). On retrouve la solution approchée de Westergaard en posant :

$$K_I = \sigma_{22}^{\infty}\sqrt{\pi a}\,.$$

Cette expression est celle du facteur K_I correspondant à une plaque de grande dimension contenant une fissure centrale de longueur $2\,a$ (petite), perpendiculaire à la direction de traction. Contrairement à la solution approchée, la solution ci-dessus conduit à une contrainte au loin qui est égale à la contrainte appliquée.

Par ailleurs, l'expression du déplacement d'ouverture de fissure montre que la forme de la fissure sollicitée est une ellipse. Elle est représentée avec le graphe de $\sigma_{22}(x_2 = 0)$ sur la figure 4.

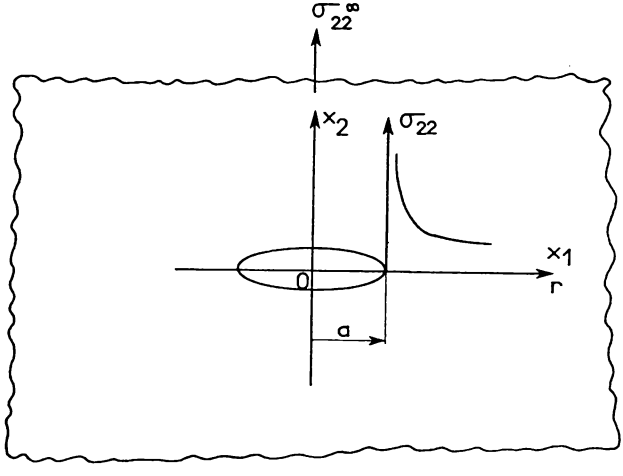


Fig. 4. Fissure dans un milieu plan infini sollicité en mode I.

2.2.4. *Facteurs d'intensité des contraintes*

Les fonctions $K_I(\sigma_{22}^{\infty}, a)$, $K_{II}(\sigma_{12}^{\infty}, a)$, $K_{III}(\sigma_{13}^{\infty}, a)$ introduites dans l'expression de la fonction d'Airy de Westergaard caractérisent finalement l'intensité de la singularité du champ des contraintes à la pointe de la fissure et sont proportionnelles à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure. On les appelle facteurs d'intensité des contraintes, respectivement en mode I, mode II et mode III.

Si l'on connaît leurs valeurs, ils permettent de déterminer complètement les champs de contraintes ou de déplacements dans la structure fissurée, considérée comme élastique. Inversement, si l'on connaît les expressions des composantes non nulles des contraintes et des déplacements, on peut déterminer les facteurs d'intensité des contraintes par les expressions suivantes qui constituent leurs définitions pour les milieux fissurés plans :

$$K_I = \lim_{r \to 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \to 0} \left(\frac{E}{8 C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2] \right)$$

$$K_{II} = \lim_{r \to 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \to 0} \left(\frac{E}{8 C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_1] \right)$$

avec

$C_2 = 1$ en contraintes planes

$C_2 = 1 - \nu^2$ en déformations planes

$$K_{III} = \lim_{r \to 0} (\sigma_{ij} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \to 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_3] \right).$$

Si, par exemple, on applique la définition de K_I à la solution de Muskhelishvili relative au milieu plan infini sollicité en mode I, on retrouve :

$$\boxed{K_I = \sigma_{22}^{\infty}\sqrt{\pi a}}.$$

De la même façon, pour un milieu plan, infini, sollicité en mode II, on trouve :

$$\boxed{K_{II} = \sigma_{12}^{\infty}\sqrt{\pi a}}.$$

L'unité des facteurs d'intensité des contraintes est le $N.m^{-3/2}$ ou le $MPa.m^{1/2}$.

2.2.5. *Intégrales de contour*

Une autre façon de caractériser la singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe des fissures est l'étude de certaines intégrales de contour que l'on peut déduire de la loi de conservation de l'énergie.

Considérons un milieu fissuré plan, élastique, sollicité en mode mixte I et II, c'est-à-dire un problème plan où les déplacements de fissure sont $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$, $u_3 = 0$. Soit un contour ouvert C_1 entourant la pointe de la fissure et soit n sa normale extérieure (fig. 5).

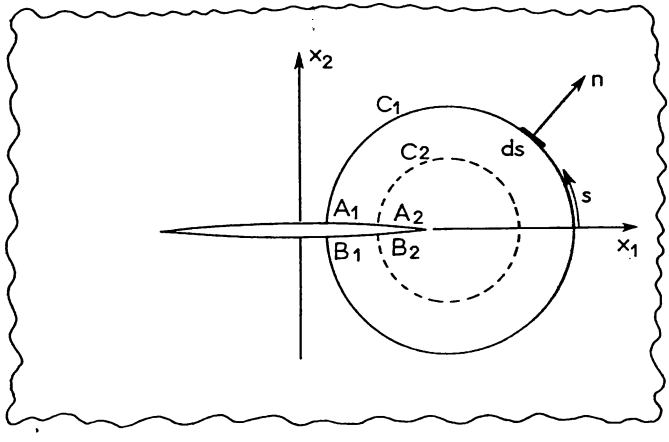


Fig. 5. Contour d'intégration.

Si w_e est la densité d'énergie de déformation élastique et w_e^* l'énergie complémentaire on écrit :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w_e}{\partial \varepsilon_{ij}^e}, \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial w_e^*}{\partial \sigma_{ij}}$$

l'intégrale de Rice est définie par :

$$J = \int_C \left(w_e \, n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \mathrm{d}s$$

l'intégrale de Bui, duale de la précédente, est définie par :

$$I = \int_C \left(- w_e^* \, n_1 + u_i \, n_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} \right) \mathrm{d}s \, .$$

Ces intégrales sont indépendantes du contour (ouvert) d'intégration. Pour le démontrer, il suffit de considérer un contour fermé constitué de deux contours ouverts C_1, C_2 et de deux segments des lèvres de la fissure $A_1 A_2$ et $B_1 B_2$. J et I sont nulles sur le contour fermé (par application du théorème de Stokes) et nulles également sur les deux segments où $n_1 = 0$ et $\sigma_{ij} n_j = 0$, d'après les conditions aux limites de contraintes nulles sur les lèvres de la fissure.

On peut donc les appliquer sur un contour voisin de la pointe de la fissure avec les champs de contraintes et de déplacements de Westergaard utilisables en mode mixte, par superposition des deux champs particuliers des modes I et II. On trouve :

$$J = I = \begin{cases} \dfrac{1}{E}(K_\mathrm{I}^2 + K_\mathrm{II}^2) \text{ en contraintes planes} \\ \dfrac{1 - \nu^2}{E}(K_\mathrm{I}^2 + K_\mathrm{II}^2) \text{ en déformations planes} . \end{cases}$$

Si l'on définit l'énergie potentielle $\mathscr{V}$ de tout le solide et l'énergie complémentaire $\mathscr{V}^*$ (les forces de volume ne sont pas considérées) :

$$\mathscr{V} = \int_{\mathscr{S}} w_e \, \mathrm{d}V - \int_{\partial \mathscr{S}_F} \vec{F}^d . \vec{u} \, \mathrm{d}S$$

$$\mathscr{V}^* = - \int_{\mathscr{S}} w_e^* \, \mathrm{d}V + \int_{\partial \mathscr{S}_u} \vec{u}^d . \boldsymbol{\sigma} . \vec{n} \, \mathrm{d}S$$

on démontre que J et I sont égales au taux de variation de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire par rapport à un accroissement de fissure (dans son prolongement) :

$$J = - \frac{\mathrm{d}\mathscr{V}}{\mathrm{d}a} \qquad I = - \frac{\mathrm{d}\mathscr{V}^*}{\mathrm{d}a} .$$

Ces quantités sont égales pour la solution exacte, mais la dualité leur donne la propriété d'encadrer la solution si elles sont calculées d'une manière appro-

chée, par une méthode cinématique pour l'intégrale J et par une méthode statique pour l'intégrale I. Pour la méthode des éléments finis, par exemple (voir § 6.1.2) on obtient :

$$J_{\text{approché}} \leqslant J = I \leqslant I_{\text{approché}}.$$

2.2.6. *Taux de restitution d'énergie*

Une approche plus globale encore consiste à étudier le bilan des énergies mises en jeu dans le processus d'accroissement de fissure. On a vu au paragraphe précédent que les intégrales de contour, caractéristiques de la singularité du champ de contraintes, l'étaient aussi du taux de variation de l'énergie potentielle de tout le solide.

Considérons toujours le milieu plan fissuré élastique d'épaisseur e de la figure 3 dans lequel la fissure croît avec une vitesse linéique $\dot{a}$ ou surfacique $\dot{A} = e\dot{a}$ et appliquons le premier principe de la thermodynamique (énoncé au chapitre 2) à tout le solide, considéré dans l'hypothèse des petites perturbations :

$$\dot{E} + \dot{K} = P_{(x)} + Q - 2\gamma\dot{A}$$

où E est l'énergie interne, K l'énergie cinétique, Q le taux de chaleur reçue par le domaine considéré, $P_{(x)}$ la puissance des efforts extérieurs qui s'écrit (en l'absence d'efforts de volume) :

$$P_{(x)} = \int_{\partial\mathscr{S}} \vec{F}.\dot{\vec{u}}\, \mathrm{d}S.$$

Par rapport au premier principe énoncé au chapitre 2, le terme supplémentaire $-2\gamma\dot{A}$ intervient car la frontière du volume considéré est évolutive (la fissure fait partie de la frontière $\partial\mathscr{S}$ du solide). $2\gamma\dot{A}$ est ainsi la puissance dissipée dans le mécanisme de décohésion, γ étant une constante caractéristique du matériau. La variation d'énergie interne s'exprime, comme au paragraphe 3.1 du chapitre 2 :

$$\dot{E} = -P_{(i)} + Q = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \mathrm{d}V + Q = \dot{W}_e + Q.$$

Le premier principe peut donc s'écrire sous la forme :

$$\dot{W}_e + \dot{K} = \int_{\partial\mathscr{S}} \vec{F}.\dot{\vec{u}}\, \mathrm{d}S - 2\gamma\dot{A}.$$

La condition de stabilité du processus est que l'énergie cinétique ne s'accroisse pas :

$$\dot{K} = \int_{\partial\mathscr{S}} \vec{F}.\dot{\vec{u}}\, \mathrm{d}S - \dot{W}_e - 2\gamma\dot{A} \leqslant 0.$$

En considérant A comme seule variable de ce bilan global, cela revient à écrire :

$$\dot{K} = \left(\int_{\partial \mathscr{S}} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial A} \, \mathrm{d}S - \frac{\partial W_e}{\partial A} - 2\gamma \right) \dot{A} \leqslant 0$$

d'où (avec $\dot{A} \geqslant 0$) :

$$\int_{\partial \mathscr{S}} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial A} \, \mathrm{d}S - \frac{\partial W_e}{\partial A} \leqslant 2\gamma .$$

La quantité au premier membre, qui représente l'énergie disponible lors d'un accroissement de fissure et qui peut être utilisée pour créer ce mécanisme, est par définition le taux de restitution d'énergie G. En utilisant le travail des forces extérieures (considéré à forces constantes) W_x, on peut écrire :

$$\boxed{G = \int_{\partial \mathscr{S}} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial A} \, \mathrm{d}S - \frac{\partial W_e}{\partial A} = \left. \frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}A} \right|_F - \frac{\partial W_e}{\partial A}}$$

La condition de rupture par instabilité des milieux élastiques-fragiles de Griffith est alors :

$$G \geqslant 2\gamma .$$

Lorsque $G = 2\gamma$, on peut dire que la rupture est « contrôlée », l'énergie cinétique n'augmentant plus.

On verra au paragraphe 4 qu'il est possible d'introduire directement par le formalisme de la thermodynamique, le taux de restitution d'énergie pour les milieux tridimensionnels élastoplastiques ou viscoplastiques, en s'affranchissant ainsi de l'hypothèse de l'élasticité linéaire. Dans le cas présent, la figure 6*a* illustre schématiquement la définition de ce taux de restitution d'énergie élastique.

Dans les milieux élastiques plans, au moins, le taux de restitution d'énergie G est relié simplement aux facteurs d'intensité des contraintes K_{I}, K_{II}, K_{III} et aux intégrales de contour J ou I. Pour cela, on exprime G sous la forme d'une intégrale de contour en transformant l'intégrale de volume de W_x en une intégrale sur la surface extérieure du solide. Les deux surfaces de fissure n'interviennent pas puisqu'elles possèdent des conditions de bords libres : contraintes nulles et déplacements libres.

Appliquons le principe des travaux virtuels (ici à des déplacements réels) à W_e en négligeant les effets dynamiques :

$$\int_{\mathscr{S}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathscr{S}} \vec{F} . \vec{u} \, \mathrm{d}S$$

$$\frac{\partial W_e}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \int_{\mathscr{S}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathscr{S}} \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial A} \cdot \vec{u} + \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial A} \right) \mathrm{d}S$$

on obtient :

$$G = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathscr{S}} \left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial A} - \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial A} \right) \mathrm{d}S .$$

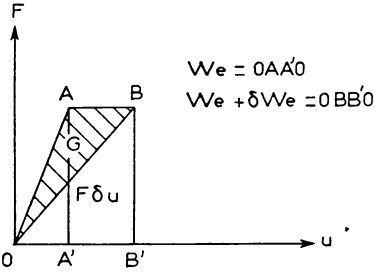


Fig. 6*a*. Schéma du bilan-énergétique en élasticité linéaire.

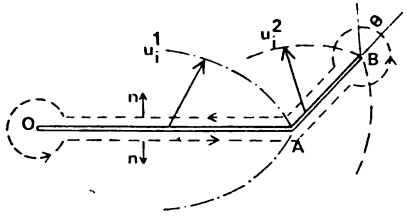


Fig. 6*b*. Définition locale du taux d'énergie restituée (d'après H. D. Bui).

Le théorème de Betti permet de démontrer que cette intégrale est indépendante du contour fermé d'intégration. e étant l'épaisseur du milieu plan, $A = ea$ et $\partial\mathscr{S} = eC$, on peut donc écrire pour tout contour fermé C :

$$\boxed{G = \frac{1}{2}\int_C \left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial a} - \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial a} \right) \mathrm{d}C}$$

et calculer cette intégrale sur un contour aplati sur la fissure, ce qui lui donne le sens d'un taux d'énergie de fermeture de fissure. On aboutit ainsi à une définition locale du taux d'énergie dissipée. En appelant $\vec{u}^{(1)}$ et $\vec{u}^{(2)}$ les champs de déplacement avant et après progression de A à B (fig. 6*b*) et $\vec{F}^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)}.\vec{n}$ les efforts de liaison sur la portion AB dans l'état (1), on trouve :

$$G\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2}\int_{AB^+} \vec{F}^{(1)}.\vec{u}^{(2)}\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_{AB^-} \vec{F}^{(1)}.\vec{u}^{(2)}\,\mathrm{d}S .$$

Dans le cas symétrique (fissure OAB rectiligne), on a :

$$G\,da = \int_{AB} \vec{F}^{(1)}.\vec{u}^{(2)}\,dS\,.$$

Ces quantités s'interprètent comme le travail nécessaire pour fermer la fissure AB de longueur da.

Dans l'expression du taux de restitution d'énergie G, établie plus haut, on peut faire apparaître la partition entre $\partial\mathscr{S}_F$ et $\partial\mathscr{S}_u$, les quantités données étant considérées comme indépendantes de la fissure :

$$G = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathscr{S}_F} \vec{F}^d \cdot \frac{\partial\vec{u}}{\partial A}\,dS - \frac{1}{2}\int_{\partial\mathscr{S}_u} \vec{u}^d \cdot \frac{\partial\vec{F}}{\partial A}\,dS$$

En utilisant les équations de Westergaard pour définir les deux champs, on aboutit à la formule d'Irwin :

$$G = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E}K_{III}^2 \quad \text{en contraintes planes},$$

$$G = \frac{1-\nu^2}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E}K_{III}^2 \quad \text{en déformations planes}.$$

En comparant avec les formules obtenues pour J et I au paragraphe précédent, on voit donc que pour les problèmes élastiques plans, le taux de restitution d'énergie est strictement égal à ces intégrales :

$$G = J = I\,.$$

2.2.7. *Problèmes tridimensionnels*

Les problèmes tridimensionnels d'élasticité présentent de grandes difficultés et peu de solutions explicites existent pour caractériser les champs de contraintes et déplacements au voisinage de fissures surfaciques dans les milieux à trois dimensions.

Bien que l'approche globale développée au paragraphe 4.2 semble plus appropriée pour l'étude de la fissuration tridimensionnelle, on donne ici la définition des facteurs d'intensité des contraintes dont l'utilisation peut présenter un intérêt dans certains cas particuliers.

La fissure plane étant définie par sa surface A et sa ligne de front Γ repérée dans un repère (O, x_1, x_2, x_3) dont l'axe x_3 est normal au plan de la fissure (fig. 7) ; soit (M, ntv) le repère orthonormé local au point M de la ligne de front, défini par la normale $\vec{n}$ parallèle à x_3 et la tangente t à Γ en M et soit (M, r) une direction quelconque dans le plan (M, n, v) sur laquelle la mesure de l'abscisse est r :

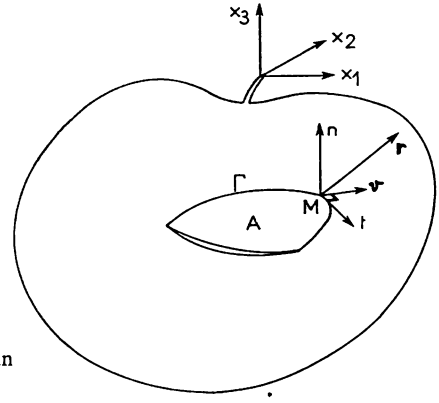


Fig. 7. Fissure dans un milieu tridimensionnel.

Les facteurs d'intensité des contraintes en M s'expriment en fonction des limites des composantes antiplanes du tenseur des contraintes dans le repère local pour la définition statique ou en fonction des discontinuités des composantes des déplacements relatifs des lèvres de la fissure pour la définition cinématique.

$$K_{\mathrm{I}}(M) = \lim_{r\to 0} (\sigma_{33}\sqrt{2\pi r}) = \lim_{r\to 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} [u_3] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)$$

$$K_{\mathrm{II}}(M) = \lim_{r\to 0} (\sigma_{3v}\sqrt{2\pi r}) = \lim_{r\to 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} [u_v] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)$$

$$K_{\mathrm{III}}(M) = \lim_{r\to 0} (\sigma_{3t}\sqrt{2\pi r}) = \lim_{r\to 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} [u_t] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)$$

On remarque que ces expressions sont identiques à celles qui définissent les facteurs d'intensité des contraintes dans les milieux plans en déformations planes. Ceci est un résultat tout à fait général : les valeurs asymptotiques des discontinuités de déplacements relatifs des lèvres de la fissure sont identiques dans les deux cas.

2.3. Analyses élasto-plastiques

L'analyse élastique linéaire cerne d'assez près la réalité physique pour les matériaux élastiques fragiles ou peu ductiles, mais elle est insuffisante lorsque les déformations plastiques interviennent dans un volume dont la dimension caractéristique dépasse 5 à 20 % de la longueur de la fissure. La connaissance des contraintes et des déformations locales dans le cas de la plasticité non confinée nécessite des analyses élastoplastiques assez complexes. Dans la

pratique, on utilise soit des corrections de zone plastique, soit des paramètres globaux déduits d'une analyse élastique non linéaire.

2.3.1. *Estimation de la zone plastique en pointe de fissure*

Une estimation grossière des dimensions de la zone plastique d'une fissure peut être obtenue avec la solution asymptotique de Westergaard. Considérons donc toujours le milieu plan fissuré de la figure 3, sollicité en mode I, et cherchons le lieu des points pour lesquels l'état de contraintes satisfait le critère de limite d'élasticité de Von Mises (voir chap. 5).

$$\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)] = \sigma_Y^2 .$$

En introduisant dans cette formule les expressions des contraintes de Westergaard, fonction de l'angle θ et du rayon polaire r, on trouve :

en contraintes planes : $\dfrac{K_I^2}{2\pi r}\cos^2\dfrac{\theta}{2}\left(1 + 3\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right) = \sigma_Y^2$

en déformations planes : $\dfrac{K_I^2}{2\pi r}\cos^2\dfrac{\theta}{2}\left[(1 - 2\nu)^2 + 3\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right] = \sigma_Y^2$

d'où l'on tire la valeur r_Y du rayon pour laquelle le critère est satisfait :

$$r_Y = \begin{cases} \dfrac{K_I^2}{2\pi\sigma_Y^2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}\left(1 + 3\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right) & \text{en contraintes planes} \\ \dfrac{K_I^2}{2\pi\sigma_Y^2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}\left[(1 - 2\nu)^2 + 3\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right] & \text{en déformations planes} \end{cases}$$

Si r_Y est petit par rapport à la longueur de fissure ($r_Y/a < 0{,}2$), on peut admettre que le champ de contraintes calculé en élasticité est peu perturbé par la présence des déformations plastiques (sauf bien sûr pour $0 < r < r_Y$) et les expressions de r_Y constituent des approximations de la frontière de la zone plastique. Les valeurs ρ de r_Y sur l'axe de la fissure sont :

— en contraintes planes :

$$r_Y(\theta = 0) = \rho = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_Y^2},$$

— en déformations planes :

$$r_Y(\theta = 0) = \rho = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_Y^2}(1 - 2\nu)^2 .$$

Les valeurs maximales de r_Y en fonction de l'angle polaire θ sont :

— en contraintes planes :

$$r_Y(\theta = 70{,}5^o) = \frac{K_I^2}{1{,}5\,\pi\sigma_Y^2},$$

— en déformations planes (pour $\nu = 0{,}3$) :

$$r_Y(\theta = 86{,}9^o) = \frac{K_I^2}{2{,}4\,\pi\sigma_Y^2}.$$

La figure 8 montre le graphe de la frontière de la zone plastique dans le cas d'une tôle épaisse pour laquelle l'approximation des contraintes planes est considérée comme bonne en surface et l'approximation des déformations planes comme bonne dans le plan médian.

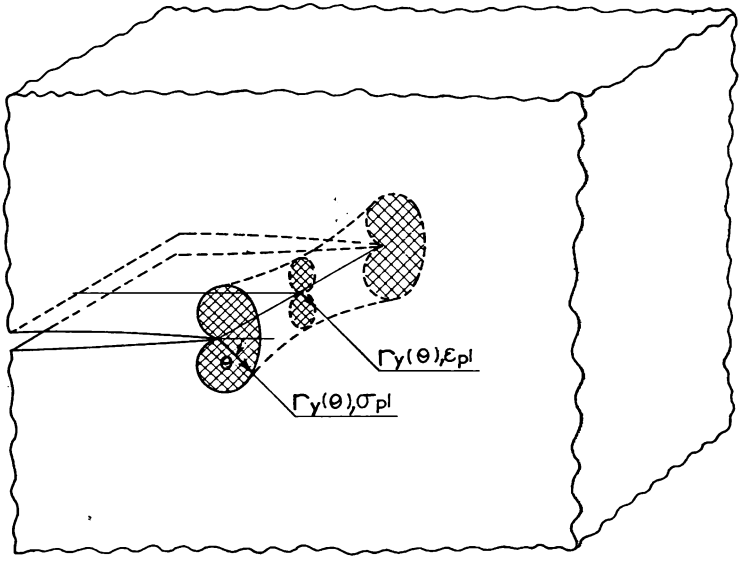


Fig. 8. Zone plastique en contraintes planes et déformations planes.

Ces estimations ne tiennent pas compte du rééquilibrage de la contrainte. La correction plastique d'Irwin, justifiée par des analyses exactes en mode III, suppose l'existence d'une petite zone plastique de longueur ρ. Dans l'intervalle $0 < x_1 < \rho$ où la solution élastique dépasse la limite d'élasticité, σ_{22} est limité à σ_Y, l'excès de contrainte devant être réparti plus loin, avec $\sigma_{22} = \sigma_Y$ pour $\rho < x_1 < 2\,\rho$ et suivant la loi en $K_I'(x_1 - r_Y)^{-1/2}$. Ce champ corrigé est décalé de ρ, sans changement d'intensité (voir fig. 9*a*) : les modèles de plasticité confinée

admettent le développement du champ élastique en dehors de la zone critique plastique sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I'}{\sqrt{2\,\pi r}} g_{ij}(\theta),$$

avec r et θ comptés à partir du centre de la région plastique. Dans le cas de la plaque infinie en mode I, avec fissure centrale de longueur $2\,a$, tout se passe comme si la longueur effective de fissure était $2\,a' = 2(a + \rho)$, le facteur d'intensité des contraintes s'exprimant :

$$K_I' = \sigma_{22}^{\infty}\sqrt{\pi(a + \rho)}.$$

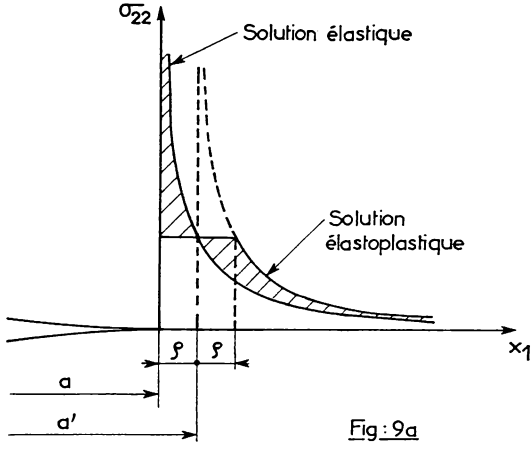


Fig : 9a

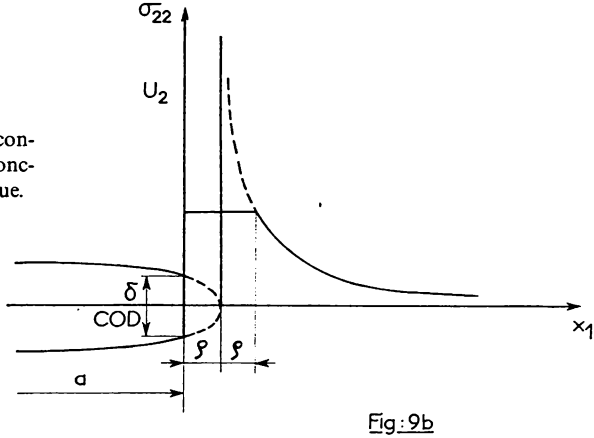


Fig : 9b

Fig. 9. Champs de contraintes corrigés en fonction de la zone plastique.

Notons aussi le modèle plus rigoureux de Dugdale-Barenblatt qui introduit la notion de forces de cohésion et conduit à une solution complète en plasticité plane, avec le critère de Tresca. La demi-zone plastique s'exprime alors en contraintes planes :

$$\rho = \frac{\pi}{16} \frac{K_I^2}{\sigma_Y^2}$$

valeur peu différente de $K_I^2/2\,\pi\sigma_Y^2$. Ce modèle permet de calculer l'ouverture de fissure, définie par la discontinuité du déplacement u_2, calculée au point $x_1 = a$ (fig. 9*b*). Cette quantité, souvent appelée COD (« Crack Opening Displacement »), est approximativement :

$$\boxed{\delta = \left[u_2(x_1 = a)\right] = \sqrt{2}\,\frac{K_I^2}{E\sigma_Y}}$$

la même notion, introduite dans le modèle d'Irwin conduit à :

$$\delta = \frac{8}{2\,\pi} \frac{K_I^2}{E\sigma_Y}.$$

2.3.2. *Intégrales de contour en plasticité et viscoplasticité*

Intégrale de Rice en plasticité

La plasticité est traitée comme l'élasticité non linéaire, en supposant des relations de type Hencky (chap. 5). Ce paramètre n'est donc formellement utilisable que pour le chargement monotone proportionnel puisque ni la décharge, ni les états de contrainte résiduels ne sont pris en compte. Le matériau élastique non linéaire est décrit par l'énergie de déformation :

$$W(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \qquad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

et l'intégrale de Rice est définie comme dans le cas linéaire par :

$$\boxed{J_p = \int_C \left(W(\varepsilon)\, n_1 - \sigma_{ij}\, n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \mathrm{d}s}$$

là encore, elle est indépendante du choix du contour arbitraire entourant la pointe de la fissure. On peut exprimer cette quantité à partir de l'énergie potentielle :

$$\mathscr{V} = \int_{\mathscr{S}} W(\varepsilon)\,\mathrm{d}V - \int_{\partial \mathscr{S}_F} F_i^d\, u_i\,\mathrm{d}S$$

$$J_p = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{V}}{\mathrm{d}A}.$$

En plasticité sans décharge, J_p peut ainsi être considérée comme la variation d'énergie potentielle de deux structures dont les fissures diffèrent d'une longueur da, comme illustré sur la figure 10 pour le cas à effort imposé.

La variable J_p est utilisée dans le cas de la plasticité non confinée dans deux buts complémentaires :

— servir de paramètre global associé au processus de rupture lorsque la mécanique linéaire de la rupture est en défaut,

— permettre une détermination des champs de contrainte et de déformation au voisinage de la pointe de la fissure.

Dans le cas où l'on traduit la courbe de traction par une fonction puissance

$$\sigma \sim \varepsilon^{1/M}$$

le champ des contraintes peut se mettre sous la forme (α étant un coefficient) :

$$\sigma_{ij} = \alpha\left(\frac{J_p}{r}\right)^{\frac{1}{M+1}} \sigma_{ij}(\theta, M) .$$

Lorsque $M = 1$ on retrouve le cas de l'élasticité (avec $J_p = K_I^2/E$ en contraintes planes, par exemple). Toujours avec la même loi, l'expression de J_p est donnée par :

$$J_p = h(a, M)\, \sigma_\infty^M$$

où σ_∞ est la contrainte « à l'infini » (loin de la fissure) et où la fonction h peut être tabulée en fonction de la longueur de fissure et de l'exposant d'écrouissage (on utilise pour cela des calculs par éléments finis). Notons bien que cette formulation n'est valable que pour la plasticité généralisée, qu'elle présente des incertitudes dans le régime de transition et que, tout au moins dans le cas de la fonction puissance portant sur la déformation totale, elle néglige l'élasticité. De plus, elle ne correspond pas à une description physique correcte puisque la décharge n'a pas de sens.

$$\Delta W = OA'B'O - OABO =$$
$$= AA'B'BA - OAA'O$$
$$J\Delta a = F\Delta u - \Delta W =$$
$$= OAA'O .$$

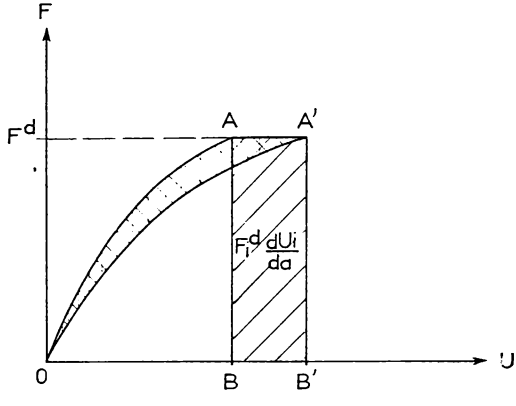


Fig. 10. Définition de l'intégrale de Rice en plasticité.

Intégrale de contour en viscoplasticité

Là encore, cette intégrale est introduite pour le cas de la viscoplasticité généralisée. En principe, elle n'est justifiée que dans le cas stationnaire. L'élasticité est négligée et l'on suppose une loi puissance pour décrire le fluage secondaire, la loi d'Odquist (chap. 6) :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sigma_{eq}}{\dot{\lambda}}\right)^N \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_{eq}}$$

où σ'_{ij} est le déviateur et σ_{eq} la contrainte équivalente de Von Mises. En utilisant l'analogie avec le cas précédent, c'est-à-dire l'élasticité non linéaire, l'intégrale C^* (notée quelquefois J) est définie par :

$$\boxed{C^* = \int_C \left(W^*(\dot{\varepsilon})\, n_1 - \sigma_{ij}\, n_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_1}\right) \mathrm{d}s}$$

avec :

$$W^*(\dot{\varepsilon}) = \int_0^{\dot{\varepsilon}} \sigma_{ij}\, \mathrm{d}\dot{\varepsilon}_{ij}\,.$$

Cette intégrale peut encore être mise sous la forme :

$$C^* = h_1(a, N)\, \sigma_\infty^{N-1}\,.$$

Le paramètre C^* peut être employé pour corréler des essais de fissuration en fluage. Notons qu'une utilisation correcte de cette intégrale doit faire appel à des tables de la fonction $h_1(a, N)$ obtenues par calcul pour chaque type d'éprouvette. Des abus sont quelquefois commis en utilisant des valeurs mesurées de C^*, à partir d'une mesure directe du COD en cours d'essais. Les seules corrélations valables sont celles où intervient au moins une vérification par calcul (ou par des tables précalculées). Le domaine de validité de cette intégrale C^* est par ailleurs très limité : essentiellement le fluage (secondaire), lorsque la zone viscoplastique n'est plus du tout confinée. Elle n'est pas applicable en situation de relaxation par exemple.

3. ASPECTS PHÉNOMÉNOLOGIQUES

3.1. Variables gouvernant le comportement des fissures

3.1.1. *Taux de restitution d'énergie. Intégrales de contour et facteurs d'intensité des contraintes*

Trois types de variables caractérisent donc la perturbation du champ de contraintes due à la présence d'une fissure : les facteurs d'intensité des contrain-

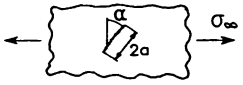
tes, les intégrales de contour et le taux de restitution d'énergie G. On a vu au paragraphe 2.2.6 que G définit le caractère stable ou instable de la fissure. Si $G \geqslant 2\gamma$ la fissure s'accroît brutalement. On verra au paragraphe 4.2 que G est la variable thermodynamique associée à l'aire de fissure A, ce qui justifie une relation phénoménologique entre G et A. De telles relations phénoménologiques ont été mises en évidence empiriquement pour la rupture ductile et pour la croissance des fissures par fatigue. Les variables G, J et K étant reliées entre elles, au moins pour les milieux plans élastiques linéaires, le comportement des fissures peut être décrit à l'aide de l'une quelconque d'entre elles.

Historiquement ce sont les facteurs d'intensité des contraintes qui ont été les plus utilisés, c'est donc ces variables que nous employons pour présenter les résultats expérimentaux de base qui servent à la modélisation. On trouvera ci-après leurs expressions analytiques pour un certain nombre de situations simples.

3.1.2. *Valeurs usuelles de facteurs d'intensité des contraintes* (d'après H. D. Bui, B. Barthelemy)

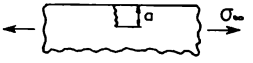
— Fissure dans un milieu infini

$$\begin{cases} K_{\mathrm{I}} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \cos^2 \alpha \\ K_{\mathrm{II}} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \cos \alpha \sin \alpha . \end{cases}$$



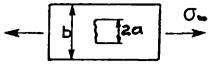
— Fissure latérale dans un milieu semi-infini

$$K_{\mathrm{I}} = 1{,}122\, \sigma_\infty \sqrt{\pi a} .$$



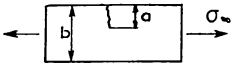
— Fissure centrale dans une plaque finie :

$$K_{\mathrm{I}} \simeq \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \left[1 - 0{,}025 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 0{,}06 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right] \left[\cos \frac{\pi a}{2b} \right]^{-1/2} .$$



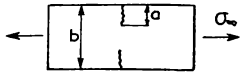
— Fissure latérale dans une plaque finie :

$$K_{\mathrm{I}} \simeq \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \left(\frac{2b}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b} \right)^{1/2} \frac{0{,}752 + 2{,}02 \dfrac{a}{b} + 0{,}37 \left(1 - \sin \dfrac{\pi a}{2b} \right)^3}{\cos \dfrac{\pi a}{2b}} .$$



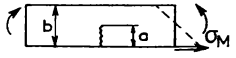
— Double fissure latérale dans une plaque finie :

$$K_I \simeq \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \left[1 + 0{,}122 \cos^4\left(\frac{\pi a}{2b}\right)\right] \left[\frac{2b}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b}\right]^{1/2}.$$



— Fissure dans un barreau sollicité en flexion :

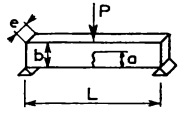
$$K_I \simeq \sigma_M \sqrt{\pi a} \left[1{,}122 - 1{,}4\frac{a}{b} + 7{,}33\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13{,}08\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 14\left(\frac{a}{b}\right)^4\right].$$



— Fissure dans un barreau en flexion 3 points $\left(\frac{L}{b} = 8\right)$:

$$K_I \simeq \frac{3\,PL\sqrt{a}}{2\,b^2\,e} \times$$

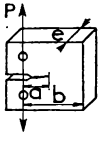
$$\times \left[1{,}96 - 2{,}75\frac{a}{b} + 13{,}66\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 23{,}98\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 25{,}22\left(\frac{a}{b}\right)^4\right].$$



— Eprouvette CT 15 :

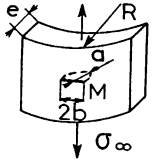
$$K_I \simeq \frac{P\sqrt{a}}{be} \times$$

$$\times \left[29{,}6 - 185{,}5\frac{a}{b} + 655{,}7\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1{,}017\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 638{,}6\left(\frac{a}{b}\right)^4\right].$$



— Fissure semi-elliptique dans une coque :

$$K_I(M) \simeq 0{,}5(1{,}2\,\pi a)^{1/2}\,\sigma_\infty\left[2 + \frac{0{,}731\,e}{R(1-\nu^2)}\left(\frac{b}{a}\right)^{0{,}043}\left(\frac{e}{a}\right)^{0{,}047}\right].$$

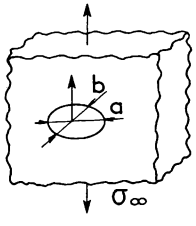


— Fissure elliptique dans un milieu infini :

$$K_I(\theta) = \frac{\sigma_\infty}{H}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{1/4}$$

avec

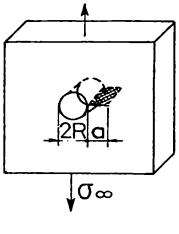
$$H = \int_0^{\pi/2}\left(1 - \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\sin^2\theta\right)^{1/2} d\theta\,.$$



— Fissure émanant d'un trou :

$$K_I \simeq f\left(\frac{a}{R}\right)\sigma_\infty\sqrt{\pi a}\,.$$

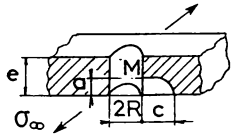
$\frac{a}{R}$	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5
$f\left(\frac{a}{R}\right)$	3,39	2,73	2,30	1,73	1,37	1,06	0,81



— Fissure non traversante émanant d'un trou :

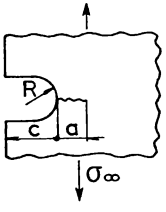
$$K_I(M) \simeq 3{,}36\ \sigma_\infty \sqrt{\frac{\pi a}{H}} \left(\frac{2e}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2e}\right)^{1/2}$$

$$H = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \left[1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2\right] \sin^2 \theta\right)^{1/2} d\theta .$$



— Fissure dans une entaille :

$$K_I \simeq 1{,}1215\ \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \sqrt{1 + \frac{c}{a}} \quad \text{pour} \quad \frac{a}{R} \geqslant 0{,}4 .$$



3.2. Résultats expérimentaux élémentaires

3.2.1. *Rupture fragile. Ténacité de matériaux usuels*

Si l'on soumet une éprouvette fissurée d'un matériau élastique fragile à l'action d'une sollicitation monotone croissante en mode I, sa réponse est d'abord élastique sans accroissement de fissure. Puis, lorsque les conditions d'instabilité sont atteintes, il y a propagation brutale de la fissure jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

Les graphes correspondants sont indiqués sur la figure 11. Les matériaux courants n'étant jamais parfaitement fragiles, en pratique la détermination de la force critique de rupture F_c présente quelques difficultés lorsque la courbe possède un palier ou une non-linéarité importante. La méthode conventionnelle est indiquée sur la figure 11.

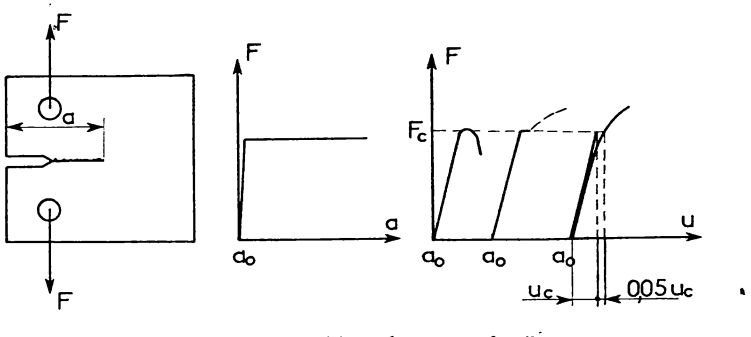


Fig. 11. Force critique de rupture fragile.

Connaissant la géométrie de l'éprouvette, on peut calculer le facteur d'intensité des contraintes en mode I correspondant à la force critique :

$$K_{Ic} = K_I(F_c).$$

L'expérience montre que pour une épaisseur d'éprouvette donnée, sa valeur est quasi indépendante de la longueur de la fissure et de la forme de l'éprouvette.

— En état de contraintes planes, on obtient le facteur d'intensité des contraintes critique de rupture fragile des tôles minces : K_{Ic}^{σ}.

— En état de déformations planes, on obtient le facteur d'intensité des contraintes critique qui caractérise la ténacité du matériau, K_{Ic}, qui peut être de 10 à 20 % inférieur à K_{Ic}^{σ}, quelquefois même plus faible d'un facteur 2 à 3. On retrouve là les incompatibilités liées à l'hypothèse des contraintes planes (voir § 2.2.2). Pour réaliser la condition de déformation plane sur 90 à 95 % de l'épaisseur de l'éprouvette cette dernière doit vérifier la condition :

$$e \geqslant 2{,}5\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_Y}\right)^2.$$

L'action des milieux environnants agressifs diminue la ténacité des matériaux. En corrosion sous contrainte, par exemple, la notion de rupture fragile K_{Ic} est remplacée par une valeur critique à long terme $K_{ISCc} < K_{Ic}$. Pour les milieux fortement anisotropes, on peut définir également la ténacité en mode II, K_{IIc}, et en mode III, K_{IIIc}. En général, cependant, les modes II et III purs n'existent pas, ils sont instables et il y a alors déviation de la fissure vers un mode de type I.

Ténacité de matériaux usuels à température ambiante (d'après B. Barthelemy, H. H. Kausch).

Matériaux	Traitement	K_{Ic} MPa.m$^{1/2}$	Matériaux	Traitement	K_{Ic} MPa.m$^{1/2}$	Matériaux	Remarque	K_{Ic} MPa.m$^{1/2}$
Alliages d'aluminium			Aciers			Polymère	≃	3
2024	T 351	≃ 35	30 CD 2 B	Trempé	≃ 110			
—	T 851	≃ 25		revenu	$K_{ISCc} \simeq 30$			
7075	T 651	≃ 27	30 CND 8	Trempé	≃ 120	Béton	≃	1
—	T 351	≃ 35			$K_{ISCc} \simeq 20$			
Alliages de titane			45 CD 4	Trempé revenu	≃ 90			
T 21		≃ 80	18 Ni (300) Marag		$K_{ISCc} \simeq 30$	Bois	≃	2
T 68		≃ 130			≃ 65			
					$K_{ISCc} \simeq 8$			

3.2.2. *Rupture ductile, courbes de résistance ou courbes « R »*

La même expérience que celle décrite au paragraphe précédent, réalisée sur un matériau ductile, montre la possibilité d'une croissance stable de la fissure avant la rupture par instabilité comme l'indique la figure 12. Le terme « stable » est lié au fait que la fissure ne progresse plus si la force extérieure est maintenue constante.

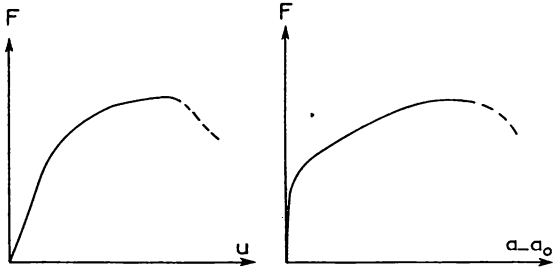


Fig. 12. Graphes de rupture ductile.

Connaissant la force sollicitatrice F et la longueur de fissure a, par calculs ou par mesures de raideur sur l'éprouvette considérée (voir § 4.2.2), on peut transformer le graphe $F(a)$ en un graphe $K_I(a)$ ou $G(a)$.

Pour une épaisseur donnée, l'expérience montre que la courbe obtenue est quasi indépendante de la géométrie de l'éprouvette; elle est donc caractéristique du matériau et de l'épaisseur. Par contre, le point d'instabilité dépend de la longueur de fissure. Il est facile de le montrer en reprenant l'analyse énergétique du paragraphe 2.2.6. La condition de rupture fragile $G \geqslant 2\gamma$ doit être remplacée par une condition de rupture ductile où la résistance du milieu fissuré est une fonction de la longueur de fissure $R(a)$. Pendant la croissance stable on a :

$$G(a, F) = R(a - a_0) .$$

Ce cas est représenté par le point P_S de la figure 13. Le graphe de la fonction $G(a)$ (approximativement linéaire en a) est tel que, pour tout accroissement virtuel de fissure à force constante, on a :

$$G < R .$$

Par contre, lorsque la force est telle que la ligne $G(a, F = \text{Cte})$ est tangente à la courbe $R(a - a_0)$ au point P_i d'abscisse a_c tout accroissement virtuel de fissure entraîne :

$$G > R .$$

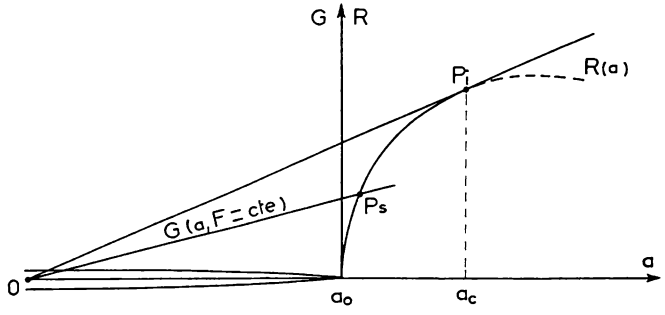


Fig. 13. Courbe « R ».

C'est la condition d'instabilité, la longueur critique de fissure a_c étant définie par :

$$G = R \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial a} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}a}.$$

Compte tenu de l'allure des courbes « R », on voit que a_c est d'autant plus grand que a_0 est grand. Pour la détermination expérimentale des courbes « R », on a donc intérêt à opérer sur des éprouvettes possédant de grandes fissures initiales, mais avec un « ligament » restant assez grand.

3.2.3. *Rupture par fatigue*

Considérons toujours la même éprouvette d'un matériau fragile ou ductile, sollicitée en mode I, mais cette fois par une force périodique définie par l'amplitude de l'effort ΔF et le rapport de sa valeur minimale F_m à sa valeur maximale F_M : $R = F_m/F_M$. En général, la fissure progresse avec un taux de croissance par cycle $\delta a/\delta N$ qui augmente avec la longueur de fissure. Si la fissure initiale est une fissure artificielle ou non compatible avec le chargement appliqué, un certain nombre de cycles N_i est nécessaire pour amorcer la propagation (ou provoquer une déviation de la fissure). Lorsque la longueur de fissure associée à l'effort remplit les conditions d'instabilité, il y a rupture brutale (fig. 14).

3.2.3.1. *Loi de Paris*

Ce même type d'expériences, réalisé sur des éprouvettes de géométries différentes toujours sollicitées en mode I et pour des forces minimales faibles $R \simeq 0$, montre qu'une relation simple existe entre le taux de croissance par cycle et l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes défini par :

$$\Delta K = K_r(a)\,\Delta F$$

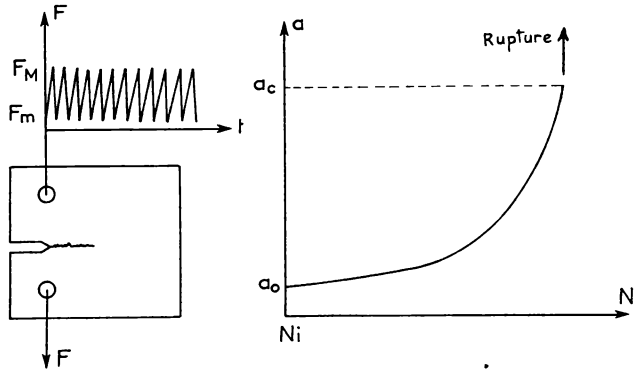


Fig. 14. Croissance de fissure par fatigue.

où K_r est le facteur d'intensité des contraintes réduit, correspondant à une sollicitation unité :

$$K_r = K_I(a, F = 1) .$$

En 1962, P. Paris a proposé

$$\boxed{\frac{\delta a}{\delta N} = C\,\Delta K^{\eta}}$$

où C et η sont deux constantes caractéristiques de chaque matériau. La figure 15 montre un exemple où sont comparés des résultats d'expériences réalisées sur des panneaux fissurés en leur milieu, sollicités en traction cyclique.

L'influence du chargement moyen, c'est-à-dire du rapport de charge $R = K_m/K_M$, n'est pas correctement reproduite par la loi de Paris. Elle peut être corrigée par une fonction d'influence multiplicatrice :

$$\frac{\delta a}{\delta N} = C(K_M . f(R))^{\eta} .$$

La loi de Paris correspond à $f(R) = 1 - R$. Différentes expressions peuvent être choisies pour f, elles sont illustrées sur la figure 16 avec quelques résultats expérimentaux concernant l'alliage léger AU 4 G 1 – T 3.

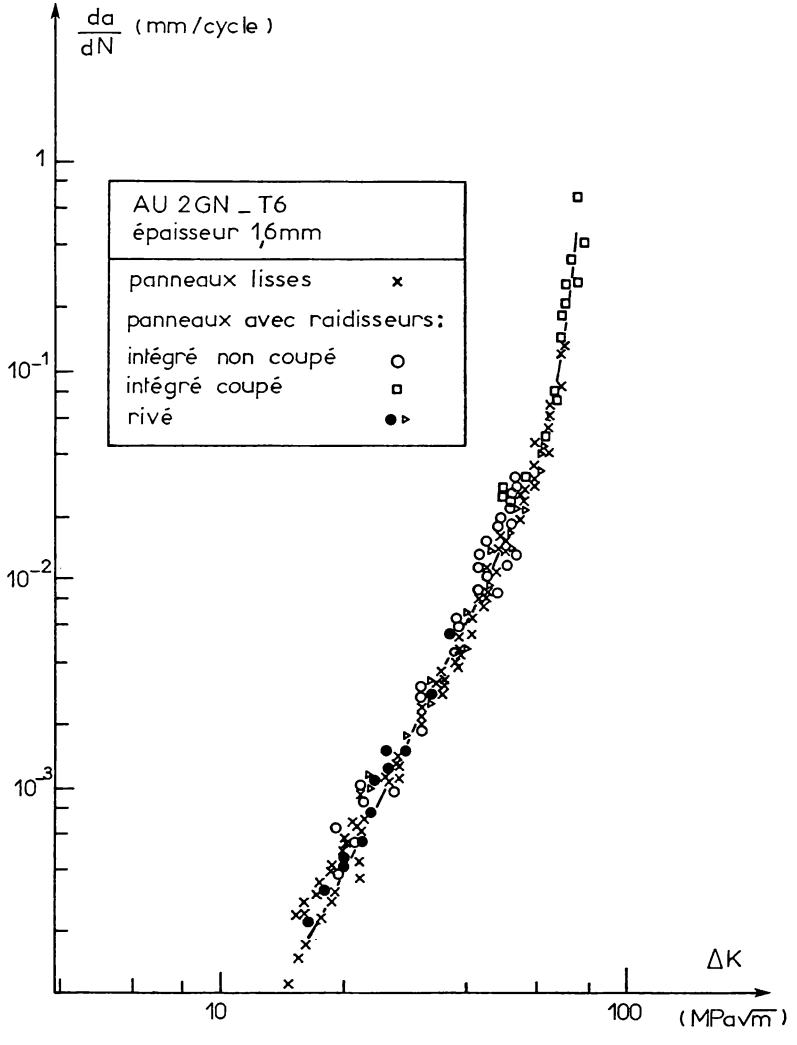


Fig. 15. Courbe de fissuration par fatigue.
Alliage AU 2 GN T 6. $T = 20\ ^{o}C$ (d'après G. Baudin).

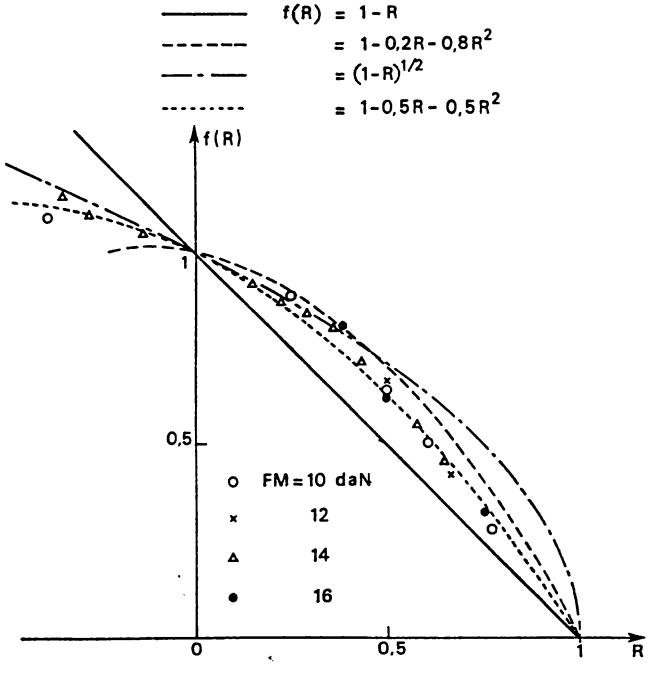


Fig. 16. Fonctions d'influence du rapport de charge.

Exemples de valeurs des coefficients de la loi de Paris (d'après G. Baudin, B. Barthelemy)

Matériaux	c $\frac{mm}{cycle}(MPa\sqrt{m})^{-\eta}$	η	Matériaux	c $\frac{mm}{cycle}(MPa\sqrt{m})^{-\eta}$	η	Matériaux	c $\frac{mm}{cycle}(MPa\sqrt{m})^{-\eta}$	η
Alliage d'Al			Aciers			TA 6 Zr 5 D	$1{,}04.10^{-12}$	5,7
AU 4 G T 3	10^{-7}	2,9	NiCrMoV	$6{,}4.10^{-14}$	1.4	NK 17 CDAT	$2{,}27.10^{-8}$	2,8
			35 CD 4	$5{,}2.10^{-9}$	2.9	(600 °C)		
AU 2 GN	$1{,}2.10^{-8}$	4,2	CrMoV	$1{,}3.10^{-10}$	6.7	NC 20 K 14 V	$1{,}8.10^{-7}$	2,2
			32 CDV 13	$5{,}01.10^{-8}$	2.3	(700 °C)		

3.2.3.2. *Loi de Forman*

Si l'on regarde attentivement la courbe typique de la figure 15, on remarque que la loi de Paris ne rend pas compte de l'existence des deux asymptotes qui définissent la rupture par instabilité et l'existence d'un seuil au-dessous duquel la croissance des fissures est quasi nulle :

$$K_I \to K_{Ic} \Rightarrow \frac{\delta a}{\delta N} \to \infty$$

$$K_I \to K_{th} \Rightarrow \frac{\delta a}{\delta N} \to 0 .$$

Parmi la centaine de modèles mathématiques nés de l'imagination débordante des chercheurs au cours des années 1970 pour traduire ces effets, citons le modèle de Forman :

$$\frac{\delta a}{\delta N} = \frac{C_1 \, \Delta K^{\eta_1}}{(1 - R)(K_{Ic} - K_M)}$$

que l'on peut améliorer en introduisant le seuil de non-fissuration K_{th} et un coefficient m qui permet de mieux ajuster l'effet de la force moyenne :

$$\boxed{\frac{\delta a}{\delta N} = C_2 \left(\frac{K_M \dfrac{1 - R}{1 - mR} - K_{th}}{K_{Ic} - K_M} \right)^{\eta_2}} .$$

Ce coefficient m est souvent de l'ordre de 0,5.

3.2.3.3. *Effets d'histoire du chargement*

La zone plastique en pointe de fissure induit un champ de contraintes résiduelles qui a tendance à retarder l'ouverture de la fissure à sollicitation croissante. Lorsque la sollicitation n'est plus périodique, ces effets dépendent de l'histoire des déformations plastiques locales. L'effet caractéristique le plus important est l'effet de retard à la fissuration induit par les surcharges.

Si l'on interrompt d'un cycle un chargement périodique (fig. 17) pour le remplacer par une charge d'amplitude plus importante, le taux de croissance de fissure qui s'ensuit, après une courte accélération, diminue fortement et ne reprend la valeur qu'il aurait eue en l'absence de surcharge qu'après un certain nombre de cycles appelé retard à la fissuration. Cet effet indiqué sur la figure 17 s'explique qualitativement par le schéma de Wheeler.

S'il n'y avait pas eu de surcharge, la fissure progresserait avec une zone plastique de longueur égale à :

$$\rho_{ss} = \frac{K_M^2}{2 \pi \sigma_Y^2}$$

— au moment de la surcharge F_{MS} la zone plastique devient :

$$\rho_{AS}^{0} = \frac{K_{MS}^2}{2\pi\sigma_Y^2}$$

— ensuite la fissure progresse avec une zone plastique ρ_{AS} supérieure à ρ_{SS}

$$\rho_{AS} = \rho_{AS}^{0} - (a - a_S)$$

jusqu'au moment où la longueur de fissure est telle que

$$\rho_{AS} = \rho_{SS}(K_M)$$

c'est-à-dire pour

$$a^* = a_S + \frac{K_{MS}^2 - K_M^2}{2\pi\sigma_Y^2}$$

qui est la longueur de fissure pour laquelle le taux de croissance $\delta a/\delta N$ ne dépend plus de l'histoire liée à la surcharge. On comprend bien que l'existence d'une zone plastique plus grande modifie les contraintes résiduelles en amont de la pointe et les conditions de fermeture lorsque la fissure aura progressé : elle se referme pour des valeurs plus importantes des efforts et l'amplitude effective du facteur d'intensité des contraintes est réduite d'autant.

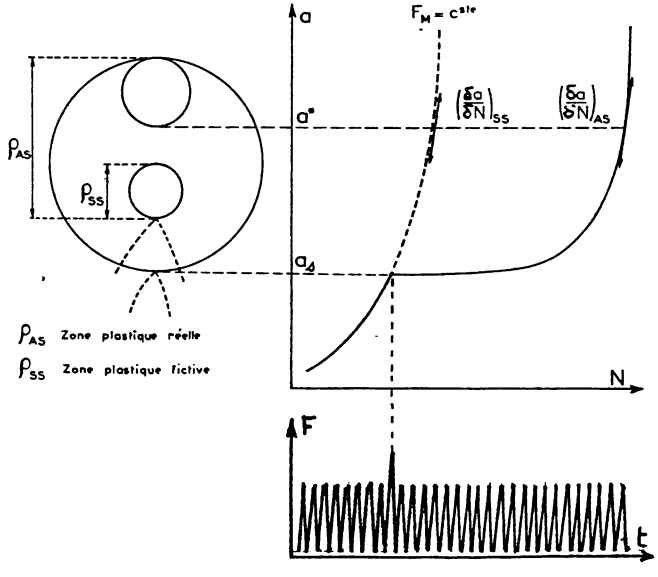


Fig. 17. Effet d'une surcharge sur la progression des fissures.

Le modèle de Wheeler consiste à introduire une fonction puissance du rapport ρ_{SS}/ρ_{AS} dans la loi de Paris :

$$\frac{\delta a}{\delta N} = C\,\Delta K^{n}\left(\frac{\rho_{SS}}{\rho_{AS}}\right)^{\beta}.$$

Un autre effet d'histoire corrélé au précédent est l'influence des surcharges sur le seuil de non-fissuration. Ce seuil K_{th} introduit dans la loi de Forman n'est caractéristique du matériau que pour une fissure vierge. Etant lié à l'ouverture des lèvres de la fissure, il dépend de l'étendue de la zone plastique qui borde la fissure et du champ de contraintes résiduelles. On verra au paragraphe 5.4.2 les détails techniques concernant sa mise en évidence et sa mesure.

4. FORMULATION THERMODYNAMIQUE

Aux paragraphes 2 et 3, on a essentiellement traité de la mécanique linéaire de la rupture, restreinte aux milieux plans étudiés en contraintes planes ou en déformations planes.

Sa validité est bonne pour les métaux tant que l'échelle de la zone plastique reste petite devant la longueur de la fissure. La généralisation des concepts de facteurs d'intensité des contraintes et d'intégrales de contour aux problèmes tridimensionnels avec plasticité et viscoplasticité à grande échelle est chose difficile. L'approche globale par la thermodynamique, telle qu'elle a été utilisée dans les précédents chapitres, et qui généralise la notion de taux de restitution d'énergie, semble plus performante même si elle masque certains effets locaux qu'elle ne peut prendre en compte. Pour ces effets locaux, l'approche complémentaire naturelle est la théorie de l'endommagement appliquée à la fissuration qui est décrite au paragraphe 6.4.

L'approche développée ici est valable dans le cas du solide élastique fragile et, par extension, dans le cas des déformations plastiques très localisées en pointe de fissure. On verra que la notion de taux d'énergie élastique libérée par la fissuration peut se généraliser au cas où les déformations plastiques ou viscoplastiques d'ensemble sont importantes. Ceci ne peut se faire qu'au travers d'une méthode globale, en considérant que l'énergie disponible pour faire progresser une fissure est une énergie élastique, non stockée dans les systèmes de dislocations ou évacuée en chaleur. L'approche développée ne permet pas, dans le cas de la plasticité, de trouver les contraintes et déformations locales, mais elle fournit une voie complémentaire de celle utilisant les paramètres semi-globaux tels que J ou C^* comme on l'a vu au paragraphe 2.3.2. Plus précisément, l'évolution de la fissure pourra être décrite à l'aide d'un paramètre intensif, suffisant en élasticité (le facteur d'intensité des contraintes ou le taux d'énergie élastique libérée), les effets liés à l'écoulement plastique étant pris en compte par un ensemble de variables internes.

4.1. Choix des variables, potentiel thermodynamique

Considérons un solide tridimensionnel $\mathscr{S}$, élastique, élastoplastique ou viscoplastique, de température uniforme T (pour simplifier l'exposé), possédant une fissure d'aire A et de contour $\Gamma(x_1, x_2, x_3)$, sollicité par un champ d'efforts extérieurs (forces et moments) de paramètres statiques F_q appartenant à un espace vectoriel de dimension finie (fig. 18*a*). Ces notations contiennent implicitement le cas des efforts répartis, supposés évoluer en fonction d'un ou plusieurs de ces paramètres discrets F_q. L'écriture générale sans discrétisation ne pose aucun problème de principe.

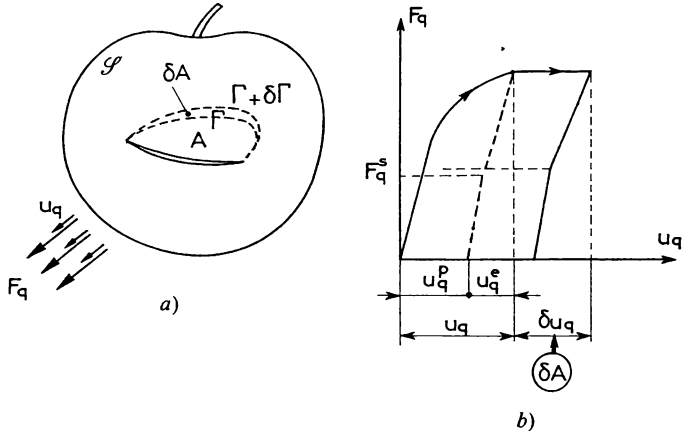


Fig. 18. Milieu tridimensionnel fissuré.

On a vu au paragraphe 3 que, d'un point de vue phénoménologique, l'action des sollicitations F_q peut engendrer :

— un déplacement, éventuellement élastoplastique, que l'on repère ici par les paramètres cinématiques u_q ; chaque déplacement peut être décomposé en une partie appelée permanente u_q^p définie comme le déplacement correspondant à la configuration relâchée ($F_q = 0$) et une partie dite « élastique » u_q^e

$$u_q = u_q^e + u_q^p$$

— un accroissement de fissure, compatible avec la sollicitation, se traduisant par un changement du front de fissure Γ en $\Gamma + \delta\Gamma$,

— une variation du seuil de non-fissuration, repéré ici par l'ensemble des paramètres statiques F_q^S dont les valeurs dépendent du mode de sollicitation antérieur ; ce seuil peut être associé au phénomène de fermeture-ouverture de la fissure, c'est-à-dire à une variation de la rigidité de la structure (voir fig. 18*b*).

Dès lors, si l'on se réfère au chapitre 2, les variables à introduire dans l'analyse thermodynamique globale du solide fissuré $\mathscr{S}$, isolé dans son ensemble comme on l'a fait pour l'élément volume dans les chapitres précédents, sont les suivants :

— la variable observable température T, uniforme dans tout le solide et sa variable associée entropie totale S :

$$S = \int_{\mathscr{S}} s \, dV$$

— les variables observables u_q, déplacements associés aux efforts F_q,

— les variables internes déplacements permanents u_q^p, introduits comme les déformations plastiques en plasticité (chap. 5), la dissipation associée étant :

$$\Phi = F_q . \dot{u}_q^p$$

— les déplacements élastiques s'en déduisent : $u_q^e = u_q - u_q^p$ pour définir la puissance extérieure réversible de tout le solide :

$$P_e = F_q . \dot{u}_q^e$$

— une variable qu'il est naturel de faire intervenir comme variable interne est la configuration de la fissure, représentée par son contour $\Gamma(x_1, x_2, x_3)$. Cependant, dans les paragraphes 4.2 à 4.4, il sera suffisant de repérer la géométrie de la fissure par son aire A. Bien entendu, dans les problèmes plans, la configuration de la fissure est tout à fait mesurable et n'est une variable interne qu'au sens thermodynamique. On va démontrer que dans le cas où il n'y a pas de seuil (voir ci-dessous), la variable associée à l'aire de fissure est le taux de restitution d'énergie élastique G, généralisant ainsi la définition du paragraphe 2.2.6. Notons que cette quantité ne prétend pas rendre compte exactement des champs de contrainte locaux (en plasticité non confinée) : elle est à considérer comme une variable globale, associée à la fissure, de la même façon que la contrainte en mécanique des milieux continus est la variable associée à la déformation de l'élément de volume. Par définition, la dissipation associée au processus de fissuration est GA.

— Pour représenter tous les aspects phénoménologiques du processus de fissuration, il faut introduire une variable interne représentative de la variation du seuil de fissuration, repéré par l'ensemble des F_q^S. Soit h_S cette variable interne et H_S la variable associée. $H_S h_S$ est l'énergie, liée aux contraintes résiduelles, mise en jeu dans le processus de variation du seuil. En présence de ce seuil, la variable associée à A est $G^* = \langle \sqrt{G} - \sqrt{G_S} \rangle^2$ comme on le montre au paragraphe 4.3, où G_S dépend de A et de h_S.

— Pour traduire les processus liés à l'écoulement plastique, que celui-ci soit confiné à la pointe de fissure ou non, on utilise des variables internes supplémentaires h_p et les variables associées H_p. La signification physique des h_p n'est pas évidente : on peut considérer qu'elles représentent les déplacements plastiques u_q^p. Dans la pratique, il sera suffisant de considérer le déplacement d'ouverture de fissure.

L'ensemble de ces variables est résumé sur le tableau 19.

Variables observables	Variables internes	Variables associées
u_q		F_q
T		S
	u_q^e	F_q
	u_q^p	F_q
	A_S	G^*
	h_S	H_S
	h_p	H_p

Tableau 19. Variables de fissuration.

Soit Ψ le potentiel thermodynamique associé à tout le solide $\mathscr{S}$. Par application de la méthode développée au chapitre 2, il est une fonction de toutes les variables d'état observables et internes :

$$\Psi = \Psi(u_q, u_q^e, u_q^p, T, A, h_S, h_p)$$

les déplacements n'intervenant que par $u_q^e = u_q - u_q^p$,

$$\Psi = \Psi(u_q^e, T, A, h_S, h_p).$$

Comme pour l'endommagement étudié au chapitre 7, on suppose qu'il y a découplage entre les effets de plasticité et les effets thermoélastiques associés à la fissuration :

$$\Psi = \Psi_e(u_q^e, T, A, h_S) + \Psi_p(T, h_S, h_p).$$

On a par définition :

$$F_q = \frac{\partial \Psi}{\partial u_q^e}$$

$$S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}$$

$$G^* = -\frac{\partial \Psi}{\partial A}$$

$$H_S = \frac{\partial \Psi}{\partial h_S}$$

$$H_p = \frac{\partial \Psi}{\partial h_p}.$$

4.2. Taux de restitution d'énergie élastique

Si l'évolution du front de fissure ne dépend que d'un seul paramètre (fissure linéique, symétrique dans un milieu bidimensionnel, fissure circulaire dans un milieu tridimensionnel...), la fissure est complètement caractérisée par son aire A dont l'évolution dépend de la variable associée G. On se limite ici au cas sans seuil, avec $G^* = G$, l'effet de seuil étant abordé dans le paragraphe suivant.

4.2.1. *Définition et signification mécanique*

Dans le cadre des matériaux élastiques, élastoplastiques ou viscoplastiques à élasticité linéaire, on postule que le potentiel thermodynamique est une forme quadratique définie positive des déplacements élastiques u^e. Ceci suppose que la décharge élastique qui définit la configuration relâchée est linéaire, ce qui revient à négliger dans le potentiel thermodynamique Ψ_e l'influence du champ des contraintes résiduelles. C'est l'extension au cas du solide fissuré tout entier de l'hypothèse classique de l'élastoplasticité (avec ou sans endommagement) de l'élément de volume. On verra que, dans ce schéma, les contraintes résiduelles sont prises en compte au travers des variables internes (cf. § 4.3).

Si l'on désigne par $[R]$ la matrice de raideur généralisée du solide fissuré $\mathscr{S}$:

$$F_q = R_{qr}\, u_r^e$$

$$\Psi = \frac{1}{2} R_{qr}(T, A)\, u_q^e\, u_r^e + \Psi_p$$

que l'on note pour simplifier :

$$\Psi = \frac{1}{2} \{ u_e \}^T [R] \{ u_e \} + \Psi_p .$$

La variable G s'en déduit par :

$$G = -\frac{\partial \Psi}{\partial A} = -\frac{1}{2} \{ u_e \}^T \left[\frac{\partial R}{\partial A} \right] \{ u_e \}$$

que l'on peut écrire en tenant compte de la relation entre efforts et déplacements :

$$G = -\frac{1}{2} \{ F \}^T [R]^{-1} \left[\frac{\partial R}{\partial A} \right] [R]^{-1} \{ F \} .$$

Notons que cette définition n'implique aucune hypothèse sur la géométrie du milieu fissuré ni sur sa nature élastique, plastique ou viscoplastique, hormis l'existence de la configuration relâchée obtenue par décharge élastique linéaire.

Elle généralise l'expression du taux de restitution d'énergie introduite au paragraphe 2.2.6.

Dans le cas d'une sollicitation à efforts imposés, l'expression de G se simplifie en utilisant :

$$\{ \mathrm{d}F \} = 0 = \left[\frac{\partial R}{\partial A}\right] \{ u_e \} \, \mathrm{d}A + [R] \left\{ \frac{\partial u_e}{\partial A} \right\}_F \mathrm{d}A .$$

Le déplacement $\{ u_e \}$ dépend de A par l'intermédiaire de l'équilibre et l'on a

$$\left[\frac{\partial R}{\partial A}\right] = - [R] \left\{ \frac{\partial u_e}{\partial A} \right\}_F \{ u_e \}^{-1}$$

$$G = \frac{1}{2} \{ u_e \}^T [R] \left\{ \frac{\partial u_e}{\partial A} \right\}_F = \frac{1}{2} \{ F \}^T \left\{ \frac{\partial u_e}{\partial A} \right\}_F .$$

Pour les déplacements imposés on obtient pareillement

$$G = - \frac{1}{2} \{ u_e \}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial A} \right\}_u$$

ou plus généralement :

$$\boxed{G = \frac{1}{2} \left(\{ F \}^T \left\{ \frac{\partial u_e}{\partial A} \right\}_F - \{ u_e \}^T \left\{ \frac{\partial F}{\partial A} \right\}_u \right) = \frac{1}{2} \left(F_q \cdot \frac{\partial u_q^e}{\partial A} - u_r^e \cdot \frac{\partial F_r}{\partial A} \right)}$$

où les indices q et r distinguent respectivement les zones à effort imposé et à déplacement imposé. On retrouve bien une relation analogue à celle obtenue au paragraphe 2.2.6 :

$$G = \frac{1}{2} \left[\int_{\partial \mathscr{S}_F} \vec{F}^d \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial A} \, \mathrm{d}S - \int_{\partial \mathscr{S}_u} \vec{u}^d \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial A} \, \mathrm{d}S \right].$$

En particulier, dans le cas simple d'une seule force donnée $F = Ru^e$

$$\boxed{G = \frac{1}{2} F \cdot \frac{\mathrm{d}u^e}{\mathrm{d}A} = - \frac{1}{2} \frac{F^2}{R^2} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}A}} .$$

On voit qu'il y a identité d'analyse entre la fissuration et l'endommagement traité au chapitre 7 : A et G jouent pour le solide fissuré le même rôle que D et $-Y$ pour l'élément de volume endommagé.

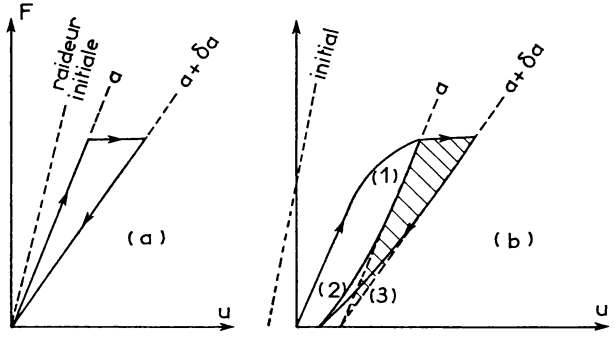
Le taux de restitution d'énergie élastique libérée est visualisé sur la figure 20*a* dans le cas classique « élastique-fragile » sans contraintes initiales, lorsque une force extérieure est imposée. $G\,\delta A$ est égal à la moitié du travail des efforts

extérieurs donnés dans les déplacements correspondants (au cours de la fissuration supposée à force constante).

Pour le solide fissuré soumis à des déformations plastiques ou viscoplastiques non confinées l'emploi de cette variable, dans un contexte purement macroscopique, est justifié par les hypothèses suivantes :

— l'énergie disponible pour créer la décohésion à la pointe de la fissure est nécessairement une énergie élastique, stockée provisoirement dans la structure ;

— le processus de rupture se produit à charge extérieure croissante : la configuration relâchée est à considérer de façon fictive, pour une décharge infinitésimale. Dans ce cas, il y a écoulement plastique en compression, mais celui-ci reste confiné et l'on retrouve les conditions habituelles de la Mécanique linéaire de la rupture. G est alors défini par la différence entre les raideurs existant avant et après un accroissement infinitésimal de fissure δa. La figure 20*b* illustre cette hypothèse dans le cas où l'on suppose que la fissuration se produit à la charge maximale et en négligeant les effets de seuil et l'écoulement pendant la fissuration.



(1) → Ecoulement pendant la charge.
(2) → Décharges réelles avant et après fissuration.
(3) → Décharges élastiques fictives.

Fig. 20. Visualisation du taux de restitution d'énergie élastique.
(*a*) Solide élastique-fragile,
(*b*) solide élastoplastique fragile, sans effet de seuil.

Notons que, par cette définition, la variable G est indépendante de l'épaisseur e dans les problèmes plans, de la même façon que le facteur d'intensité des contraintes K. Ceci se vérifie évidemment pour une valeur fixée de contrainte « à l'infini » : dans la plaque de largeur b comportant une fissure centrale petite de longueur $2a$, on a $K = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$, quelle que soit l'épaisseur e, et le taux de restitution d'énergie élastique s'exprime de la manière suivante :

$$G = \frac{1}{2} F \frac{du}{dA} = \frac{1}{2} \sigma_\infty be \frac{du}{dA} = \frac{1}{2} \sigma_\infty be \frac{1}{e} \frac{du}{da}$$

$$G = \frac{1}{2} \sigma_\infty b \frac{du}{da}.$$

L'unité de G est par exemple le N/m ou le MPa.m. C'est la même unité que K^2/E.

4.2.2. *Méthodes de détermination de G*

Considérons d'abord le cas où l'évolution de la fissure ne dépend que d'un seul paramètre : son aire A. Cette condition est approximativement réalisée si la fissure actuelle est compatible avec le chargement extérieur (§ 2.1) et si celui-ci ne dépend que d'un seul paramètre. Le cas des bifurcations de fissures sera étudié au paragraphe 4.5.

4.2.2.1. *Formules d'encadrement*

La formule $G = \frac{1}{2} \left(F_q \frac{\partial u_q^e}{\partial A} - u_r^e \frac{\partial F_r}{\partial A} \right)$ est directement exploitable par calculs numériques utilisant la méthode des éléments finis, par exemple (voir chap. 4, 5 et 6 pour son utilisation en élasticité, plasticité ou viscoplasticité), mais elle nécessite une variation d'aire, donc au moins deux calculs.

Les dérivées partielles sont remplacées par des différences finies provenant de deux calculs effectués pour deux configurations voisines A et $A + \delta A$:

$$G = \frac{1}{2} \left(F_q \frac{\delta u_q^e}{\delta A} - u_r^e \frac{\delta F_r}{\delta A} \right)$$

avec

$$\delta u_q^e = u_q^e(F_q, A + \delta A) - u_q^e(F_q, A)$$

$$\delta F_r = F_r(u_r^e, A + \delta A) - F_r(u_r^e, A).$$

Cette méthode suppose que les conditions aux limites ne varient pas lors de l'accroissement de fissure δA. En pratique, à cause des effets dynamiques et des liaisons imparfaitement rigides, là où des forces et des déplacements sont théoriquement imposés constants, ils varient de quantités inconnues : l'expérience montre que les déplacements réels augmentent ($\delta u_q^{e*} > 0$) et que les efforts diminuent ($\delta F_r^* < 0$). Deux hypothèses conduisent à une borne supérieure et une borne inférieure du taux de restitution d'énergie :

— les efforts sont supposés constants partout pendant l'accroissement de fissure ($\delta F_r = 0$)

$$G_F = \frac{1}{2} F_q \frac{\delta u_q^e}{\delta A}$$

— les déplacements sont supposés constants partout pendant l'accroissement de fissure ($\delta u_q^e = 0$)

$$G_u = -\frac{1}{2} u_r^e \frac{\delta F_r}{\delta A}.$$

Ces deux valeurs encadrent la valeur réelle G qui correspond à $\delta u_q^{e*} > 0$ et $\delta F_r^* < 0$

$$G = \frac{1}{2}\left(F_q \frac{\delta u_q^{e*}}{\delta A} - u_r^e \frac{\delta F_r^*}{\delta A}\right).$$

En effet, la définition de la raideur, passant de R_{qr} avant l'accroissement de fissure à R'_{qr} après, montre que (fig. 21) :

$$F_q = R_{qr} u_r^e, \quad F_q = R'_{qr}(u_r^e + \delta u_r^e), \quad F_q + \delta F_q^* = R'_{qr}(u_r^e + \delta u_r^{e*}),$$
$$F_q + \delta F_q = R'_{qr} u_r^e.$$

Ces relations, introduites dans l'expression de G, aboutissent à :

$$G = \frac{1}{2}(F_q + \delta F_q^*)\frac{\delta u_q^e}{\delta A} = -\frac{1}{2}\frac{\delta F_r}{\delta A}(u_r^e + \delta u_r^{e*})$$

ou

$$G = G_F + \frac{1}{2}\delta F_q^* \frac{\delta u_q^e}{\delta A} = G_u - \frac{1}{2}\frac{\delta F_r}{\delta A}\delta u_r^{e*}$$

δF_q^* et δF_r étant négatifs, δu_q^e et δu_r^{e*} positifs, on a :

$$\boxed{G_u < G < G_F}.$$

Ce résultat important est représenté schématiquement sur la figure 21. Les méthodes numériques qui permettent de mettre en œuvre cette méthode sont décrites au paragraphe 6.1.2.3.

4.2.2.2. *Méthode expérimentale de la raideur*

La définition du taux de restitution d'énergie élastique, directement liée à la variation de raideur, conduit naturellement à son évaluation par mesures de raideur. Il faut pour cela effectuer au moins deux mesures de raideur pour deux configurations voisines de fissure. Si les configurations successives sont connues, on peut les réaliser artificiellement sur une maquette de la pièce à étudier et obtenir ainsi l'évolution de $G(A)$:

$$G = -\frac{1}{2}\frac{F^2}{R^2}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}A}.$$

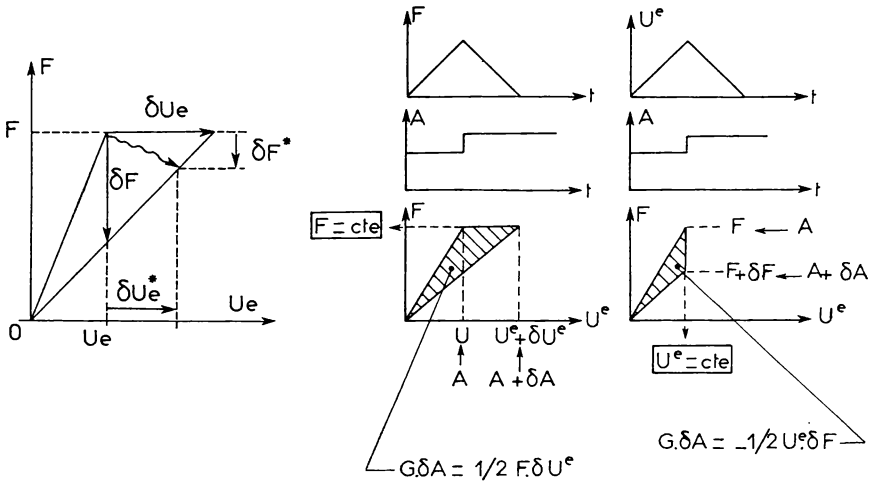


Fig. 21. Accroissement de fissure à force imposée ou à déplacement imposé.

Quelques mesures de $R(A)$ suffisent pour obtenir par interpolation une bonne définition du graphe de $R(A)$ car, en général, cette fonction ne s'éloigne guère d'une fonction linéaire. Une précaution cependant : il y a lieu d'effectuer la mesure de R :

$$R = \frac{dF}{du}$$

pour des valeurs d'efforts assez élevées de façon à être hors du domaine de fermeture ou d'ouverture partielles de la fissure, dues à la zone plastique. En pratique, $F \simeq \frac{1}{2} F_c$ (où F_c est la force critique de rupture) est une valeur recommandée. A titre d'exemple la figure 22 décrit les différentes opérations à effectuer pour obtenir $G(A)$.

4.2.2.3. *Méthode de l'ouverture de fissure*

Pour les milieux plans élastiques sollicités en mode I, on peut déterminer le taux de restitution d'énergie par un seul calcul, ou par une seule expérience de raideur, sans qu'il soit nécessaire d'étudier l'effet d'un accroissement de fissure. Dans ce cas, G est relié au facteur d'intensité des contraintes K_I par

$$G = \begin{cases} \dfrac{K_I^2}{E} & \text{en contraintes planes,} \\ \dfrac{K_I^2}{E}(1 - \nu^2) & \text{en déformations planes,} \end{cases}$$

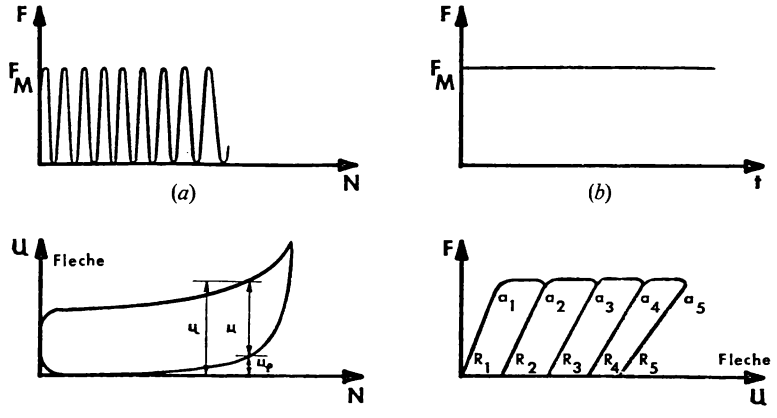


Fig. 22. Détermination de G par la méthode de la raideur :
(*a*) en fatigue,
(*b*) en fluage.

K_I étant lui-même relié au déplacement d'ouverture de fissure par :

$$K_I = \begin{cases} \lim_{r \to 0} \left(\frac{E}{8} [u_2] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right) & \text{en contraintes planes,} \\ \lim_{r \to 0} \left(\frac{E}{8(1 - \nu^2)} [u_2] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right) & \text{en déformations planes.} \end{cases}$$

Si bien qu'un calcul ou une mesure de $u_2(r)$ permet d'obtenir G par :

$$G = \begin{cases} \frac{E}{64} \left[\lim_{r \to 0} \left([u_2] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right) \right]^2 & \text{en contraintes planes,} \\ \frac{E}{64(1 - \nu^2)} \left[\lim_{r \to 0} \left([u_2] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right) \right]^2 & \text{en déformations planes.} \end{cases}$$

La figure 23 montre le résultat de l'application de cette méthode pour un panneau raidi dont la pointe de la fissure est proche du raidisseur. Les ouvertures ayant été mesurées par un procédé photographique de grandissement 100.

4.2.3. *Cas du chargement simple. Taux de restitution d'énergie réduit*

Un cas intéressant est celui du chargement simple, où toutes les charges appliquées à la structure croissent proportionnellement à un seul paramètre ou bien, cas extrême mais fréquent, celui d'une seule force extérieure. Soient donc :

$$F_q = C_q F(t)$$

les efforts extérieurs où $F(t)$ est le paramètre de chargement et où les C_q sont des constantes. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, le taux de restitution d'énergie s'écrit :

$$G = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_{qk}}{\partial A} u_q^e u_k^e = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_{qk}}{\partial A} R_{qp}^{-1} F_p R_{lk}^{-1} F_l$$

ou

$$G = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_{qk}}{\partial A} R_{qp}^{-1} C_p R_{lk}^{-1} C_l F^2(t).$$

La quantité

$$G_r = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_{qk}}{\partial A} R_{qp}^{-1} C_p R_{lk}^{-1} C_l$$

est appelée taux de restitution d'énergie réduit. G_r ne dépend que de la géométrie de la structure fissurée et du système d'efforts extérieurs mais pas de leur intensité. Cette variable peut donc être calculée en fonction de l'évolution de la configuration de fissure si elle est connue indépendamment de l'évolution du chargement. Dans le cas particulier d'une seule force extérieure :

$$G_r = -\frac{1}{2R^2}\frac{dR}{dA} \qquad G = G_r F^2 .$$

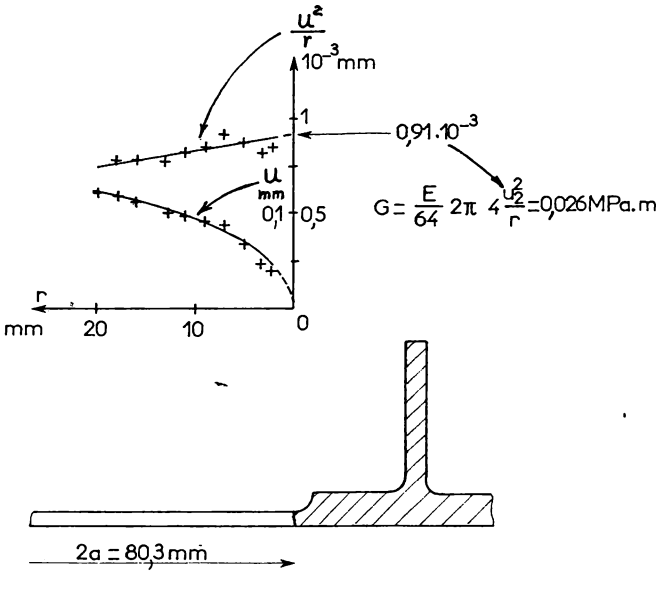


Fig. 23. Détermination de G sur un panneau symétrique en alliage AU 2 GN (E = 72 500 MPa).

4.3. Variable seuil de fissuration

On se place encore dans le cas d'une fissure décrite par une seule variable scalaire A. Pour les cas de déformations plastiques importantes, ou des chargements cycliques, les variables A et G ne sont pas suffisantes pour décrire l'état actuel et l'évolution du solide fissuré. Dans le second cas, l'effet de fermeture des fissures lors des décharges joue évidemment un rôle important. Dans le premier cas, ce sont les effets de non-linéarité induits par les déformations plastiques non confinées qui nécessitent l'emploi d'une variable supplémentaire : celle-ci est définie au travers de la notion d'état relâché fictif discutée au paragraphe 4.1.

La variable seuil de fissuration a été introduite de façon purement formelle par la variable interne h_S, non encore définie. On considère qu'elle est reliée à la valeur des efforts extérieurs à partir de laquelle il y a ouverture de la fissure. Très schématiquement :

— en deçà de cette valeur la fissure est fermée et la raideur de la structure fissurée est celle de la structure vierge de toute fissure,

— au-delà, la raideur dépend de la configuration de fissure représentée par la variable A.

Reprenons le graphe de la figure 20*b* concernant la signification de G dans le cas élastoplastique sans effets de seuil. Il faut le modifier (fig. 24) pour tenir compte :

1) d'un couplage plasticité-fissuration, un déplacement irréversible $\delta u_p/\delta A$ pouvant apparaître pendant l'accroissement de fissure δa, représenté par $C'C = E'E$; ce déplacement est produit par une partie de l'énergie élastique libérée lors de l'accroissement mais ne contribue en rien à l'énergie disponible en pointe de fissure;

2) de l'effet de seuil, supposé ici identique en fermeture et en ouverture (pour simplifier). La seule énergie élastique libérée par la structure et disponible pour accroître la fissure est donnée par l'aire du triangle $BC'D'$, le trajet $C'D'$ correspondant à une décharge fictive instantanée, « avant » que le déplacement irréversible $C'C$ n'ait eu le temps de se produire. Pour $F < F_S$, on retrouve dans tous les cas la raideur initiale de la structure. Notons que la notion de fermeture utilisée ici ne correspond pas au début de l'écoulement de compression en pointe de fissure lors de la décharge, mais bien à une fermeture réelle de la fissure, sur une longueur finie ou plus schématiquement, sur toute la longueur de la fissure.

Cette présentation reste très grossière, puisque l'on a supposé, sur la figure, que la fissuration se produisait à charge maximale et que le seuil F_S était constant, identique en fermeture et en ouverture. Ce schéma est cependant suffisant pour justifier le bilan énergétique et introduire la notion de seuil de fissuration G_S, comme on le fait ci-dessous.

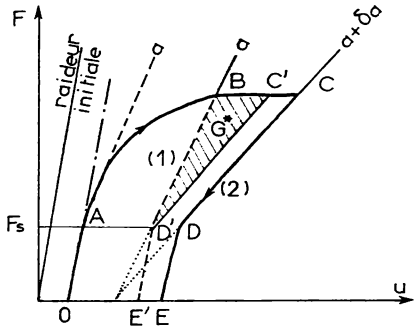


Fig. 24. Visualisation de l'énergie élastique libérée en présence d'un seuil d'ouverture de fissure.
(1) → Décharge fictive avant l'accroissement δa.
(2) → Schématisation de la décharge réelle après δa.

L'énergie dissipée lors du processus de fissuration est donc $G^* \, \mathrm{d}A$, définie comme la différence de variation du travail des efforts extérieurs à force constante et du travail des efforts intérieurs lors de l'accroissement de fissure $\mathrm{d}A$

$$G^* = \frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}A}\bigg|_F - \frac{\partial W}{\partial A} = \int_{\partial \mathscr{S}} \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}A} \, \mathrm{d}S - \frac{\partial}{\partial A} \int_V W(\varepsilon) \, \mathrm{d}V .$$

La quantité $W(\varepsilon)$ résulte de l'intégration de $\mathrm{d}W = \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$. En tenant compte du théorème des travaux virtuels on a :

$$\int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}W \, \mathrm{d}V = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}V = \int_{\partial \mathscr{S}} \vec{F} . \mathrm{d}\vec{u} \, \mathrm{d}S$$

dans lequel on tient compte de la dépendance entre $\vec{u}$ et $\vec{F}$. D'après le schéma ci-dessus. le déplacement plastique ne contribue pas à la fissuration : les intégrales des termes $\int_{\partial \mathscr{S}} \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{u}_p}{\mathrm{d}A} \, \mathrm{d}S$ et $\frac{\partial}{\partial A} \int_{\partial \mathscr{S}} \vec{F} . \vec{u}_p \, \mathrm{d}S$ correspondent à la même aire $E'D'C'CDE$ de la figure 24 et se retranchent. Il est donc suffisant de poursuivre avec seulement la partie élastique du déplacement (fig. 25). On a :

$$G^* = \int_{\partial \mathscr{S}} \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{u}_e}{\mathrm{d}A} \, \mathrm{d}S - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A} \int_{\mathscr{S}} \vec{F} . \vec{u}_e \, \mathrm{d}S .$$

Admettons, pour simplifier, qu'il y a un seul paramètre de chargement F et procédons à effort imposé. La fissure s'ouvre lorsque F atteint F_S et l'on note R_0 et R la raideur initiale et la raideur actuelle qui dépend de A. Par hypothèse on a (pour $\mathrm{d}A = 0$) :

$$\mathrm{d}u^e = \mathrm{d}u = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}F}{R_0} & \text{si} \quad F < F_S \\ \dfrac{\mathrm{d}F}{R} & \text{si} \quad F \geqslant F_S \end{cases}.$$

La quantité W_e et le déplacement associés à ce chargement ponctuel s'obtiennent en intégrant entre 0 et F_M :

$$W_e = \frac{1}{2}\left(\frac{F_S^2}{R_0} + \frac{F_M^2 - F_S^2}{R}\right) \qquad u = \frac{F_S}{R_0} + \frac{F_M - F_S}{R}$$

soit, en dérivant par rapport à A :

$$\frac{\partial W_e}{\partial A} = -\frac{1}{2R^2}\frac{dR}{dA}(F_M^2 - F_S^2) = \frac{1}{2}(F_M + F_S)\frac{du}{dA}\bigg|_F$$

et l'on trouve :

$$G^* = F_M \frac{du}{dA}\bigg|_F - \frac{\partial W_e}{\partial A} = \frac{1}{2}(F_M - F_S)\frac{du}{dA}\bigg|_F$$

que l'on peut encore exprimer sous la forme

$$G^* = -\frac{1}{2R^2}\frac{dR}{dA}(F_M - F_S)^2 .$$

Appelons G_M le taux d'énergie élastique libérée défini dans le cas sans seuil, pour $F = F_M$, G_S la valeur de ce paramètre pour $F = F_S$. On a :

$$G_M = G_r(A)\,F_M^2 = -\frac{1}{2R^2}\frac{dR}{dA}F_M^2, \quad G_S = -\frac{1}{2R^2}\frac{dR}{dA}F_S^2$$

ce qui permet d'exprimer le taux d'énergie élastique libérée avec seuil, lorsque $F = F_M$, par :

$$\boxed{G^* = \langle \sqrt{G_M} - \sqrt{G_S} \rangle^2 = G_r(A) \langle F_M - F_S \rangle^2} .$$

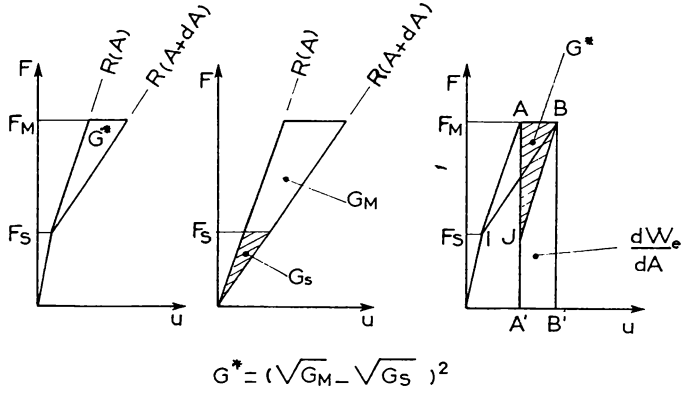


Fig. 25. Schématisation de l'énergie élastique libérée.

Cette quantité est nulle lorsque $G < G_S$, ce qui est indiqué par le crochet $\langle \, . \, \rangle$. La figure 25 illustre la décomposition de G^*, la définition de G_M et G_S, ainsi que la décomposition du travail de la force extérieure $F_M \dfrac{du}{dA}$ (rectangle $ABB'A'$) en $G^* = \dfrac{1}{2}(F_M - F_S)\dfrac{du}{dA}$ (les triangles ABI ou ABJ) et

$$\frac{dW_e}{dA} = \frac{1}{2}(F_M + F_S)\frac{du}{dA}.$$

En procédant de la même façon à déplacement imposé, on retrouve :

$$G^* = -\frac{\partial W_e}{\partial A} = -\frac{1}{2}\frac{dR}{dA}(u_M - u_S)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{dR}{dA}\left(\frac{F_M - F_S}{R}\right)^2 = -\frac{1}{2}(u_M - u_S)\frac{dF}{dA}\bigg|_u$$

où $u_S = F_S/R_0$. On voit que, dans le cas général, on pourra exprimer G^* sous une forme similaire à celle utilisée au paragraphe 4.2.1, en tenant compte du seuil :

$$G^* = \frac{1}{2}(F_M - F_S)\frac{du}{dA}\bigg|_F - \frac{1}{2}(u_M - u_S)\frac{dF}{dA}\bigg|_u.$$

Par contre, l'expression suivante reste toujours valable :

$$G^* = \langle \sqrt{G_M} - \sqrt{G_S} \rangle.$$

Cette relation montre la validité du concept de facteur d'intensité des contraintes effectif, souvent utilisé en fatigue. Dans le cas du mode I et des contraintes planes, on peut remplacer G par K^2/E et l'on trouve :

$$\boxed{K_{\text{eff}} = K^* = \langle K_M - K_S \rangle}.$$

4.4. Etude de la dissipation

On se limite dans ce paragraphe au cas où l'état actuel de fissuration peut être repéré par une seule variable scalaire, par exemple l'aire de fissure A. Le cas des fissures nécessitant plus d'un paramètre cinématique est abordé au paragraphe 4.6. Rappelons d'abord les éléments que l'on tire du second principe de la thermodynamique, avec une écriture simplifiée pour une seule charge extérieure F (une notation scalaire est suffisante) :

$$F\dot{u} - \dot{\Psi} - S\dot{T} \geqslant 0$$

où Ψ et S sont l'énergie libre et l'entropie globale de la structure. Les termes de rayonnement et de flux de chaleur ont été omis pour simplifier. L'énergie libre utilisée jusqu'ici se résume par :

$$\Psi = \Psi(u_e, A, T, h_p, h_S).$$

En reportant cette expression dans l'inégalité précédente, on trouve :

$$\left(F - \frac{\partial \Psi}{\partial u_e}\right)\dot{u}_e - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} + S\right)\dot{T} + F\dot{u}_p - \frac{\partial \Psi}{\partial A}\dot{A} - \frac{\partial \Psi}{\partial h_p}\dot{h}_p - \frac{\partial \Psi}{\partial h_S}\dot{h}_S \geqslant 0.$$

Par la démonstration classique on voit que les deux premiers termes conduisent à

$$F = \frac{\partial \Psi}{\partial u_e} \qquad S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}.$$

Finalement, la dissipation intrinsèque, c'est-à-dire l'énergie dissipée sous forme de chaleur est :

$$\Phi_1 = F\dot{u}_p - \frac{\partial \Psi}{\partial A}\dot{A} - \frac{\partial \Psi}{\partial h_p}\dot{h}_p - \frac{\partial \Psi}{\partial h_S}\dot{h}_S \geqslant 0.$$

Dans le cas isotherme et en l'absence de seuil, l'énergie libre s'exprime sous la forme simple suivante :

$$\Psi = \tfrac{1}{2} R(A)\, u_e^2 + \Psi_p(h_p).$$

Pour la prise en compte du seuil d'ouverture de fissure, on choisit l'expression suivante :

$$\Psi = \tfrac{1}{2} R_0\, u_e^2\, H(u_S - u_e) + \tfrac{1}{2} R_0\, u_S^2\, H(u_e - u_S) + R_0\, u_S \langle u_e - u_S \rangle + \tfrac{1}{2} R(A) \langle u_e - u_S \rangle^2 + \Psi_p(h_p)$$

où $h_S = u_S$ est le déplacement au point d'application de la force lorsque celle-ci est égale à F_S et où, rappelons-le, les symboles H et $\langle \, . \, \rangle$ sont définis par $H(x) = 1$ si $x \geqslant 0$, $H(x) = 0$ si $x < 0$ et $\langle x \rangle = xH(x)$. Ces choix permettent de retrouver dans tous les cas la dissipation intrinsèque sous la forme :

$$\Phi_1 = F\dot{u}_p + G^* \dot{A} - \frac{\partial \Psi}{\partial h_S}\dot{h}_S - \frac{\partial \Psi_p}{\partial h_p}\dot{h}_p$$

avec les quantités définies au paragraphe précédent. Si l'on considère indépendemment le deuxième terme, on retrouve la condition triviale $\dot{A} \geqslant 0$ puisque $G^* = (\sqrt{G} - \sqrt{G_S})^2 \geqslant 0$. Le terme $\frac{\partial \Psi_p}{\partial h_p}\dot{h}_p$ permet de tenir compte des effets d'écrouissage et le terme précédent de décrire l'évolution du seuil d'ouverture de fissure.

L'écriture des lois d'évolution des variables internes, à savoir ici, u_p, A, h_p et h_S, peut se faire à partir d'un potentiel de dissipation :

$$\varphi(\dot{u}_p, \dot{A}, \dot{h}_S, \dot{h}_p; u_e, T, A, h_S, h_p).$$

Le potentiel obtenu par transformation de Legendre-Fenchel s'écrit :

$$\varphi^*(F, G^*, H_S, H_p; u_e, T, A, h_S, h_p).$$

L'écoulement plastique $\dot{u}_p$ n'est pas considéré ici. La loi d'évolution des variables gouvernant la fissuration est donnée par :

$$\dot{A} = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi^*}{\partial G^*}$$

$$\dot{h}_S = -\dot{\lambda} \frac{\partial \varphi^*}{\partial H_S}.$$

Pour une géométrie de fissure décrite par un seul paramètre, cette loi est considérée comme intrinsèque : dans le cas du problème de fissuration il s'agit, rappelons-le, d'une structure donnée, en un matériau donné, avec un système de chargement bien défini. λ est un multiplicateur, scalaire, à déterminer dans chaque cas particulier.

La variable seuil h_S qui apparaît dans cette formulation est définie indépendemment de la valeur de A. Son évolution est gouvernée par les deux expressions $\dot{h}_S = -\lambda\, \partial\varphi^*/\partial H_S$ et $H_S = \partial\Psi/\partial h_S$. Connaissant h_S on peut alors définir la valeur seuil G_S qui intervient dans le paramètre G^* qui gouverne la fissuration. Dans l'exemple simple étudié ici, on prendra successivement :

$$u_S = h_S \qquad F_S = R_0\, u_S \qquad G_S = G_r(A)\, F_S^2.$$

Notons encore que la généralisation de cette théorie au cas d'un chargement multiaxial non proportionnel ne poserait pas de problème de principe mais seulement des difficultés de notations.

4.5. Critères de bifurcation des fissures dans les milieux plans

Les critères de bifurcation, ou de déviation des fissures, sont des concepts globaux qui permettent de déterminer l'orientation des accroissements de fissure dans les cas de chargements complexes non proportionnels.

4.5.1. *Critère de la contrainte normale maximale*

Ce critère est très utilisé car facile à mettre en œuvre. On suppose que la direction de l'accroissement de fissure correspondant à un chargement donné

se fait dans la direction telle que la contrainte locale $\sigma_{\theta\theta}$ normale à la facette définie par l'angle θ est maximale ; l'analyse étant faite sur la fissure actuelle, avant déviation. La figure 26 montre schématiquement le cas d'une fissure rectiligne dans une plaque, soumise à une traction dans une direction non perpendiculaire à la fissure.

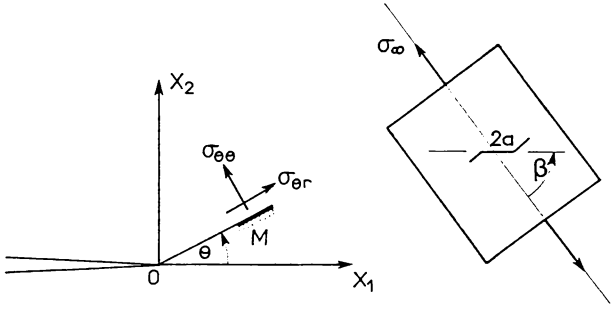


Fig. 26. Bifurcation d'une fissure.

En pratique, on se place à une distance r^* constante de la pointe de fissure. En chaque point $M(r^*, \theta)$, on évalue les directions principales, par un calcul par éléments finis par exemple. Si r^* est suffisamment petit, la direction de la contrainte principale maximale est perpendiculaire à la ligne OM. On obtient alors l'angle θ, solution correspondant à la plus grande valeur de contrainte principale maximale ainsi trouvée.

La difficulté pratique est le choix de r^*, sauf lorsque l'on dispose de solutions analytiques. Dans le cas de la figure 26, la normale à la facette a pour composantes $(-\sin\theta, \cos\theta)$. On en déduit le vecteur contrainte puis la contrainte normale et la contrainte tangentielle :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11}\sin^2\theta - 2\,\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = (\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin\theta\cos\theta + \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

En employant les relations du paragraphe 2.2.2 pour le cas des contraintes planes, on trouve :

$$4\,\sigma_{\theta\theta}\sqrt{2\pi r^*} = K_{\mathrm{I}}\left(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right) - 3\,K_{\mathrm{II}}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$4\,\sigma_{r\theta}\sqrt{2\pi r^*} = K_{\mathrm{I}}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right) + K_{\mathrm{II}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2}\right).$$

On voit que le critère est indépendant de r^* et que l'angle θ qui rend maximum $\sigma_{\theta\theta}$ annule $\sigma_{r\theta}$ ($\sigma_{r\theta}$ est proportionnel à $\partial\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta$) : on maximise en fait la contrainte principale maximale. Le problème de la direction de bifurcation est donc connu dès que l'on connaît K_{I} et K_{II}. Dans le cas de la plaque contenant une

petite fissure de longueur $2a$, soumise à une traction faisant l'angle β avec la fissure, l'état de contrainte à l'infini est caractérisé par :

$$\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{\infty} \cos^2 \beta, \quad \sigma_{22}^{\infty} = \sigma_{\infty} \sin^2 \beta, \quad \sigma_{12}^{\infty} = \sigma_{\infty} \sin \beta \cos \beta$$

σ_{11}^{∞} ne joue aucun rôle sur la fissuration. On sait que K_I et K_{II} ont alors les expressions :

$$K_I = \sigma_{\infty} \sin^2 \beta \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \sigma_{\infty} \sin \beta \cos \beta \sqrt{\pi a}$$

ce qui donne la solution, après simplifications (pour $\sigma_{r\theta} = 0$) :

$$\boxed{\frac{1 - 3\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{tg} \beta = \frac{K_I}{K_{II}}}.$$

La figure 27 montre les résultats obtenus par ce critère et la comparaison avec des résultats expérimentaux. Le cas extrême $K_I = 0$, $K_{II} \neq 0$, qui correspond à $\beta = 0$ ne peut être réalisé avec la plaque sous chargement uniaxial. On peut cependant l'obtenir par un chargement biaxial : les résultats sont reportés alors en fonction de $\beta = \arctan(K_I/K_{II})$.

Il existe d'autres critères analogues : celui où l'on considère la déformation maximale ε_{00} ou encore le critère de Sih, dans lequel c'est la densité d'énergie élastique $w_e(\varepsilon)$ qui est considérée comme extrémale pour la direction de déviation.

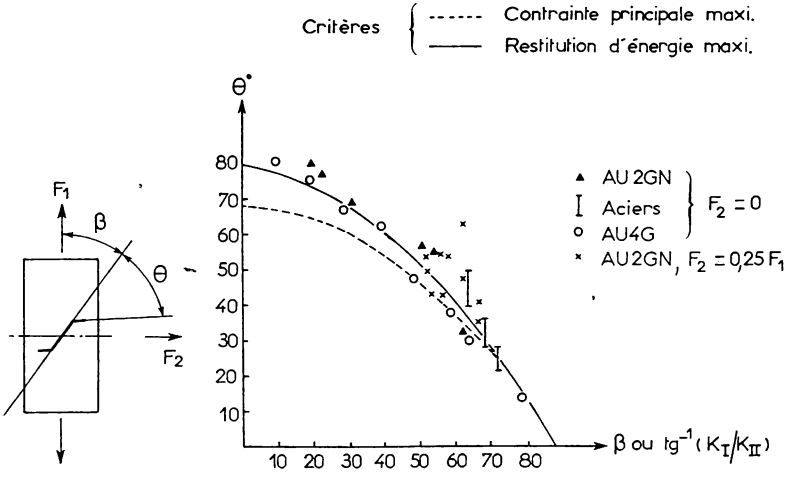


Fig. 27. Vérification expérimentale des critères de bifurcation.

4.5.2. *Critères du taux de restitution d'énergie maximal*

On considère que la direction de propagation de fissure à chaque instant rend maximal le taux d'énergie élastique libérée G. Celui-ci est défini, pour le chargement considéré, avec une fissure déjà branchée, aussi petite soit-elle. On peut utiliser une analyse locale, à partir des facteurs d'intensité K_I' et K_{II}' définis sur la fissure branchée, lorsque la solution analytique existe. Dans le cas contraire, on procède numériquement, par éléments finis, par exemple. Le taux de restitution d'énergie s'exprime dans le cas général par (voir § 2.2.6) :

$$G_\theta = \frac{1}{2} \int_C \left(\vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}a} - \vec{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}a} \right) \mathrm{d}C$$

où C est un contour fermé entourant la pointe de la fissure branchée (voir fig. 28). Dans la pratique, il est plus simple d'évaluer cette quantité de façon globale, à partir du travail des efforts extérieurs. A force imposée par exemple :

$$G = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}W_x}{\mathrm{d}A}\bigg|_F = \frac{1}{2e} F \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a}.$$

En pratique, on peut réaliser une série de calculs sur des fissures branchées d'un angle θ, la branche ayant une longueur constante Δa, suffisamment petite. Dans chaque cas, $G(\theta)$ est évalué par différences finies avec :

$$G(\theta) = \frac{1}{2e\,\Delta a} F[u(\Delta a, \theta) - u(0, 0)].$$

Notons qu'il est nécessaire de résoudre indépendamment chaque cas de fissure branchée, une méthode de perturbation locale n'étant pas valable à cause du changement de géométrie de la fissure. La direction de bifurcation est celle qui rend $G(\theta)$ maximum : on procède par lissage des résultats numériques...

Ce critère est satisfaisant sur le plan physique mais délicat à mettre en œuvre lorsque l'on ne dispose pas de solutions analytiques. Il donne des résultats peu différents de ceux du critère de la contrainte normale maximale, comme dans l'exemple de la figure 27.

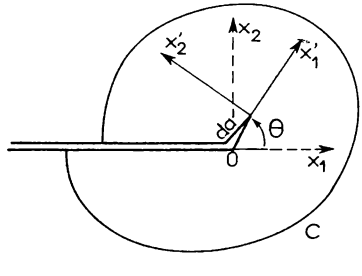


Fig. 28. Fissure branchée.

4.5.3. *Critère de la vitesse de fissuration maximale*

Là encore on analyse des fissures branchées, la direction choisie étant celle qui rend maximale la vitesse de fissuration $\dot{a}$ (en module). Si la loi de propagation s'exprime en fonction de G, comme précédemment, il n'y a pas de différence. Par contre, ce critère permet de tenir compte des effets du rapport de charge $R = F_m/F_M$ qui influencent assez fortement l'angle de bifurcation pour certains matériaux. Des lois de fissuration utilisant ce rapport de charge sont mentionnées au paragraphe 3.2.3.

4.6. Cas des structures fissurées tridimensionnelles

L'étude de la propagation des fissures dans les structures tridimensionnelles, même en se limitant au cas des fissures surfaciques planes, est un problème difficile, tant du point de vue de l'analyse des contraintes et déformations que de celui des lois de propagation ou de rupture. C'est pourtant un cas fréquent : fissures non traversantes dans les tôles épaisses, fissures de coin dans les pièces complexes ou dans les zones de concentration de contraintes... etc.

On examine ici les grandes lignes d'une théorie générale, qui sera appliquée au paragraphe 6.2 pour résoudre numériquement les cas pratiques de fissures qui peuvent être représentées par un nombre fini de paramètres.

Le front de fissure Γ est repéré par l'abscisse curviligne s du point $M(s)$. Son évolution est définie par un champ de vitesse de fissuration, noté $\dot{a}(s)$, physiquement admissible (voir fig. 29). On se place dans le cas d'un solide élastique-fragile et, pour fixer les idées, dans le cas d'efforts extérieurs imposés. Un point de $\partial\mathscr{S}_F$ est repéré par P et l'on note $\dot{u}(P)$ la vitesse de déplacement associée à la vitesse de fissuration $\dot{a}(M)$ (il est clair que si F est constant et que $\dot{a}(M) = 0$, on a $\dot{u}(P) = 0$).

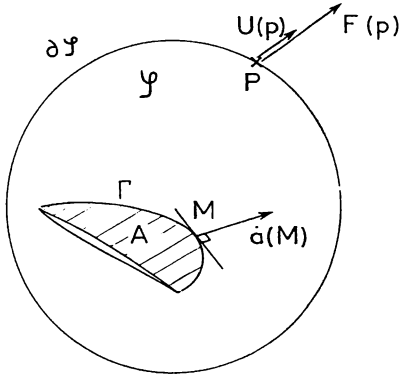


Fig. 29. Champ de vitesse d'un front de fissuration dans une structure tridimensionnelle.

La puissance des efforts extérieurs (constants) s'écrit dans ce cas (où F est une densité surfacique d'efforts) :

$$P_{(x)} = \int_{\partial \mathscr{S}_F} F(P)\, \dot{u}(P)\, \mathrm{d}S$$

mais la vitesse $\dot{u}(P)$ ne dépend que des $\dot{a}(s)$ (à F constant) ce qui peut s'écrire en ne retenant que les termes du premier ordre :

$$\dot{u}(P) = \int_\Gamma h(P, M)\, \dot{a}(M)\, \mathrm{d}s\,.$$

En remplaçant dans $P_{(x)}$ et en permutant l'ordre des intégrations, on trouve :

$$P_{(x)} = \int_\Gamma g(M)\, \dot{a}(M)\, \mathrm{d}s \quad \text{avec} \quad g(M) = \int_{\partial \mathscr{S}_F} F(P)\, h(P, M)\, \mathrm{d}S\,.$$

On voit que $h(P, M)$ correspond à un taux $\mathrm{d}u(P)/\mathrm{d}a(M)$ et que $g(M)$ peut être considéré comme le gradient de l'énergie libre. Une écriture formelle correcte de ce gradient d'énergie dans le cas de dimension infinie nécessite des outils mathématiques particuliers. L'énergie libre Ψ est supposée différentiable au sens de Gateaux : il existe une fonction $g(M)$ définie sur Γ, telle que :

$$D\Psi = -\int_\Gamma g(M)\, \dot{a}(M)\, \mathrm{d}s\,.$$

Par définition, $g(s)$ représente une distribution de force le long de Γ. On peut l'écrire à partir des facteurs d'intensité des contraintes en $M(s)$:

$$g(s) = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{\mathrm{I}}^2(s) + \frac{1 - \nu^2}{E} K_{\mathrm{II}}(s) + \frac{1}{2\mu} K_{\mathrm{III}}^2(s)\,.$$

Cette notion de force reste valable en élasticité non linéaire et lorsque la singularité de contrainte change de nature le long de Γ, par exemple dans le cas d'une fissure débouchant en surface.

La puissance dissipée dans le processus de fissuration est donnée par :

$$\Phi = \int_\Gamma g(s)\, \dot{a}(s)\, \mathrm{d}s \geqslant 0\,.$$

Cette relation généralise la relation $G\dot{A} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial A}\dot{A} \geqslant 0$ utilisée précédemment dans le cas d'une fissure représentée par un seul paramètre scalaire. On suppose qu'il s'agit d'un mécanisme dissipatif normal, c'est-à-dire qu'il

existe en chaque point de Γ un potentiel $\varphi(\dot{a})$, fonction convexe de $\dot{a}$, tel que l'on ait :

$$g = g(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{a}}.$$

Notons $\varphi^*(g)$ la transformée de Legendre-Fenchel de $\varphi(\dot{a})$. On en déduit la relation :

$$\dot{a}(s) = \frac{\partial \varphi^*}{\partial g(s)}$$

qui s'applique en tout point du front.

Notons que l'aire de la fissure A est la surface balayée par le front Γ et que son taux s'exprime par

$$\dot{A} = \int_\Gamma \dot{a}(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

Dans le cas où la fissuration peut être décrite par la seule variable A, c'est-à-dire lorsque $g(s)$ est uniforme, $g(s) = G$, on retrouve évidemment :

$$\Phi = \int_\Gamma g(s)\, \dot{a}(s)\, \mathrm{d}s = G \int_\Gamma \dot{a}(s)\, \mathrm{d}s = G\dot{A}\,.$$

Le choix du potentiel de dissipation $\varphi^*(g)$ conditionne la loi d'évolution de la fissure. On peut choisir une fonction puissance :

$$\varphi^*(g) = \frac{C'}{\frac{\eta}{2} + 1}\, g^{\frac{\eta}{2}+1}$$

ce qui conduit à une loi locale de type loi de Paris puisque :

$$\dot{a}(s) = \frac{\partial \varphi^*}{\partial g} = C'\, g(s)^{\eta/2} = C'\left(\frac{K^2(s)}{E}\right)^{\eta/2} = CK^\eta(s)\,.$$

Si l'on choisit un potentiel quadratique, $\eta = 2$, on retrouve la loi dite du gradient, bien adaptée aux calculs numériques :

$$\dot{a}(s) = \alpha g(s)\,.$$

Dans ce cas, la progression se fait de façon à maximiser le taux d'énergie libérée, ce qui correspond à l'un des critères étudiés pour les processus de bifurcation. L'application pratique de cette approche est indiquée au paragraphe 6.2 dans le cadre de la méthode des éléments finis.

5. MODÈLES DE PROPAGATION DE FISSURE PARTICULIERS

Compte tenu du formalisme introduit, les lois complémentaires gouvernant les évolutions de fissures sont au nombre de trois :

— une relation exprimant la vitesse d'accroissement de l'aire de fissure $\dot{A}$,

— une relation gouvernant la forme du front de fissure. En fait, il n'est pas nécessaire d'expliciter cette loi car elle est avantageusement remplacée par les critères de bifurcation. Dans chaque problème particulier, la forme du front de fissure peut toujours être déterminée par application de l'un des critères décrits au paragraphe 4.5,

— une relation exprimant la variation du seuil de non-fissuration qui est à prendre en compte lorsque des déformations plastiques ou viscoplastiques interviennent. On donnera un exemple de modélisation pour la rupture par fatigue, mais notons, comme on l'a vu au paragraphe 4.3, que ce seuil peut aussi être calculé en résolvant un problème d'élastoplasticité.

Conservant l'idée initiale selon laquelle le comportement des fissures est gouverné par le taux de restitution d'énergie, on considèrera que la variable essentielle à laquelle est liée le taux de fissuration $\dot{A}$ est :

G dans les problèmes élastiques ou à dissipation plastique très faible,

$G^* = (\sqrt{G} - \sqrt{G_S})^2$ dans les problèmes où les déformations inélastiques engendrent l'existence d'un seuil de non-fissuration G_S (voir § 4.3).

5.1. Fissuration par rupture fragile

Taux de restitution d'énergie critique

C'est la modélisation du solide fissuré élastique fragile qu'il est commode de présenter comme la plasticité parfaite. Tant que le taux de restitution d'énergie G est inférieur à une valeur critique G_c, l'aire de la fissure reste constante. Lorsque G atteint G_c, il y a rupture brutale (fig. 30).

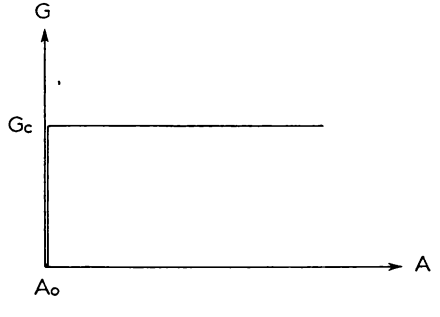


Fig. 30. Diagramme de rupture fragile.

$$\boxed{G < G_c \rightarrow \dot{A} = 0, \quad G = G_c \rightarrow \dot{A} \text{ indéterminé}}.$$

G_c est le double de l'énergie superficielle de cohésion du matériau et généralise au cas tridimensionnel la notion de ténacité, K_{Ic}, exposée au paragraphe 3.2.1 pour les problèmes plans.

L'identification de G_c consiste à réaliser un essai de rupture sur une éprouvette fissurée en notant la force critique de rupture avec les précautions exposées au paragraphe 3.2.1. Un calcul élastique ou une mesure de raideur permettent d'obtenir le taux de restitution d'énergie réduit G_r pour la géométrie considérée (voir § 4.2.2). On a alors :

$$G_c = G_r F_c^2 .$$

5.2. Fissuration par rupture ductile

La fissuration par rupture ductile est la modélisation des courbes « R » décrites au paragraphe 3.2.2. La fissure croît d'une manière stable et le processus de fissuration s'accompagne de déformations plastiques importantes. La courbe « R » joue pour la rupture ductile avec les variables G et A le même rôle que la courbe d'écrouissage pour la plasticité avec les variables contrainte et déformation (fig. 31).

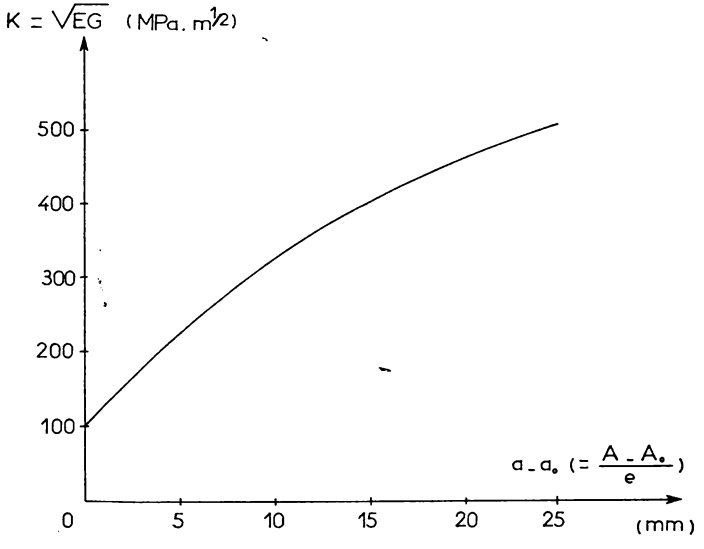


Fig. 31. Courbe « R » de rupture ductile. Alliage INCO 718. Tôle épaisseur $e = 4$ mm. $a_0 = 105$ mm (d'après Marandet IRSID).

Pour modéliser cette courbe d'une manière cohérente avec la thermodynamique et la physique, on peut considérer que le potentiel de dissipation se met sous la forme d'une fonction seuil :

$$\varphi^* = f = G - H_p = 0$$

avec des conditions de charge-décharge de type plasticité :

$f < 0 \rightarrow$ pas d'évolution de la fissure,

$f = 0 \rightarrow$ évolution, c'est-à-dire rupture stable.

La variable H_p joue ainsi le rôle d'une valeur critique G_c évoluant au cours de la rupture. C'est, en fait, la fonction R. Pour obtenir des expressions simples, on suppose que l'énergie libre est une fonction puissance, la partie plastique s'exprimant par

$$\Psi_p = G_0 h_p + \frac{Vv}{v+1} h_p^{\frac{v+1}{v}}$$

où V, v et G_0 sont trois constantes. Les lois d'évolution s'écrivent

$$\dot{A} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial G} = \dot{\lambda}, \quad \dot{h}_p = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial H_p} = \dot{\lambda}$$

et la variable seuil H_p s'exprime par

$$H_p = \frac{\partial \Psi}{\partial h_p} = G_0 + V h_p^{1/v}.$$

La condition de consistance, comme en plasticité, fournit l'expression du multiplicateur :

$$\dot{\lambda} = \dot{A} = H(f) \frac{v}{V} \frac{\langle \dot{G} \rangle}{h_p^{\frac{1-v}{v}}}$$

où les symboles $H(f)$ et $\langle \ \rangle$ sont utilisés pour indiquer que $\dot{\lambda}$ est nul si $f < 0$ ou si $\dot{G} < 0$. La vitesse de fissuration est alors, en tenant compte de $f = G - H_p = 0$:

$$\dot{A} = H(f) \frac{v}{V} \frac{\langle \dot{G} \rangle}{h_p^{\frac{1-v}{v}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\dot{A} = H(f) \frac{v}{V} \left\langle \frac{G - G_0}{V} \right\rangle^{v-1} \langle \dot{G} \rangle}.$$

En intégrant, on trouve évidemment :

$$A = A_0 + \left\langle \frac{G - G_0}{V} \right\rangle^v.$$

Cette relation régit l'évolution de la fissure tant que la rupture se produit de façon stable. Elle décrit la courbe « R » par :

$$G = R(A - A_0) = G_0 + V(A - A_0)^{1/v}.$$

G dépend de l'effort imposé F et de A. Par exemple, pour une petite fissure dans une plaque de grande dimension on a :

$$G = G_r(A)\, F^2 = kF^2\, A$$

où k est une constante dépendant de la géométrie et du module d'élasticité. L'égalité de ces deux relations permet de trouver F en fonction de A.

Lorsque F est imposé croissant, l'instabilité intervient, si. pour la même valeur de A, le taux de variation de $G = kF^2\, A$ devient égal au taux de variation de R (voir fig. 13) :

$$\frac{\partial G}{\partial A} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}A}$$

ou encore si :

$$kF^2 = \frac{V}{v}(A - A_0)^{\frac{1-v}{v}}.$$

En tenant compte de l'égalité $G = R(A - A_0)$ on trouve que la valeur critique A_c de A est donnée par :

$$G_0 + V(A_c - A_0)^{\frac{1}{v}} = A_c \frac{V}{v}(A_c - A_0)^{\frac{1-v}{v}}.$$

Les valeurs critiques de G et de F sont données par les relations ci-dessus. Une solution explicite s'obtient facilement lorsque l'on néglige le seuil G_0. On trouve :

$$\boxed{A_c = A_0 \frac{v}{v-1}} \qquad \boxed{G_c = V\left(\frac{A_0}{v-1}\right)^{1/v}}.$$

La courbe $G_c(A_0)$ et la courbe $R(A - A_0)$ sont donc homothétiques l'une de l'autre. La valeur critique de G_c dépend de A_0. Dans le cas particulier de la rupture fragile ($v \to \infty$), on retrouve $A_c = A_0$ et $G_c = G_0$, indépendant de A_0.

L'identification des coefficients V et v sur des tôles montre que V est sensible à leur épaisseur.

5.3. Fissuration par fluage

La fissuration par fluage est la décohésion des métaux aux moyennes et hautes températures pour lesquelles des déformations viscoplastiques interviennent. La fissure progresse même si la sollicitation est constante (fig. 32). Dans le cas où les déformations viscoplastiques sont faibles dans l'ensemble de la structure (cas des matériaux peu ductiles), le phénomène peut être traité de façon analogue à la viscoplasticité. Un potentiel de dissipation fonction puissance de G^* conduit à une bonne modélisation :

$$\varphi^* = \frac{W}{w+1}\left(\frac{G^*}{W}\right)^{w+1}$$

d'où :

$$\dot{A} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial G^*} = \left(\frac{G^*}{W}\right)^w \quad \text{soit :} \quad \boxed{\dot{A} = \left(\frac{\langle \sqrt{G} - \sqrt{G_S} \rangle^2}{W}\right)^w}$$

W et w sont des constantes (éventuellement fonctions de la température) à déterminer pour chaque matériau par identification avec des courbes de fissuration expérimentales (W est là aussi sensible à l'épaisseur des tôles.)

La figure 32 illustre le cas de l'alliage réfractaire IN 100, matériau peu ductile, avec dans ce cas $G_S = K_S = 0$. Dans le cas de matériaux plus ductiles, il peut être nécessaire de tenir compte de l'évolution du seuil G_S. On peut aussi écrire l'équation avec le facteur d'intensité des contraintes, faisant apparaître $K_{\text{eff}} = K - K_S$,

$$\dot{A} = \left(\frac{K_{\text{eff}}^2}{W'}\right)^w.$$

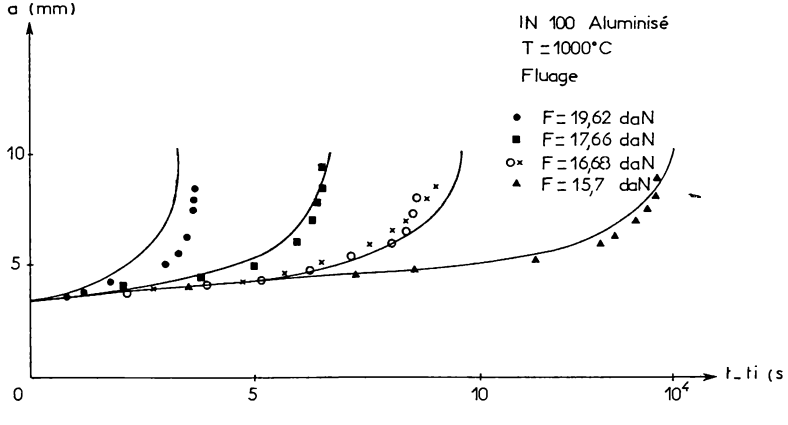


Fig. 32. Essais de fissuration en fluage (d'après H. Policella).

5.4. Fissuration par fatigue

Les phénomènes liés à la progression des fissures par fatigue sont d'une complexité telle qu'il n'est pas possible de formuler des modèles représentatifs de toutes les propriétés essentielles par la thermodynamique. On se bornera donc à une généralisation thermodynamique de la loi la plus simple et à la description d'un modèle phénoménologique à seuil évolutif.

5.4.1. *Généralisation de la loi de Paris*

Considérons un milieu tridimensionnel fissuré sollicité par une force F qui engendre une évolution de fissure ne dépendant que d'une seule variable A. Le milieu est élastique linéaire et l'énergie de dissipation plastique au voisinage du front de fissure est petite par rapport à l'énergie élastique. Le seuil est G_S.

Comme pour le cas de la fissuration par fluage, on suppose que le taux d'accroissement de fissure $\dot{A}$ est fonction de $G^* = (\sqrt{G} - \sqrt{G_S})^2$ par l'intermédiaire d'un potentiel de dissipation. De plus, on utilise le même formalisme que pour la rupture ductile, avec les variables h_p et H_p, en choisissant le potentiel φ^* sous la forme :

$$\varphi^* = f = G^* - H_p$$

et la partie Ψ_p du potentiel thermodynamique sous la forme

$$\Psi_p(h_p) = \frac{\eta C'}{\eta + 2} h_p^{\frac{2}{\eta} + 1}$$

η est l'exposant de la loi de Paris et C' une constante également caractéristique du matériau. Les lois d'évolution donnent des expressions similaires à celles du paragraphe 5.2 :

$$\dot{A} = \frac{\eta}{2\,C'} \left(\frac{G^*}{C'}\right)^{\frac{\eta}{2} - 1} \langle \dot{G}^* \rangle .$$

Dans la pratique, les lois de fatigue sont exprimées en cycles. Il suffit d'intégrer sur un cycle de période Δt défini par les valeurs minimale G_m^* et maximale G_M^* de G^* :

$$\frac{\delta A}{\delta N} = \int_t^{t+\Delta t} \dot{A}\, \mathrm{d}t = \int_{G_m^*}^{G_M^*} \frac{\eta}{2\,C'} \left(\frac{G^*}{C'}\right)^{\frac{\eta}{2} - 1} \mathrm{d}G^*$$

$$\boxed{\frac{\delta A}{\delta N} = \frac{1}{C'^{\eta/2}} (G_M^{*\eta/2} - G_m^{*\eta/2})}$$

avec

$$G_M^* = \langle \sqrt{G_M} - \sqrt{G_S} \rangle^2, \quad G_m^* = \langle \sqrt{G_m} - \sqrt{G_S} \rangle^2 .$$

Lorsque G_m est inférieur au seuil G_S, on retrouve exactement la loi de Paris avec $\Delta K_{eff} = K_M - K_S$ et $G = K^2/E$

$$\frac{\delta A}{\delta N} = \frac{1}{C'^{\eta/2}} \langle \sqrt{G_M} - \sqrt{G_S} \rangle^{\eta} = C (K_M - K_S)^{\eta} .$$

Là encore, les identifications montrent que C' est sensible à l'épaisseur des tôles. Le seuil G_S (ou K_S) peut être évolutif. Un exemple de modèle d'évolution est étudié ci-dessous.

5.4.2. *Modèle à seuil évolutif*

Le modèle de Wheeler, exposé au paragraphe 3.2.3.2, introduit les effets d'histoire du chargement au travers de la taille actuelle de la zone plastique. Il prend en compte l'effet de surcharges espacées mais donne des résultats incorrects dans d'autres cas. La figure 34 illustre ceci sur l'alliage AU 4 G 1, T_3, en comparant le cas d'une surcharge (rapport $R_S = F_{MS}/F_M = 1{,}5$) avec celui d'un chargement à deux niveaux ($R_S = 1{,}5$ encore) ; l'effet de retard est beaucoup plus important dans le second cas, alors que le modèle de Wheeler fournit des résultats identiques.

Cette déficience peut être comblée en considérant un seuil de fissuration évolutif. L'évolution du seuil en fonction de l'histoire du chargement peut être mise en évidence expérimentalement en considérant deux cas extrêmes (fig. 33) :

— le cas d'une surcharge : pour un rapport F_{MS}/F_M critique noté R_1^c, il y a blocage complet de la fissure ;

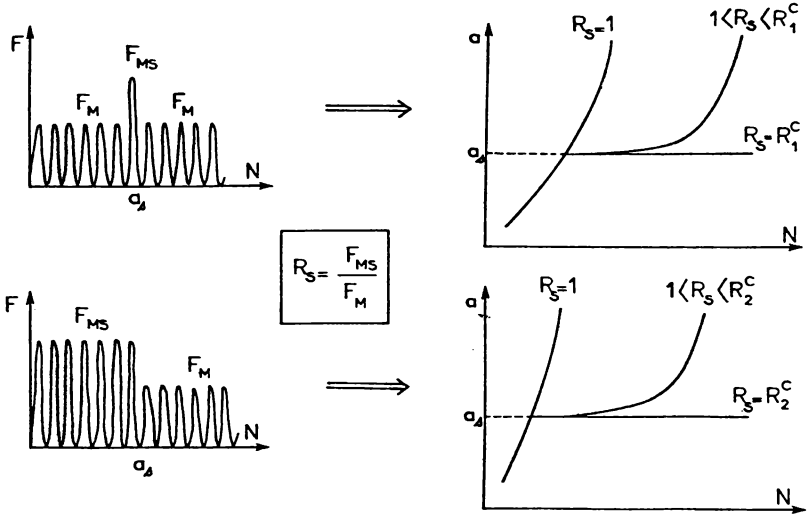


Fig. 33. Mise en évidence de l'effet de l'histoire du chargement sur le seuil.

— le cas à deux niveaux : le blocage a lieu lorsque le rapport F_{MS}/F_M vaut R_2^c, valeur critique inférieure à R_1^c.

Les valeurs expérimentales obtenues sont indépendantes des niveaux appliqués et de la longueur de fissure. Pour l'alliage léger AU 4 G 1 on a, par exemple, $R_1^c = 2{,}7$ et $R_2^c = 1{,}9$. Dans le second cas, on observe bien l'effet de seuil : pendant le chargement au niveau F_{MS}, celui-ci vaut $F_S = F_{MS}/R_2^c$. Dans le premier cas, on voit que la surcharge fait passer le seuil F_S de F_M/R_2^c à F_M, ce qui prouve son évolution.

Dans le cas d'un chargement quelconque, on peut développer des lois d'évolution de la forme :

$$\frac{\delta A}{\delta N} = f(G_M^*, G_S, \ldots)$$

$$\frac{\delta G_S}{\delta N} = g(G_M^*, G_S, \ldots).$$

Bien qu'elles ne s'inscrivent pas directement dans le schéma général du paragraphe 4, les expressions ci-dessous fournissent une bonne modélisation pour une large gamme de chargement. On utilise plutôt le facteur d'intensité des contraintes :

$$\frac{\delta A}{\delta N} = C_3 \langle K_M - K_S \rangle^{\eta_3}$$

$$\frac{\delta K_S}{\delta N} = \alpha \sqrt{K_M K_S} \left(\frac{1}{R_2^c} - \frac{K_S}{K_M} \right) \left\langle 1 - \frac{K_S}{K_M} \right\rangle^{\eta_3} \left(\frac{\rho_{SS}}{\rho_{AS}} \right)^{\delta}$$

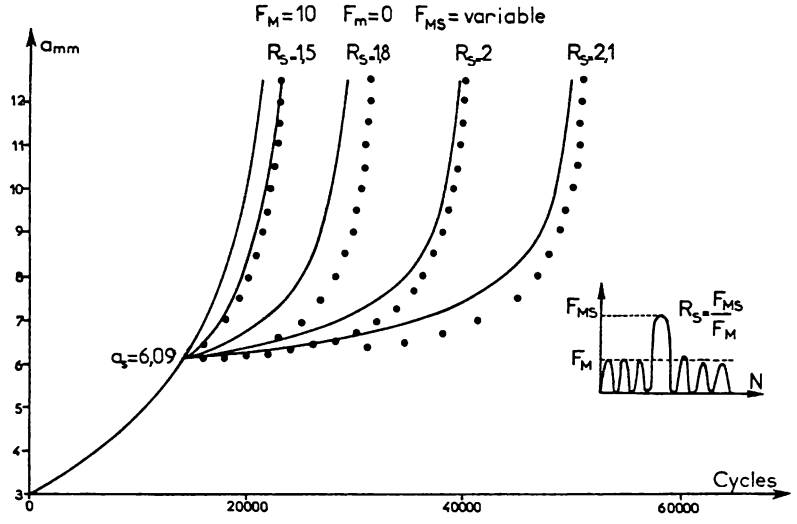
$$\frac{\rho_{SS}}{\rho_{AS}} = \frac{K_M^2}{K_{MS}^2 - 2\pi\sigma_Y^2(a - a_S)}$$

où ρ_{SS}/ρ_{AS} représente le rapport de la zone plastique fictive correspondant à un chargement périodique à la zone plastique actuelle (l'introduction de ρ_{SS}/ρ_{AS} a été discutée au § 3.2.3.3).

Le terme $\left(\frac{1}{R_2^c} - \frac{K_S}{K_M} \right)$ est introduit de façon à ce que le seuil tende vers sa valeur normale à saturation dans un chargement périodique. δ est un coefficient intrinsèque au matériau, la fonction $(\rho_{SS}/\rho_{AS})^{\delta}$ permet de traduire les différences d'évolution du seuil lors de la surcharge et après la surcharge. α est une constante qui s'exprime en fonction de R_1^c et R_2^c :

$$\alpha = \sqrt{R_1^c R_2^c} \frac{R_2^c - 1}{R_1^c - 1} \left(\frac{R_1^c R_2^c}{R_1^c R_2^c - 1} \right)^{\eta_3}.$$

Les courbes calculées de la figure 34 permettent de vérifier ce modèle, sur un exemple parmi beaucoup d'autres (alliage léger AU 4 G 1).



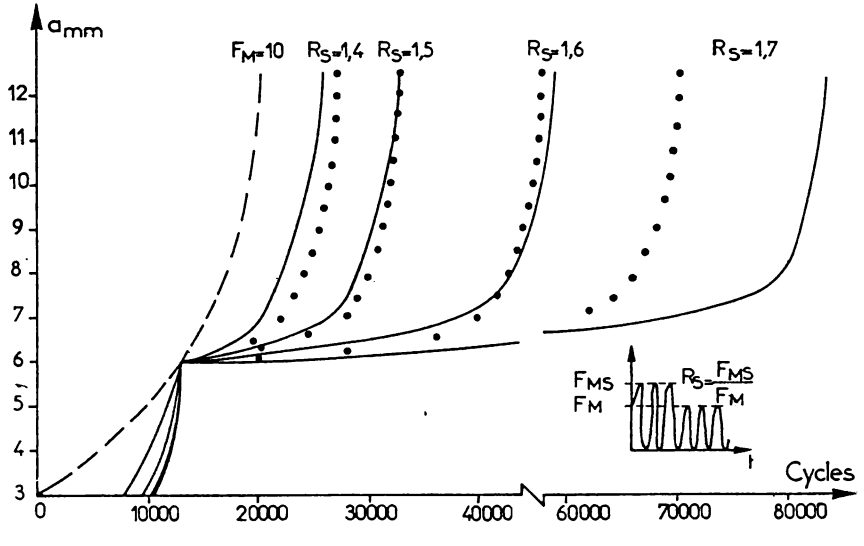


Fig. 34. Mise en évidence de l'insuffisance du modèle de Wheeler. (Comparer les expériences .... pour R_S = 1,5.) —— Simulation par le modèle à seuil évolutif.

6. ÉLÉMENTS SUR LES CALCULS DE FISSURATION DES STRUCTURES PAR L'APPROCHE GLOBALE

L'approche globale de la fissuration est celle qui utilise les variables de fissuration K_I, J ou G. Son avantage est de découpler les étapes du calcul de structure proprement dit (§ 6.1 et 6.2) et du calcul d'intégration du modèle de propagation (§ 6.3).

6.1. Calculs par éléments finis en élasticité (milieux bidimensionnels)

On ne possède de valeurs analytiques de facteurs d'intensité des contraintes que pour les structures de géométries très simples soumises à des chargements particuliers (voir § 3.1.2). Dans la pratique courante, il faut avoir recours à des calculs par éléments finis. L'un des problèmes ardus est le maillage qui doit rendre compte du champ singulier des contraintes au voisinage de la pointe de fissure et qui doit permettre un calcul économique du taux de restitution d'énergie réduit ou des facteurs d'intensité des contraintes, en fonction de l'aire ou de la longueur des fissures : $G_r(A)$ ou $K_{I_r}(A)$. Pour les milieux plans d'épaisseur e, on note a la longueur de la fissure, avec : $A = ea$.

Dans ce qui suit, la fissure est décrite par les conditions de liaison imposées aux nœuds du maillage par éléments finis. Dans le cas symétrique, par exemple, pour le maillage de la figure 35, la pointe de fissure est au nœud P, les lèvres sont libres (ni efforts, ni liaison), le prolongement PQ de la fissure a des nœuds bloqués dans la direction 2 (condition de symétrie). La pointe de fissure du schéma éléments finis est ainsi le premier nœud bloqué.

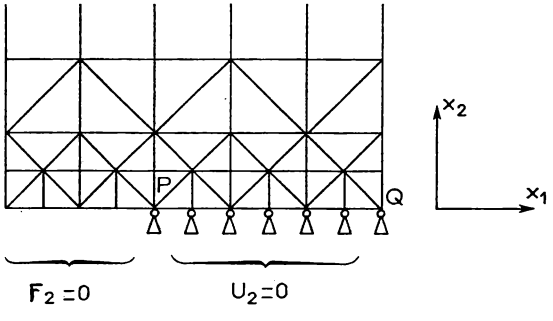


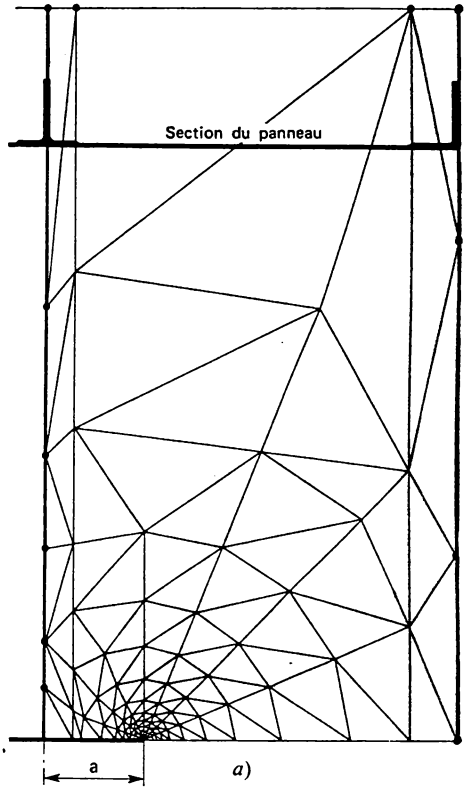
Fig. 35. Conditions aux limites définissant une fissure dans un calcul par éléments finis.

6.1.1. *Analyses locales et maillages associés*

Le facteur d'intensité des contraintes est déterminé à partir des résultats des contraintes calculées, ou mieux des déplacements, dans le voisinage de la pointe de la fissure. Cette technique nécessite une précision importante des calculs, ce qui, à cause de la singularité, impose des maillages adaptés :

— soit un maillage très fin, convergeant à la pointe de la fissure : éléments finis classiques isoparamétriques à 6 nœuds par exemple (fig. 36*a*) ; un nombre suffisant de secteurs doivent converger vers la pointe (au moins 6) et les dimensions radiales doivent s'affiner vers la pointe en progression géométrique ; la taille du premier triangle doit être comprise entre 1/1 000 et 1/100 de la longueur de fissure. dépendant de la précision recherchée,

— soit des éléments spéciaux pour le voisinage de la pointe, le plus simple étant de procéder à un décalage du nœud milieu d'un élément isoparamétrique fig. 36*b*) ; ceci induit, au sommet correspondant du triangle, un champ singulier similaire à celui de la solution cherchée.



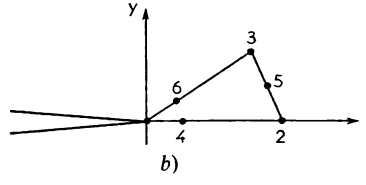


Fig. 36. Exemples de maillages par éléments finis.

Une fois déterminés les champs de déplacement, un moyen simple d'obtenir le facteur d'intensité des contraintes est d'utiliser les relations du paragraphe 2.2.4, *par exemple* en mode I et contraintes planes :

$$K_I = \lim_{\substack{r \to 0 \\ \theta = \pi}} \left(\frac{E}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2] \right).$$

En pratique, une extrapolation linéaire des résultats u_2^2/r vers $r = 0$ fournit la valeur de K_I.

6.1.2. *Méthodes énergétiques*

Les méthodes préconisées ici sont basées sur le calcul du taux d'énergie élastique libérée pour un accroissement unitaire de fissure. Connaissant G, il est facile de passer à une valeur équivalente du facteur d'intensité des contraintes. En contraintes planes et pour le mode I par exemple : $K_I = \sqrt{EG}$.

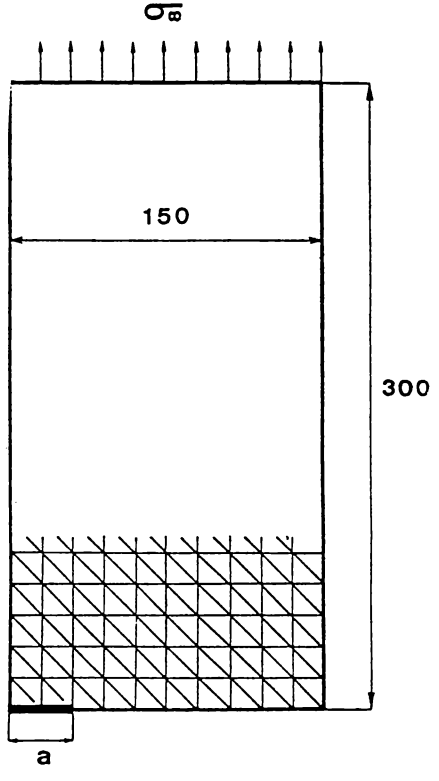


Fig. 37. Maillage du quart d'une plaque symétrique fissurée en son milieu, pour la méthode énergétique.

La méthode directe consiste à calculer le travail des efforts extérieurs pour différentes longueurs de fissures (avec les mêmes efforts extérieurs F_q) :

$$W_x = \sum F_q u_q$$

et à lisser puis dériver la relation obtenue entre W_x et A. On obtient alors G par :

$$G = \frac{1}{2} F \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}A}\bigg|_F = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}W_x(A)}{\mathrm{d}A}.$$

Cette méthode est précise et ne nécessite pas un maillage très fin au voisinage de la pointe de fissure (voir fig. 37). Il faut cependant autant de résolutions complètes qu'il y a de longueurs calculées (une dizaine de points sont généralement nécessaires pour obtenir un lissage correct sur un intervalle de longueur intéressant pratiquement).

6.1.2.1. *Méthode d'encadrement*

Rappelons les formules d'encadrement établies au paragraphe 4.2.2.1 pour des structures sollicitées par un chargement F_q et dont les déplacements élastiques correspondants sont u_q^e :

$$G_u = -\frac{1}{2} u_q^e \frac{\delta F_q}{\delta A} < G < G_F = \frac{1}{2} F_q \frac{\delta u_q^e}{\delta A}.$$

On met en pratique cette méthode de la manière suivante :

— un premier calcul de structure, correspondant à une configuration de fissure, permet de connaître tous les déplacements u_q^e là où les forces F_q sont imposées et les forces là où les déplacements sont imposés,

— la configuration de structure est portée à $A + \delta A$. En pratique, si le calcul est effectué par éléments finis, l'accroissement de fissure peut être de l'ordre de grandeur de la taille des éléments les plus petits. Contrairement à l'approche locale des facteurs d'intensité des contraintes, cette méthode ne nécessite pas un maillage particulièrement fin,

— un second calcul de structure pour cette nouvelle configuration est effectué avec, comme conditions aux limites, tous les efforts donnés ou calculés lors du premier calcul. Les déplacements calculés fournissent δu_q^e et :

$$G_F = \frac{1}{2} F_q \frac{\delta u_q^e}{\delta A}$$

— un troisième calcul de structure sans changement de configuration de fissure mais avec cette fois, comme conditions aux limites, les déplacements calculés ou donnés lors du premier calcul fournit les nouveaux efforts d'où l'on tire δF_q puis :

$$G_u = -\frac{1}{2} u_q^e \frac{\delta F_q}{\delta A}.$$

Cette méthode est relativement coûteuse à cause des trois calculs successifs pour obtenir un point. Par contre, elle est intéressante pour obtenir un encadrement, ce que ne donnent pas les autres méthodes.

6.1.2.2. *Méthode de perturbation*

Elle n'est adaptée qu'au cas où une seule longueur de fissure est étudiée; par contre, sa généralisation en tridimensionnel est très utile. Par rapport à la méthode directe définie ci-dessus, elle consiste à :

— faire un calcul complet de la structure pour la longueur de fissure considérée;

— déplacer d'une distance faible δa le nœud constituant la pointe de la fissure en ne perturbant que les éléments contenant ce nœud.

Cette perturbation ne provoque qu'une modification δK très locale de la matrice de rigidité $[K]$. En perturbant l'équation $[K]\{q\} = \{F\}$ correspondant au premier calcul, on trouve (les crochets étant omis)

$$\delta K.q + K.\delta q = \delta F = 0$$

ou encore :

$$\delta q = - K^{-1}.\delta K.q .$$

L'incrément de travail à force constante s'exprime par

$$\delta W_x = \delta q^T.F = - q^T.\delta K.K^{-1}.F = - q^T\,\delta K.K^{-1}.K.q$$

$$\delta W_x = - q^T.\delta K.q .$$

Connaissant les déplacements nodaux q (seules les valeurs locales sont nécessaires) et la variation de matrice de rigidité δK, il est aisé de calculer δW_x puis :

$$G = \frac{1}{2}\frac{\delta W_x}{\delta A}.$$

Cette méthode présente l'avantage de ne pas nécessiter un lissage suivi d'une dérivation comme dans la méthode directe. A cause de l'aspect local, il faut cependant un maillage assez fin. L'incrément δa doit être choisi entre 1/100 et 1/10 de la dimension de l'élément de pointe.

6.1.2.3. *Méthode de la flexibilité inverse*

Elle est intéressante lorsque toute la trajectoire de la fissure doit être calculée (trajectoire connue). Elle consiste à ne trianguler la matrice de rigidité qu'une seule fois pour un nombre d'inconnues maximum, c'est-à-dire lorsque la fissure a sa longueur maximale. Un traitement numérique, correspondant à des refermetures successives de la fissure, fournit alors les valeurs de G au milieu de l'intervalle séparant les nœuds successifs. Avec cette méthode, on peut

encore travailler avec un maillage régulier comme sur la figure 37. On se place ici dans le cas simplifié où il y a symétrie. Notons $[C] = [K]^{-1}$ la matrice des complaisances. L'équilibre pour une longueur de fissure intermédiaire se met sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{c} q_V \\ \hline q_F \\ \hdashline q_M \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c:c} C_V & C_{VF} & C_{VM} \\ \hline C_{VF}^T & C_F & C_{FM} \\ \hdashline C_{VM}^T & C_{FM}^T & C_M \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} F_V \\ \hline F_F \\ \hdashline F_M \end{array}\right\}$$

n_F

avec les notations indicielles suivantes :

V : degré de liberté non situé sur la trajectoire de la fissure,
F : degré de liberté sur les lèvres (encore ouvertes) de la fissure,
M : degré de liberté déjà bloqué, dans le prolongement de la fissure.

On a évidemment $F_F = q_M = 0$. Il est facile d'en déduire :

$$F_M = - C_M^{-1}.C_{VM}^T.F_V$$
$$q_V = (C_V - C_{VM}.C_M^{-1}.C_{VM}^T)\, F_V .$$

Seuls les déplacements q_V travaillent. Le travail des efforts extérieurs s'exprime par

$$W = q^T.F = q_V^T.F_V = F_V^T.(C_V - C_{VM}.C_M^{-1}.C_{VM}^T).F_V .$$

S'il n'y a pas de déplacements imposés non nuls. $\delta F_V = 0$ au cours d'un accroissement de fissure et l'on a :

$$\delta W = - F_V^T.\delta(C_{VM}.C_M^{-1}.C_{VM}^T).F_V .$$

La méthode s'applique alors en trois étapes :

1) triangulation de la matrice K complète ;

2) résolution de n_F problèmes pour obtenir les n_F colonnes de la matrice K^{-1}, constituées par les degrés de liberté de la fissure (on utilise des seconds membres unité) ;

3) n_F calculs de δW ; la matrice C_M^{-1} pour la longueur a_j est obtenue facilement à partir de celle de la longueur $a_j + 1$ par une méthode d'inversion par blocs.

Cette méthode est très économique puisque la plus grosse partie C_V de la matrice C n'est pas concernée et qu'une seule triangulation complète est nécessaire pour traiter toutes les longueurs de fissure. Le gain en temps de calcul varie entre 8 et 20 suivant le type d'exemple. La méthode est un peu moins précise que les précédentes à cause des incréments δa finis qui sont

appliqués (les valeurs obtenues de $\delta W/\delta A$ sont plus éloignées de la dérivée dW/dA). Son implantation en sortie d'un programme d'éléments finis ne pose pas de problème. Elle a été validée sur plusieurs exemples. La figure 38 montre le cas d'une plaque plane en traction perpendiculairement à la fissure et la description de l'effet de bord (comparée à la correction de Dixon).

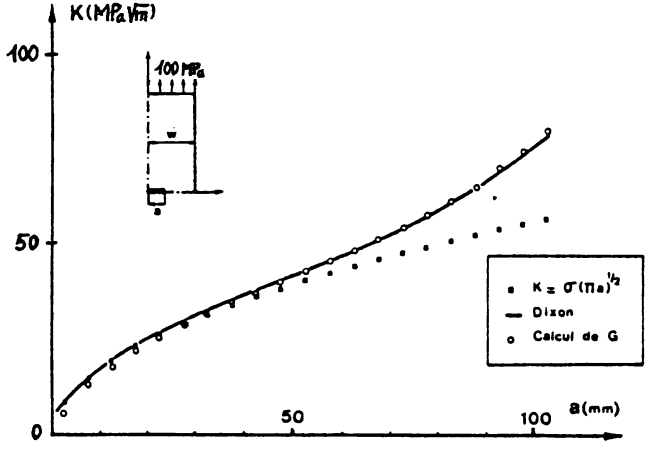


Fig. 38. Calcul de $K(a)$ d'une plaque fissurée en traction ($w = 150$ mm) (d'après Labourdette).

6.1.2.4. *Méthode de l'intégrale J*

C'est une méthode différente des précédentes puisqu'elle ne nécessite qu'un seul calcul. On se sert de la relation démontrée en élasticité :

$$G = J = \int_C \left(W_e n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds$$

Le contour C doit entourer la pointe de la fissure mais assez loin (pour éviter les erreurs dues à la singularité). La difficulté de dérivation d/dA est remplacée par l'obtention des dérivées spatiales telles que $\partial u_2/\partial x_1$. Les contraintes et déformations doivent être évaluées sur le contour C, en général formé par les bords des éléments finis : il faut donc utiliser un procédé d'interpolation à partir de valeurs connues aux points de Gauss.

En pratique, il est conseillé d'introduire un ou plusieurs contours rectangulaires à l'intérieur du maillage de la structure (les interpolations des contraintes sont plus difficiles sur les bords libres). Les opérations d'interpolation et de dérivation sont plus faciles si l'on utilise une méthode d'éléments finis d'ordre supérieur dans laquelle les inconnues nodales comprennent le gradient des déplacements.

6.2. Cas des structures fissurées tridimensionnelles

On s'intéresse maintenant au cas des fissures représentées par un nombre fini de variables, ce qui constitue une discrétisation du formalisme continu présenté au paragraphe 4.6. Considérons le front Γ, décomposé en un certain nombre de segments, et supposons que son évolution soit entièrement définie par l'évolution des points M_i. Notons $\dot{a}_i$ la vitesse normale au point M_i : ce n'est pas la vitesse d'un point matériel mais celle du front géométrique (fig. 39).

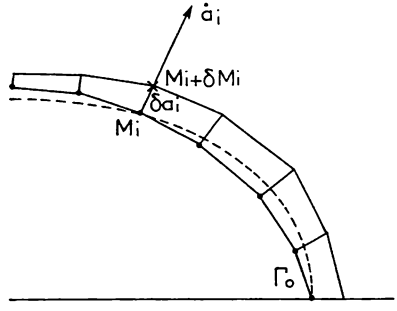


Fig. 39. Discrétisation du front de fissure.

On se place dans le cas du solide élastique fragile et, pour fixer les idées, dans le cas des efforts extérieurs imposés sur $\partial\mathscr{S}_F$. Pour simplifier, on ne considère qu'un seul effort extérieur, $\vec{u}$ désigne le déplacement du point d'application de cet effort. L'énergie libre du système peut s'écrire :

$$\Psi(\vec{u}, a_i) = \tfrac{1}{2} R(a_i)\, \vec{u}.\vec{u},$$

en supposant que les a_i sont comptés à partir du front Γ_0 considéré comme front initial. A ce front initial correspond une certaine rigidité de la structure fissurée. Son énergie libre est :

$$\Psi(\vec{u}, 0) = \tfrac{1}{2} R(0)\, \vec{u}.\vec{u}.$$

Notons que l'on peut imaginer une infinité de modifications du front Γ_0 qui conservent la même rigidité (exemple ligne pointillée sur la figure 39). Cela signifie que dans l'espace des paramètres a_i on peut tracer une surface équipotentielle définie par :

$$\Psi(\vec{u}, a_i) = \Psi(\vec{u}, 0).$$

L'évolution du front Γ est définie au travers de la discrétisation, par celle des points M_i :

$$M_i = M_{i0} + \delta M_i = M_{i0} + \delta a_i = M_{i0} + \dot{a}_i\, \delta t$$

mais aussi par celle des segments adjacents, avec une approximation linéaire.

Les variables du problème d'évolution sont en fait les aires A_i définies par :

$$\delta A_i = \tfrac{1}{2}\, \delta a_i \mid M_{i+1} - M_{i-1} \mid .$$

On note sur la figure 40 que l'évolution du segment (M_{i-1}, M_i) se décompose facilement à partir de l'évolution des points M_{i-1} et M_i et que les aires δA_i s'additionnent de façon cohérente (en négligeant des termes d'ordre 2 lorsque δa_i est petit). Pour l'extrémité du front, sur un bord libre, l'évolution $\dot{a}_n$ du point M_n se fait suivant le bord libre. Dans ce cas $\delta A_n = \tfrac{1}{2}\, \delta a_n \mid M_n - M_{n-1} \mid$. L'énergie libre s'écrit maintenant :

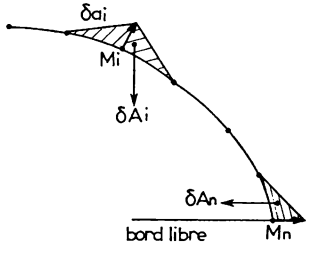
$$\Psi(\vec{u}, A_i) = \tfrac{1}{2}\, R(A_i)\, \vec{u}.\vec{u}\,.$$

La variable thermodynamique associée à la variable A_i est définie par :

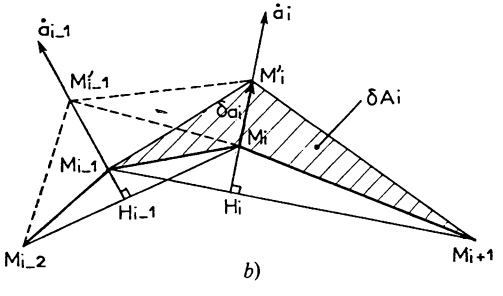
$$g_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial A_i} = -\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial A_i}\vec{u}.\vec{u}\,.$$

La puissance dissipée (on néglige plasticité et effets de seuil) s'exprime par :

$$\Phi_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial A_i}\dot{A}_i = g_i\, \dot{A}_i$$



a)



b)

Fig. 40. Définition des perturbations des nœuds du front de fissure et des accroissements d'aire correspondants.

et l'on suppose que la fissuration est un mécanisme dissipatif normal. Le potentiel de dissipation peut s'écrire $\varphi^*(g_i)$ et la loi de fissuration :

$$\dot{A}_i = \frac{\partial \varphi^*}{\partial g_i}.$$

Si φ^* est quadratique, la progression de fissure se fait dans la direction du gradient de l'énergie :

$$\dot{A}_i = \frac{\partial \varphi^*}{\partial g_i} = \alpha g_i = -\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial A_i}.$$

Cela revient à considérer le critère suivant pour la propagation de la fissure : *parmi toutes les évolutions physiquement admissibles l'évolution réelle maximise l'énergie élastique libérée.* Autrement dit, pour un accroissement de fissure infinitésimal dont le module est fixé :

$$\| \mathrm{d}a \| = \left(\sum_i \mathrm{d}a_i \, \mathrm{d}a_i \right)^{1/2}$$

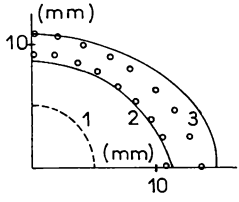
l'évolution $\mathrm{d}a_i$ est telle que la décroissance de Ψ soit maximale, puisque $\mathrm{d}a_i$ est colinéaire au gradient, c'est-à-dire perpendiculaire à la surface équipotentielle $\Psi(u, a_i) = \Psi(u, 0)$ définie plus haut. On note la différence par rapport à une maximisation avec $\mathrm{d}A$ fixé (norme $\sum_i | \mathrm{d}a_i |$).

Cette loi, dite du gradient, est assez bien confirmée par l'expérience. Une bonne corrélation a pu être obtenue sur plusieurs matériaux, diverses géométries, divers types de fissure initiale, plusieurs chargements, entre la vitesse normale $\dot{A}_i$ mesurée sur quelques points du front expérimental et la quantité g_i calculée par éléments finis, à partir de la variation du travail des efforts extérieurs. La figure 41 montre l'exemple de l'alliage AU2GN-T6, pour lequel on indique g_i en fonction de $\alpha = \dot{A}_i/g_i$. La figure 41*a* montre, par ailleurs, que l'on peut faire des prédictions raisonnables : le front final a été calculé pas à pas (9 fronts successifs), chaque front étant déduit du précédent par la loi de fissuration. La constante α qui fournit le nombre de cycles est déterminée par la figure 41*b* regroupant de nombreux essais.

Le calcul numérique du taux local d'énergie dissipée g_i se fait par la méthode des perturbations. Pour chaque front étudié, la structure et le front sont discrétisés par éléments finis tridimensionnels. La résolution du problème d'élasticité fournit les déplacements nodaux $\{ q \}$. Chaque nœud du front est ensuite perturbé suivant la normale d'une quantité δa_i (fig. 40) et la quantité g_i associée est fournie par :

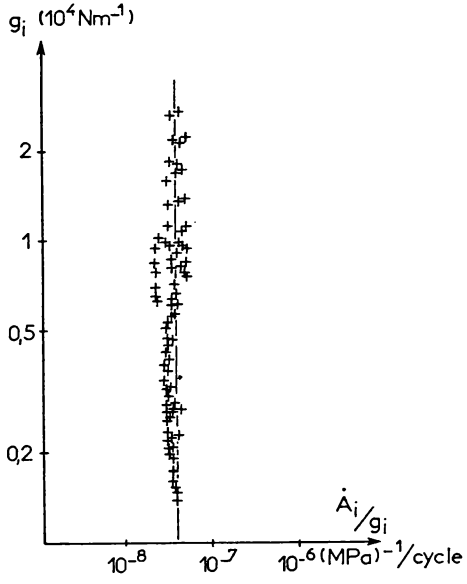
$$g_i = \frac{1}{2 \, \delta A_i} \left(- \{ q \}^T [\delta K] \{ q \} \right)$$

où $[\delta K]$ est la variation de la matrice de rigidité induite par la perturbation (seuls les nœuds proches sont concernés ce qui fait que la méthode est écono-



Prévision de la propagation des fissures tridimensionnelles: alliage 2618_ 851 en flexion pure.
——— mesures; ∘∘∘∘ calculs;
----- 1: N=0; 2: N=74800 cycles;
3 N=94000 cycles.

a)



b)

Fig. 41. Prévision de la progression des fissures tridimensionnelles :
(*a*) fronts successifs : ∘∘∘∘ calcul, ——— expérience ;
(*b*) mise en évidence de la constante α (d'après Labourdette).

mique). Cette méthode est assez précise, à condition que le maillage soit assez fin dans la région du front de fissure.

Cette approche est bien adaptée aux problèmes de progression des fissures non traversantes. Elle permet :

1) de calculer les facteurs d'intensité des contraintes locaux sur la base du taux d'énergie relâchée :

$$g(s) = \frac{1 - \nu^2}{E}[K_I^2(s) + K_{II}^2(s)] + \frac{1}{2\mu}K_{III}^2(s);$$

2) de calculer l'évolution du front de fissure à partir d'une loi (loi du gradient ou loi plus générale) établie sur la base d'un certain nombre d'expériences ;

3) de traiter le même type de problème avec une approximation par des fissures elliptiques : les 2 variables du problème sont alors les demi-axes de l'ellipse ;

4) de résoudre aussi les problèmes de fissures traversantes (contraintes planes ou déformations planes) dans lesquels deux pointes de fissure interviennent simultanément, les vitesses $\dot{a}_1$ et $\dot{a}_2$ étant à priori différentes : effets de bord (fissure dissymétrique), influence de raidisseurs.

6.3. Intégration des modèles

Comme pour la prévision de l'amorçage des fissures par la mécanique de l'endommagement, la prévision de la progression des fissures par la mécanique de la fissuration s'opère en deux étapes.

Tous les modèles utilisent les facteurs d'intensité des contraintes ou le taux de restitution d'énergie comme variable intensive caractéristique de la structure et du chargement. Si l'on se restreint au cas du chargement simple, la notion de taux de restitution d'énergie réduit permet le découplage du problème de structure et du problème d'évolution temporelle puisque (voir § 4.2.3) :

$$G(A, t) = G_r(A).F^2(t).$$

— Dans un premier temps, connaissant la trajectoire de la fissure dans la structure (ligne droite dans une structure bidimensionnelle, cercle ou ellipse d'excentricité constante dans une structure tridimensionnelle), plusieurs calculs de structures tels que ceux décrits au paragraphe 6.1 permettent de connaître un ensemble de valeurs discrètes $G_r(A_i)$, correspondant à l'évolution de la fissure depuis la fissure initiale A_0 jusqu'à la fissure qui rompt la structure en deux parties. Par une méthode de lissage il est facile de définir une fonction $G_r(A)$ dont le graphe lisse au mieux les valeurs numériques $G_r(A_i)$. Une fonction puissance facilite le travail suivant :

— Dans un deuxième temps, on intègre l'équation différentielle non linéaire ou le système d'équations différentielles qui constituent le modèle. Par exemple, pour une loi de progression par fatigue telle que celle du paragraphe 5.4 :

$$\frac{\delta A}{\delta N} = \frac{1}{C'^{\eta/2}}(G_M^{*\eta/2} - G_m^{*\eta/2})$$

qui, pour $G_m < G_S$ (seuil de fissuration), se met sous la forme

$$\frac{\delta A}{\delta N} = \left[\frac{G_r(A)}{C'}\right]^{\eta/2}(F_M - F_S)^{\eta}.$$

Cette équation différentielle à variables séparables :

$$G_r(A)^{-\eta/2}\,\delta A = C'^{-\eta/2}(F_M - F_S)^{\eta}\,\delta N$$

peut être intégrée pour donner $A(N)$ si l'on connaît l'histoire du chargement $F(t)$ qui permet de définir les deux fonctions cycliques correspondant aux maximums et au seuil de $F(t)$: $F_M(N)$, $F_S(N)$

$$\int_{A_0}^{A} G_r^{-\eta/2}(A)\,\delta A = \int_0^N C'^{-\eta/2}[F_M(N) - F_S(N)]^{\eta}\,\delta N.$$

Cette intégration est à poursuivre jusqu'au moment où les conditions de rupture fragile sont atteintes :

$$G_r^*(A)\, F_M^2(N) = G_c \rightarrow \begin{cases} A = A_c & (A_c \text{ instable}) \\ N = N_R \end{cases}.$$

Des exemples correspondant à l'évolution de fissures dans les panneaux raidis soumis à des chargements périodiques sont décrits sur la figure 42.

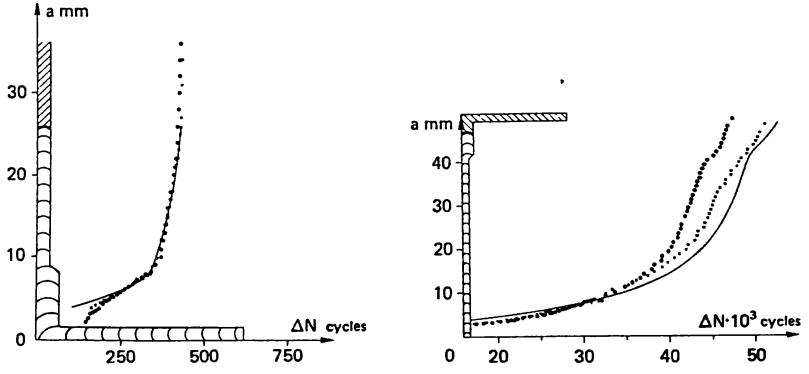


Fig. 42. Evolutions de fissures dans des panneaux raidis en alliages AU 2 GN T 6 et AU 4 G 1 T 3/T 4.
—— calcul ●●●●● essais

Lorsque l'histoire du chargement n'est connue que par des variables statistiques deux cas peuvent se produire :

— le modèle de progression de fissure est une équation différentielle à variables séparables qui entraîne la règle de cumulation linéaire (voir chap. 3) ; alors, connaissant la densité de probabilité de la force F_M, on peut calculer analytiquement une relation entre la moyenne au sens des probabilités de la surface de fissure et le nombre de cycles ;

— le modèle ne contient pas la règle de cumulation linéaire ; alors il faut utiliser une méthode numérique ; un grand nombre de calculs sont effectués pour des réalisations indépendantes du chargement aléatoire défini par la densité de probabilité des maximums par exemple. L'analyse des résultats de ces calculs fournit les quantités statistiques recherchées : relation entre la moyenne de A et le nombre de cycles ou l'inverse (moyenne du nombre de cycles nécessaires pour atteindre une surface de fissure donnée). C'est la méthode de Monte Carlo.

7. CALCULS DE FISSURATION PAR L'APPROCHE LOCALE

7.1. Limites et insuffisances de la mécanique de la rupture globale

Les méthodes de calcul des structures fissurées exposées au paragraphe 6 sont fondées sur les variables définies au niveau global du milieu fissuré. Elles sont applicables dans de nombreuses situations pour lesquelles il n'est pas nécessaire de connaître avec exactitude les états de contrainte ou d'endommagement au voisinage du front de fissure : milieux bidimensionnels quasi élastiques avec zone plastique petite par rapport à la taille de la fissure, milieux tridimensionnels en chargement proportionnel, chargements périodiques en fatigue, qui correspondent à l'organigramme de la figure 43.

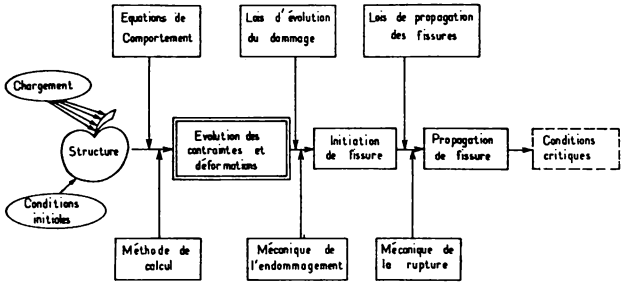


Fig. 43. Organigramme du calcul classique.

Dans d'autres situations, au contraire, ces approches peuvent être mises en défaut, soit à cause de la taille des fissures (problème des fissures courtes), soit à cause d'une plasticité d'ensemble plus prononcée (rupture ductile, fissuration par fluage), soit à cause d'effets d'histoire (de chargement, de température), soit enfin par la nature des mécanismes de détérioration (fissuration multiple dans le béton, délaminage des composites...). Quelques exemples sont développés ci-dessous :

Fissures courtes

Il s'agit de défauts ou de fissures dont la taille est dans les métaux de l'ordre de quelques cristaux (entre 0,1 et quelques millimètres) et dont l'évolution peut représenter une part importante de la vie de la structure. La fissure a une taille du même ordre que les hétérogénéités locales de microstructure, et peut interagir avec des microfissures voisines de taille similaire ; la zone plastique en tête de fissure a une nature différente de celle des fissures longues, les états de

contrainte au voisinage de la fissure sont mal connus car ils devraient être définis à l'échelle cristallographique. En pratique on observe une propagation d'aspect cahotique, avec bifurcations et branchements, avant d'atteindre le régime de « fissure longue ». La figure 44 illustre l'impossibilité d'appliquer la variable usuelle ΔK pour corréler des résultats de fatigue relative à des fissures de 100 µm à quelques millimètres puisque à ΔK croissant la vitesse de fissuration d'abord décroît puis augmente.

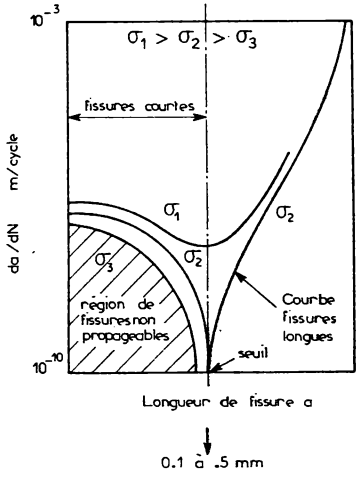


Fig. 44. Schéma du domaine de propagation des fissures courtes (d'après K. Miller).

Plastification d'ensemble

Elle peut intervenir à deux niveaux :

— dans la région de la pièce dans laquelle naît et se propage la fissure, même avant amorçage ;

— dans le prolongement de la fissure, au cours de la propagation et de la rupture.

Dans le premier cas une analyse en plasticité de la pièce non fissurée est nécessaire pour évaluer correctement les contraintes à « l'infini » avant d'appliquer la mécanique de la rupture. Dans le second cas c'est le mécanisme même de propagation qui interagit avec la plasticité et peut rendre inutilisables les paramètres globaux classiquement définis : K, G, J, même lorsque l'on utilise des champs singuliers définis en plasticité (voir § 2.3.2). La rupture ductile et les effets de retard à la fatigue dus aux surcharges entrent dans cette catégorie.

Fissuration par fluage

Dans ce cas la plastification d'ensemble s'accompagne d'effets du temps : fluage primaire et secondaire en tête de fissure et éventuellement dans l'ensemble

de la pièce. Les variables globales sont le facteur d'intensité des contraintes K (voir § 5.3) et l'intégrale de contour C^* qui tient compte du fluage secondaire (§ 2.3.2). La figure 45 montre, par des essais à K constant, que la variable C^* ne convient pas (da/dt constant) pour un alliage d'aluminium et plus généralement pour les matériaux assez fragiles. Pour les matériaux très ductiles au contraire, ni K, ni C^* ne fournissent une corrélation correcte (exemple fig. 46). De meilleures corrélations avec C^*, quelquefois mentionnées dans la littérature, peuvent être dues à la méthode de détermination de C^* qui incorpore implicitement le résultat da/dt lui-même.

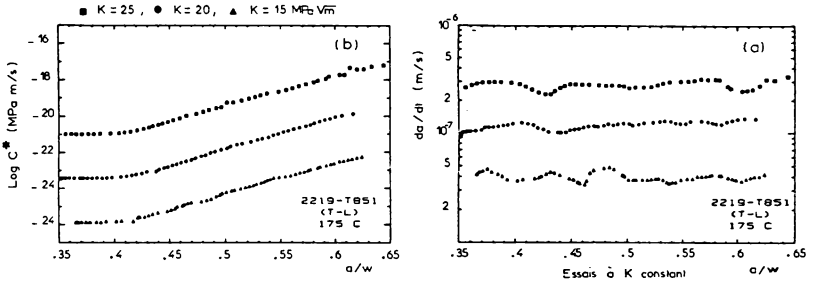


Fig. 45. Propagation en fluage sur l'alliage 2219 (d'après P. Bensussan).

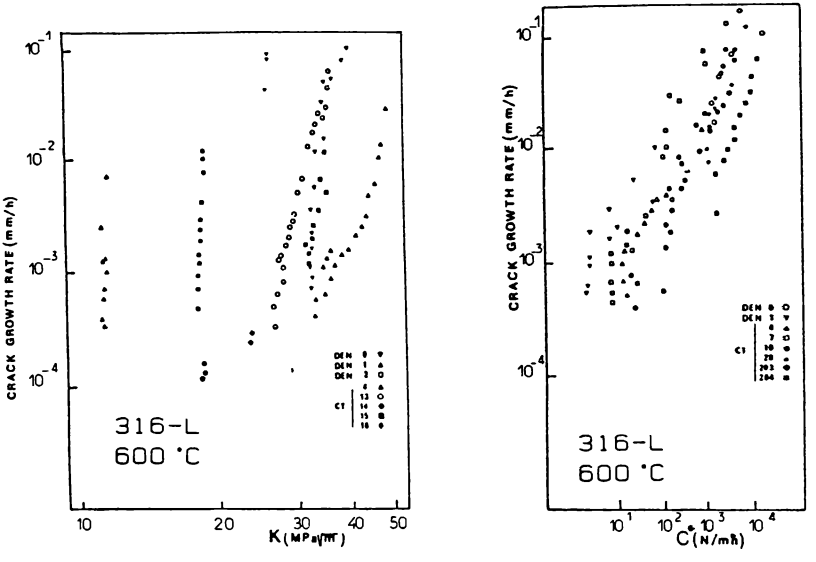


Fig. 46. Propagation en fluage sur l'acier 316 (d'après A. Pineau).

Ces quelques exemples montrent les limites de l'approche globale de la mécanique de la rupture. Il est possible d'améliorer les corrélations en introduisant des variables internes supplémentaires pour décrire d'autres processus physiques, les effets de fermeture, les effets d'histoire... (§ 4.3 et 5.4.2), mais au prix de complications supplémentaires. Une voie plus simple et souvent plus précise, est celle de l'approche locale de la fissuration.

7.2. Principes des approches locales

Elles consistent à déterminer aussi précisément que possible les contraintes, déformations, déformations plastiques et variables décrivant la détérioration dans la zone en amont du front de fissure, en tenant compte des redistributions de contraintes engendrées par l'écoulement plastique et l'endommagement. Un critère local de rupture de l'élément de volume est utilisé pour faire croître la longueur de la fissure.

7.2.1. *Différents types d'approches locales*

Schématiquement on peut distinguer deux niveaux d'approches locales :

— La fissure continue à être traitée comme une discontinuité de la matière (avec conditions aux limites de bords libres : effort nul, déplacement libre) et l'organigramme du calcul est celui de la figure 47. L'accroissement de sa longueur a lieu lorsque le critère local de rupture est atteint. En pratique, dans un schéma numérique par la méthode des éléments finis, l'augmentation de longueur se fait par « relâchement de nœud » : la condition de liaison du nœud de pointe de fissure (point P de la figure 35) est relâchée progressivement. On doit tenir compte des nouvelles déformations plastiques et des nouvelles redistributions qui se produisent lors de ce relâchement à caractère discret. Généralement, avec une telle méthode, une notion de distance critique à la pointe de fissure est nécessaire, à cause des champs qui restent singuliers. Le critère physique de rupture correspond donc à une valeur critique d'une variable (con-

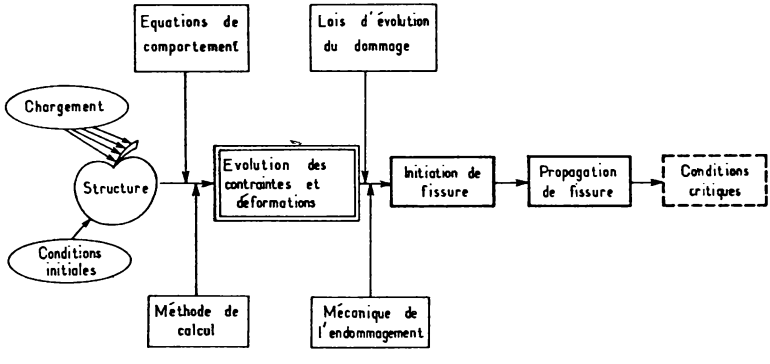


Fig. 47. Organigramme de la méthode sans couplage local.

trainte, déformation, déformation cumulée, énergie, endommagement) atteinte à une distance critique d_c qui dépend du matériau. En pratique cette distance dépend aussi du maillage local en éléments finis dans la zone de fond de fissure. Une simplification de ce premier type d'approche locale consiste à utiliser des champs de contrainte-déformation établis par des formulations analytiques valables pour des lois de comportement simples.

— On utilise la mécanique de l'endommagement (chap. 7), la fissure étant schématisée par une zone complètement endommagée qui reste continue au sens de la mécanique des milieux continus. Une fissure est alors définie comme le lieu des points voisins pour lesquels le dommage a atteint sa valeur critique de rupture : $D = D_c$ ou $D = 1$ (fig. 48). On tient compte ainsi de la détérioration progressive de la matière et de la chute de rigidité correspondante. La fissure, ou zone complètement endommagée, est décrite par les points qui n'ont plus aucune rigidité.

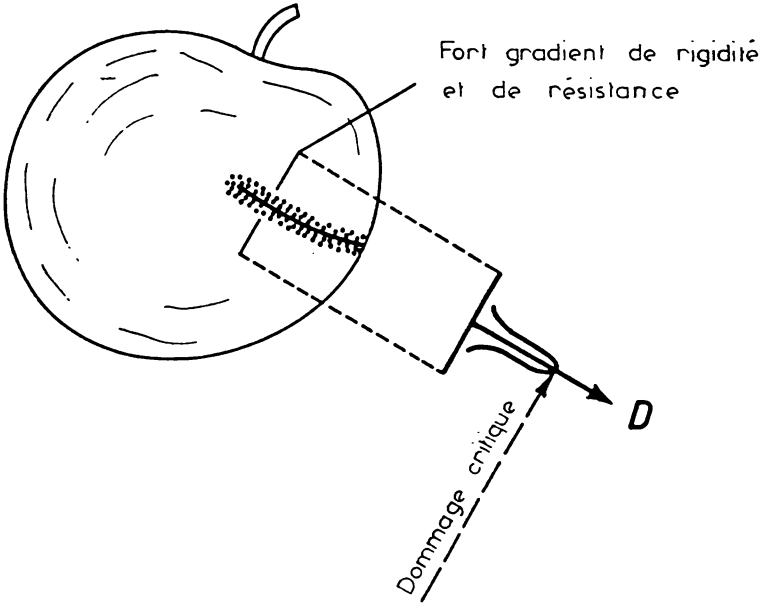


Fig. 48. Fissure définie comme une zone complètement endommagée.

Dans son principe une telle approche est intéressante car elle élimine la nécessité d'une distance critique et l'aspect discret du procédé de relâchement de nœud. En effet, les redistributions de contraintes dans la zone partiellement endommagée sont telles que les singularités disparaissent : la contrainte (principale) diminue en atteignant la zone complètement endommagée ($D = 1$). Cette méthode, qui correspond à l'organigramme de la figure 49, a été utilisée d'abord par Hayhurst dans le cas du fluage. Une méthode simplifiée

est possible en considérant une variation brutale du dommage entre $D = 0$ et $D = 1$: des solutions analytiques peuvent alors être obtenues dans des cas particuliers.

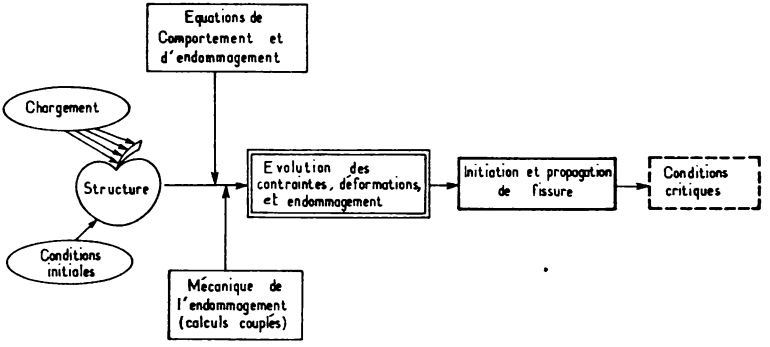


Fig. 49. Organigramme de la méthode avec couplage.

7.2.2. *Méthodologie pratique*

Ces approches locales sont évidemment d'une mise en œuvre plus complexe que les approches classiques de la mécanique de la rupture. En pratique, avec l'une ou l'autre des deux méthodes définies ci-dessus, il faut :

(*i*) établir correctement les lois de comportement et d'endommagement de l'élément de volume du matériau, en y incorporant les mécanismes physiques essentiels du processus de rupture étudié, comme il est indiqué dans les chapitres 3 à 7 ;

(*ii*) mettre au point un « modèle » de pièce fissurée, en schématisant la fissure initiale, la zone de croissance (discrétisation du maillage), la distance critique (ou le critère de rupture du premier élément), le matériau... Cette étape est indispensable pour la première approche car la prévision dépend très fortement de la discrétisation locale. Elle est intéressante pour la seconde méthode en tant que vérification. Les résultats d'un calcul de progression de fissure sur ce modèle de pièce fissurée (par exemple une éprouvette *CT*) doivent être comparés aux résultats de l'essai de laboratoire correspondant ;

(*iii*) la prévision d'autres situations relatives au même matériau est alors possible, avec des pièces de géométries différentes, des chargements différents, des longueurs de fissure initiales différentes..., etc. On utilise une discrétisation locale aussi proche que possible de celle étalonnée en (*ii*).

Pour utiliser l'approche par la mécanique de l'endommagement, en tenant compte simultanément du couplage endommagement-(visco)plasticité et endommagement-élasticité, les méthodes par éléments finis doivent être modifiées avec des schémas numériques précis pour assurer la convergence spatiale et la convergence temporelle avec un coût raisonnable de calcul. Un procédé

pratique pour éviter la réactualisation de la matrice de rigidité à chaque incrément de temps (ou de charge) consiste à reporter les variations correspondantes au second membre. Ainsi, le système linéaire :

$$Kq = Q + Q_0$$

de l'analyse plastique (§ 6.1.2 du chapitre 5 ou § 5 du chapitre 6) est modifié en tenant compte de l'influence du dommage sur la rigidité élastique (Q_0 correspond aux déformations plastiques) :

$$K(D)\, q = Q + Q_0 .$$

La méthode pratique consiste à écrire :

$$K^* q = Q + Q_0 + [K^* - K(D)]\, \tilde{q}$$

où $\tilde{q}$ est ici une évaluation approchée de q (prévision à partir du pas précédent). $K^* = K(D^*)$ est la dernière matrice de rigidité réactualisée. On procède à une nouvelle réactualisation lorsque l'écart $D - D^*$ est supérieur à une valeur fixée. Cette méthode fournit un bon compromis coût-précision dans la mesure où les incréments de temps (ou de charge) sont déjà faibles à cause de l'écoulement plastique.

7.3. Exemples

On donne sommairement ci-dessous quelques exemples de calculs de fissuration utilisant l'approche locale par la mécanique de l'endommagement.

7.3.1. *Propagation d'une fissure dans un milieu plan élastique parfaitement fragile*

Dans ce domaine de problèmes d'évolution fortement non linéaires, il est difficile de trouver des solutions analytiques. Néanmoins, avec une hypothèse très forte sur le comportement du matériau, des résultats intéressants peuvent être obtenus. Le matériau est considéré comme élastique parfaitement fragile c'est-à-dire une loi d'évolution du type :

$$D = D_c\, H(\varepsilon - \varepsilon_R)$$

où D_c est la valeur critique de l'endommagement, ε_R la déformation à rupture et H la fonction échelon d'Heavyside.

Par une analyse utilisant la transformation conforme dans des problèmes bidimensionnels on peut démontrer que la zone endommagée a une épaisseur $(K/E\varepsilon_R)^2$ où K est le facteur d'intensité des contraintes en mode I ou en mode III et ε_R la déformation à rupture respectivement en traction et en cisaillement. Dans les deux cas, le front de la zone endommagée est une cycloïde qui dépend de la vitesse de propagation (fig. 50).

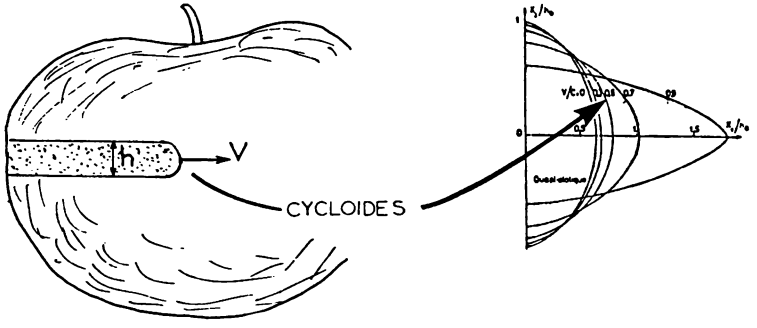


Fig. 50. Propagation d'une zone endommagée dans un milieu élastique parfaitement fragile (d'après H. D. Bui, A. Ehrlacher).

7.3.2. *Propagation des fissures dans le béton*

Le comportement du béton peut être représenté par l'élasticité linéaire couplée à une loi d'endommagement fonction d'une déformation équivalente, définie au paragraphe 6.2.2 du chapitre 7. Un exemple de résultat d'un calcul couplé est indiqué figure 51. Il s'agit d'une éprouvette entaillée en béton, calculée par éléments finis dans le cadre de l'hypothèse des déformations planes. L'expérience réalisée à déformation imposée montre une tendance au développement de deux fissures dont une seule se propage complètement comme indiqué sur la figure 51*a*.

Le calcul d'une demi-plaque donne une zone endommagée qui progresse en fonction de la déformation imposée comme indiqué sur la figure 51*c*. La comparaison avec la figure 51*a* est satisfaisante. Enfin, la figure 51*b* donne la comparaison entre les graphes calculés et mesurés de l'évolution de l'ouverture de fissure en fonction de la charge appliquée.

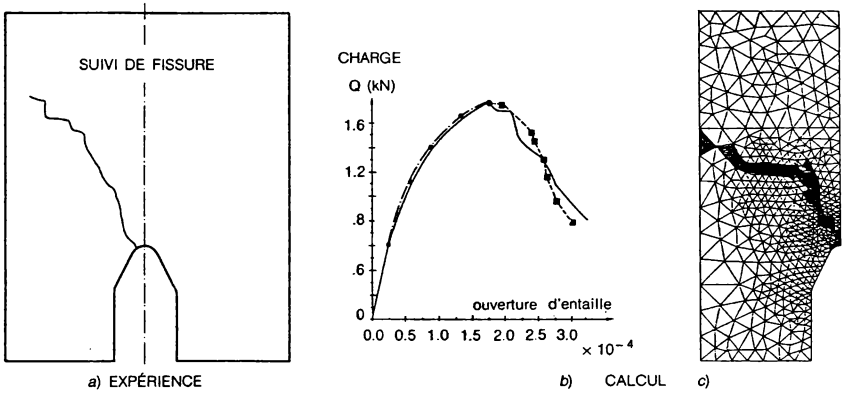


Fig. 51. Fissuration d'une plaque entaillée en béton (d'après J. Mazars).

7.3.3. *Bifurcation des fissures*

Les critères de bifurcation des fissures décrits au paragraphe 4.5 s'appliquent bien pour les milieux plans. Leur extension au cas des milieux tridimensionnels est difficile (voir § 4.6) et l'on peut penser que la propagation des fissures dans les milieux tridimensionnels sollicités en chargement non proportionnel sera avantageusement traitée par l'approche locale.

Au titre d'une étude de faisabilité on décrit ci-dessous un cas bidimensionnel voisin de celui de la figure 27 du paragraphe 4.5. Il s'agit de l'étude de la croissance d'une fissure de fatigue dans une plaque mince carrée chargée en biaxial par deux forces F_1 et F_2 (fig. 52). La demi-fissure initiale OA est inclinée de -20^o par rapport à F_1. Un rapport de forces $F_2/F_1 = 1$ engendre une croissance de la fissure dans son prolongement d'une quantité AB. Un changement de rapport de forces $F_2/F_1 = 0$ induit une bifurcation de la fissure d'un angle $\alpha \simeq 90^o$ avec une progression d'une quantité BC.

Le dessin de la figure 52 représente en noir la zone endommagée calculée par éléments finis avec une loi d'élasticité linéaire couplée à une loi de fatigue à grands nombres de cycles (§ 4.3). On considère ici qu'un quart d'élément est complètement endommagé lorsque l'endommagement critique Dc est atteint au point de Gauss correspondant. Pour le cas considéré (Alliage léger AU4G 2024) cela correspond à des nombres de cycles de l'ordre de 10^6 qui interdisent une procédure pas à pas en nombre de cycles; on utilise une procédure incrémentale sur l'endommagement D.

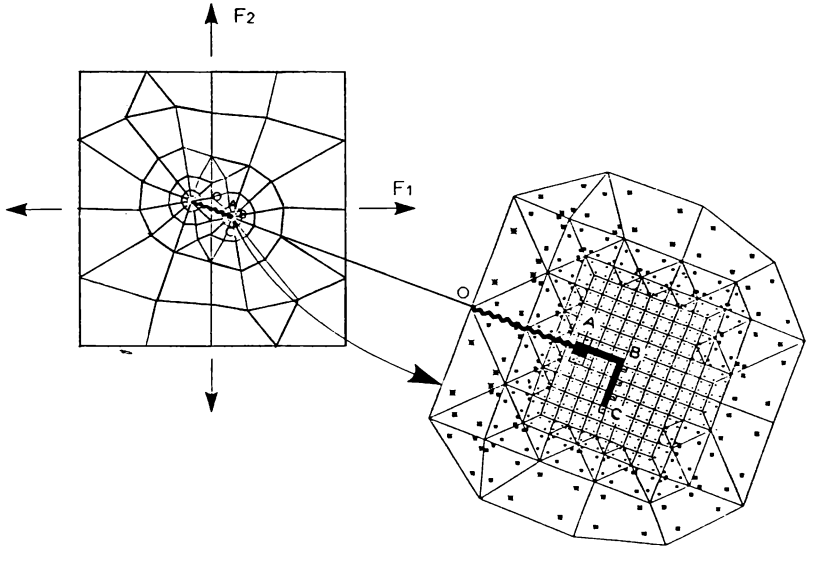


Fig. 52. Calcul de la bifurcation d'une fissure de fatigue (d'après R. Billardon).

7.3.4. *Propagation des fissures de fatigue*

Le cas de la fatigue est particulièrement difficile à cause des effets de fermeture des fissures qu'il est nécessaire de prendre en compte pour une analyse correcte des contraintes et déformations dans la zone endommageable. Il faut non seulement décrire la zone plastique en pointe de fissure et les redistributions correspondantes, mais aussi modéliser la « traînée plastique », c'est-à-dire l'« histoire » de la zone plastique, à travers laquelle la fissure s'est propagée.

Dans le cas de la fatigue, certaines approches locales se limitent actuellement à l'analyse découplée, sans introduire explicitement la variable endommagement. L'approche utilisée par Newman, généralisée par Anquez, consiste à faire progresser la fissure lorsque l'énergie dissipée dans le premier élément atteint une valeur critique. La progression est réalisée par relâchement de nœuds sur la largeur d'un élément. Après cette progression, un cycle particulier sert à redistribuer les contraintes induites par le relâchement de la liaison. On conçoit bien qu'une telle modélisation dépende de la taille et du motif du maillage local. Le modèle est donc étalonné par des expériences particulières ; mais il peut être utilisé ensuite pour réaliser des prévisions dans d'autres situations à la condition d'utiliser le même type de maillage.

La figure 53*a* p. 536 donne l'exemple d'un barreau en alliage léger AU4G1 sollicité en flexion. On observe la différence marquée entre les déformations plastiques correspondant à la charge et la décharge (composantes perpendiculaires à l'axe de la fissure).

La figure 53*b* montre la distribution des réactions à force extérieure minimale, après un changement de niveau de sollicitation cyclique. La propagation de $\Delta a = 0{,}01406$ mm a lieu entre chaque image. On note que la structure conserve la marque due au chargement antérieur (figures du bas) et que les valeurs calculées pour la charge d'ouverture sont d'abord croissantes après le changement (appliqué juste après le premier résultat) puis décroissantes. Ces effets sont effectivement constatés dans les expériences correspondantes. Ils servent de base à la définition de modèles de propagation avec effets de seuil évolutifs tels que celui du paragraphe 5.4.2.

7.3.5. *Croissance des fissures de rupture ductile*

La propagation des fissures dans les matériaux ductiles nécessite des calculs en élasto-plasticité couplée à l'endommagement ductile. Dans l'exemple présenté ci-dessous la loi d'endommagement est dérivée du modèle de Mac-Clintock et Rice et Tracey donnant l'accroissement du rayon des micro-cavités. Dans les calculs par éléments finis effectués, l'accroissement de la fissure, considérée comme zone complètement endommagée, s'opère lorsque les contraintes deviennent nulles aux points de Gauss des éléments finis. Les problèmes de convergence des calculs sont résolus en introduisant une taille caractéristique d'élément, identifiée par tâtonnements d'après la comparaison entre les résultats de calculs et ceux d'une expérience.

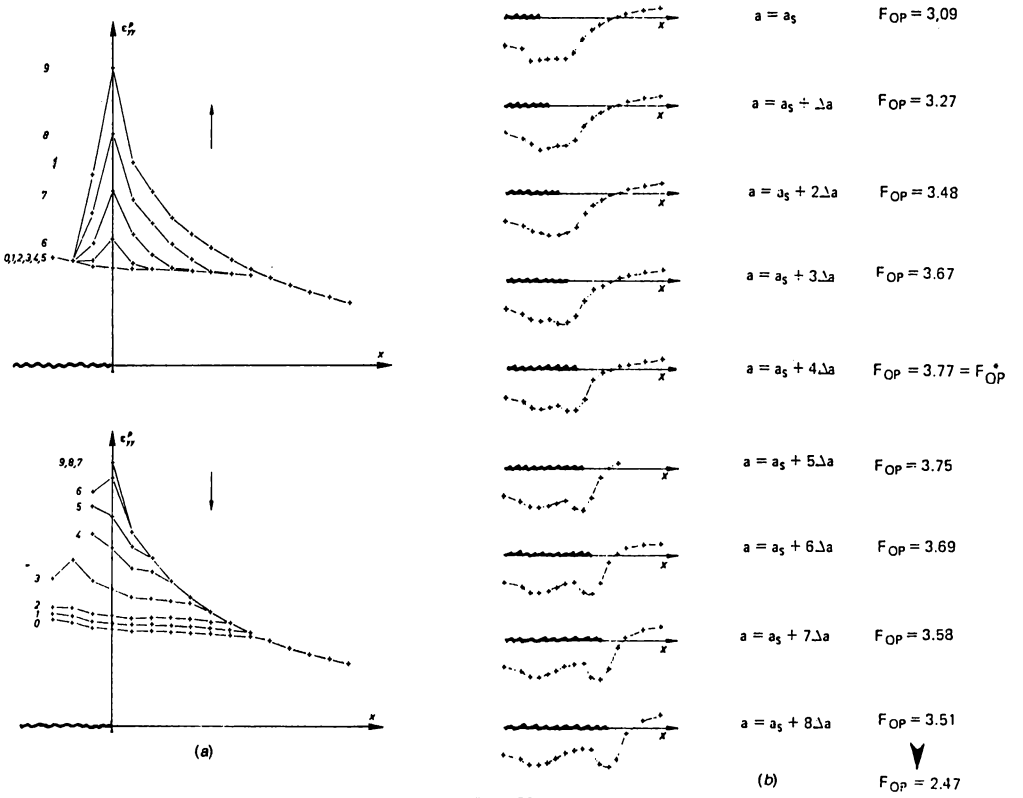


Fig. 53.

a) Déformation normale à la charge et à la décharge pour un niveau constant (les chiffres correspondent à la force appliquée).
b) Réactions aux liaisons de contact pour un chargement à deux niveaux (d'après L. Anquez).

La figure 54 montre de très intéressants résultats de calculs qui, conformément aux expériences sur un acier A316, prouvent que la position d'une fissure dans une éprouvette circulaire entaillée sollicitée en chargement axial monotone, dépend du rayon à fond d'entaille :

— fissure au centre de l'éprouvette pour un rayon assez grand (fig. 54*a*),
— fissure circonférentielle pour un petit rayon (fig. 54*b*).

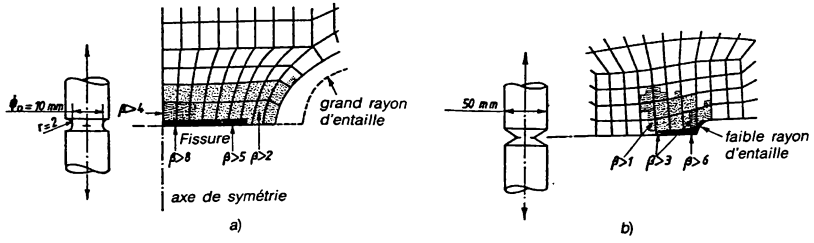


Fig. 54. Prévision de l'amorçage de la rupture ductile dans des barres entaillées (d'après G. Rousselier).

7.3.6. *Propagation des fissures de fluage*

L'endommagement de fluage très localisé dans une pièce métallique peut être décrit par une analyse tenant compte du couplage déformation viscoplastique-endommagement, avec une loi à écrouissage et endommagement isotropes, telle que celle décrite au paragraphe 6.2.2 du chapitre 7.

Une première méthode consiste à prendre en compte de façon continue le couplage entre la loi de viscoplasticité et la loi d'endommagement de fluage, mais sans couplage au niveau de la loi d'élasticité. L'évolution de la zone totalement endommagée intervient lorsque D est proche de 1 ($D \geqslant 0{,}99$ par exemple) et la rigidité des éléments correspondants est alors annulée. Cette technique simple, relativement peu coûteuse en temps de calcul, permet une prévision de l'évolution des zones endommagées, mais la propagation d'une fissure d'épaisseur faible, dans le prolongement de l'entaille initiale n'est pas correctement décrite, comme le montre l'exemple de la figure 55 (p. 538).

Une méthode plus fine, mais plus coûteuse consiste à ajouter à la méthode précédente le couplage continu avec l'élasticité. La matrice de rigidité est réactualisée périodiquement avec le procédé pratique indiqué en 7.2.2. On a ainsi une évolution continue du dommage dans l'espace et dans le temps, ce qui permet d'éliminer complètement les singularités de contrainte et d'avoir une redistribution complète à la « pointe » de la fissure. Celle-ci est bien décrite alors par la zone totalement endommagée (points d'intégration où D_c atteint la valeur critique fixée ici à 0,999). La figure 56 (p. 538) montre l'exemple d'une éprouvette *CT* en alliage INCO 718 (utilisé dans les disques de turbines), sollicitée en fluage sous charge constante à 600 °C. On note que, contrairement à l'exemple précédent, la fissure se propage bien dans son prolongement : ceci est une conséquence directe du couplage total.

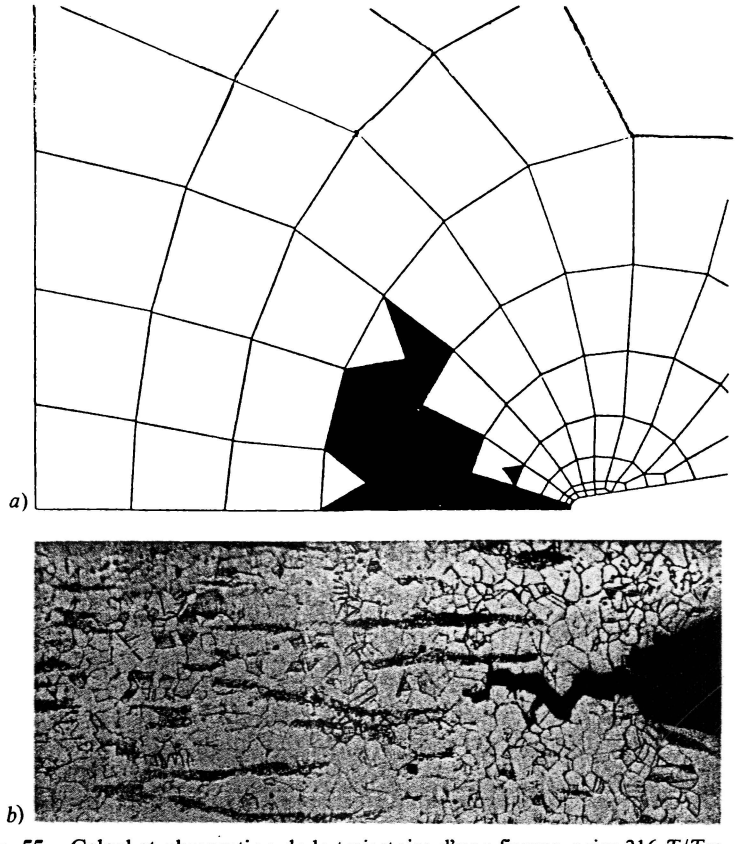


Fig. 55. Calcul et observation de la trajectoire d'une fissure, acier 316 $T/Tm = 0{,}6$ (d'après D. Hayhurst).

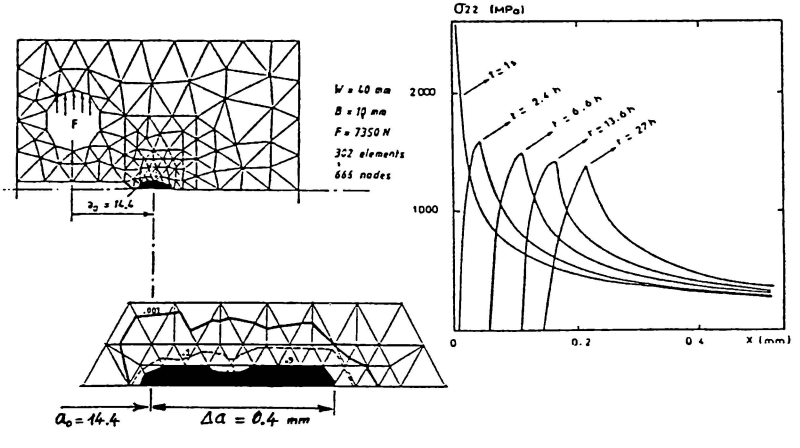


Fig. 56. Calcul de la progression d'une fissure de fluage (d'après K. Saanouni)

8. BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE 8

BUI H. D. *Mécanique de la rupture fragile.* Masson (1978).

BROEK D. *Elementary fracture mechanics.* Noordhoff (1974).

LIEBOWITZ. *Fracture.* Tomes I, II, III, IV, V. Academic Press (1968-1969).

SIH G. *Mechanics of fracture.* Tomes I, II, III, IV, V. Nordhoff (1973-1977).

LABBENS R. *Introduction à la mécanique de la rupture.* Ed. Pluralis (1980).

BARTHELEMY B. *Notions pratiques de mécanique de la rupture.* Eyrolles (1980).

INDEX

A

Accommodation, 24, 211.
Adaptation, 213.
Adoucissement, 24, 113, 172.
ALMANSI-EULER, 49.
Amorçage des fissures, 24, 117, 437.
Analyse limite, 248.
ANDRADE, 258, 266.
Anisotropie, 20, 54, 79, 184, 205, 212, 393, 398, 411.
Approche locale, 526.

B

BAUSCHINGER, 20, 111, 210, 320.
Béton, 31, 380, 430, 442, 533.
Bifurcation, 447, 497.
BINGHAM, 109.
Blocs programmés, 438.
Bois, 34, 187.
BUI, 456.
BURGERS, 11.

C

Caractéristiques d'élasticité, 134.
Caractéristiques d'endommagement, 359, 361, 366.
Caractéristiques de fissuration, 472, 477.
Caractéristiques de plasticité, 177, 227.
Caractéristiques de thermodynamique, 69.
Caractéristiques de thermoélasticité, 145.
Caractéristiques de viscoélasticité, 156.
Caractéristiques de viscoplasticité, 260, 264, 319, 355.
CAUCHY, 44, 47, 52.
Chaleur spécifique, 68, 140.
Chargement radial, 239.
Chargements cycliques, 77, 112, 171.
Chauffage, 80.
CLAUSIUS-DUHEM, 61, 189.
Clivage, 21.
Coefficient de dilatation, 140.
COFFIN, 367.
Composites, 28, 186.
Concentrations de contraintes, 243.
Condition de consistance, 194.
Conductivité thermique, 69.
Configuration, 49.
Consolidation, 19.
Contrainte effective, 347, 391.
Contrainte équivalente, 53, 200, 240, 377.
Contrainte hydrostatique, 53.
Contraintes, 44.
Contraintes planes, 127, 450.
Contraintes thermiques, 143.
Contrainte vraie, 52.
Convolution, 153, 159.
COULOMB, 120.
Couplage endommagement-comportement, 429.
Couplage plasticité-viscoplasticité, 334.
Courant de chaleur, 55.
Courbes « R », 473, 505.
Cristaux, 6-8.
Critère de charge-décharge, 190.
Critères d'endommagement, 376.
Critères de plasticité, 177.
Critères de rupture, 397.
CROSSLAND, 383.
Cumulation linéaire, 93, 362, 423.
Cumulation non linéaire, 362, 408, 414, 424.
Cyclique, 76, 112, 171, 269, 297, 323, 362.

D

DANG-VAN, 387.
Défauts cristallins, 8.
Déformation, 42, 47.
Déformation élastique, 13, 50.

Déformation équivalente, 240.
Déformation permanente, 13.
Déformations planes, 128, 451.
Déformation vraie, 52.
Déplacement, 47.
Dérivée particulaire, 41.
Déviateur, 52.
Dilatation, 140.
Dislocations, 10.
Dispersion, 94.
Dissipation, 62, 65, 277, 289, 312.
Ductilité, 23, 117, 119, 350, 359, 404, 433, 505.
DUGDALE, 465.
Durcissement, 19, 24, 114, 172.
Dynamomètre, 79, 83.

E

Echauffement adiabatique, 69.
Ecrouissage, 19, 75, 106, 110, 166, 193, 254, 261, 352.
Ecrouissage anisotrope, 197.
Ecrouissage cinématique, 111, 197, 205, 219, 306.
Ecrouissage cyclique, 77, 171, 230, 269, 353.
Ecrouissage isotrope, 110, 197, 198, 229, 286.
Ecrouissage-relaxation, 76, 265, 295.
Ecrouissage-viscosité, 263, 287.
EDELMAN-DRUCKER, 183.
Elasticité, 13, 50, 61, 103, 124, 430.
Elément de volume, 72, 79.
Eléments finis, 135, 245, 337, 511.
Encadrement, 248, 487, 514.
Endommagement critique, 348, 398.
Endommagement initial, 437.
Energie cinétique, 55, 457.
Energie interne, 55.
Energie libre, 58, 60.
Energie potentielle, 456.
Entropie, 57.
Environnement, 26.
Eprouvettes, 80, 88.
Equation d'équilibre, 46.
Equation de la chaleur, 68.
Equivalence en déformation, 348, 391.
Essais, 75.
Essais cycliques, 77, 173, 269, 353.
Essais multidimensionnels, 78, 272.
Etat local, 58.
EULER, 41, 339.
EULER-CAUCHY, 340.
Evolution microstructurale, 20.

F

Facteurs d'intensité des contraintes, 454, 467.
Fatigue, 24, 118, 353, 360, 382, 413, 474.
Fissure, 21, 87, 118, 437, 445.
Flexibilité, 517.
Fluage, 19, 75, 258, 299, 355, 408, 435, 441, 508.
Fonction fluage, 151.
Fonction relaxation, 153.
FORMAN, 478.
FOURIER, 64, 67.
Fragile, 21, 117, 119, 504.
FRANCK-READ, 15, 17.
Frottements, 120.

G

GAUSS-NEWTON, 99.
Générateurs tensoriels, 54.
GERMAIN, 42.
Glissements, 13.
Global, 72.
GOODMAN, 365.
Gradient, 48.
Grains, 6-8.
Grandes déformations, 49.
GREEN-LAGRANGE, 50.
GRIFFITH, 458.

H

Harmonique, 77.
HEAVISIDE, 103, 151.
HENCKY-MISES, 240.
HILL, 185.
Homogénéisation, 392, 401.
HOOKE, 125.

I

Identification, 95, 130, 202, 209, 227, 281, 290, 313, 317.
Implicite, 341.
Incompressibilité, 19, 199.
Incrémental, 174, 247, 339.
Indices de MILLER, 7.
Inégalité fondamentale, 57.
Instabilités structurales, 20, 327.
Intégrales de contour, 455, 465.
Interaction fatigue-fluage, 422.
Intergranulaire, 21.
Intrusion-extrusion, 24.
Invariants, 52, 180.
Isotrope, 180, 394, 410.
Isotropie transverse, 129.

J

Jauges de déformations, 83-87.

K

KACHANOV, 361, 412.
KELVIN-VOIGT, 104, 147.

L

LAGRANGE, 41, 50.
LAME, 126, 155.
LAPLACE-CARSON, 158.
LEGENDRE-FENCHEL, 64.
LEVY-MISES, 201.
Limite de fatigue, 382.
Limite d'élasticité, 18, 166.
Lois complémentaires, 63.
Lois de conservation, 54.
Lois d'état, 60.
Longueur utile, 84.

M

Maclage, 13.
MANSON, 367.
MASING, 171.
Masse volumique, 69.
Matériaux standards, 64.
MAXWELL, 103, 148.
Mécanismes de déformation, 13, 30, 33, 37.
Mécanismes de rupture, 21, 31, 33, 37.
Mémoire, 174, 234.
Mesures, 83, 349.
Métallographie, 9.
Méthode de la compliance, 488.
Méthode des moindres carrés, 98.
Méthode des éléments finis, 135, 245, 337, 511.
Méthode d'extrapolation, 299.
Méthode du potentiel, 87, 357.
Microfissure, 21.
Microscopie électronique, 9.
MINER, 94, 364.
Modèles analogiques, 101.
Modes de fissuration, 448.
Modes de sollicitation, 448.
Module de cisaillement, 127.
Module de compression hydrostatique, 127.
Molécules, 26.
Monocristal, 6.
MROZ, 216, 224.
Multiplicateur, 67, 194, 201, 208.
MURAKAMI, 412.
MUSKHELISHVILI, 452.

N

NEUBER, 243.
Normalité, 64, 194, 277.
NORTON, 108, 258, 266, 280, 283.

O

ODQVIST, 280.
ONSAGER, 65.
Orthotropie, 128.

P

PALMGREEN-MINER, 93, 364.
PARIS, 474, 509.
Partition, 59, 188, 275, 371.
PEIERLS-NABARO, 17.
Perturbation, 517.
PETCH, 17.
Phases, 7.
PIOLA-KIRCHHOFF, 51.
Plasticité associée, 196.
Plasticité parfaite, 105, 170, 203.
POISSON, 74, 126.
Polycristal, 8, 18.
Polymères, 26, 156.
Potentiel de dissipation, 63, 190, 277, 395, 399.
Potentiel thermodynamique, 60, 394, 398.
PRAGER, 189, 205.
PRAGER-ZIEGLER, 212.
PRANDTL-REUSS, 199.
Précipités, 20, 326.
Principe de la thermodynamique, 55.
Principe des puissances virtuelles, 42.

R

RABOTNOV, 408.
Radial, 239.
Raideur, 85, 141, 484, 488.
RAMBERG-OSGOOD, 168, 215.
Recouvrance, 19, 75, 272, 329.
Référentiel, 41, 49.
Relaxation, 76, 115, 262, 299.
Représentations tensorielles, 52.
Résistance électrique, 357.

Restauration, 19, 272, 329.
RICE, 408, 455.
Rigidité, 125.
ROBINSON, 93, 423.
Rocher, 114, 211, 225, 234.
Rupture ductile, 23.
Rupture fragile, 21.

S

SAINT-VENANT, 106.
Saturation, 298.
Secondaire, 258.
Second ordre, 340.
Seuil de fissuration, 478, 492, 510.
Seuil d'endommagement, 359, 376, 430.
Seuil de plasticité, 166.
SINES, 383.
Souplesse, 125.
Sources de dislocations, 15.
Standard, 64, 196.
Superplasticité, 261.
Surface de charge, 190.
Surface limite, 223.

T

TAIRA, 421, 423.
Taux de déformation, 42, 51.
Taux de restitution d'énergie, 377, 395, 457, 484.
Température de fusion, 69.
Ténacité, 470.
Tenseur des contraintes, 44.
Tenseur des déformations, 48.
Tertiaire, 258, 261.
Thermique, 67.
Thermodynamique, 54, 60.
Thermoélasticité, 61, 139.
Traction, 73, 80.
Transformations, 49.
Transgranulaire, 23.
Travail plastique, 189.
TRESCA, 182, 204.
Triaxialité des contraintes, 378.
TSAI, 186.

U

Ultrasons, 133, 351.

V

Variables associées, 61.
Variables duales, 65.
Variables flux, 62.
Variables internes, 59.
Variables observables, 59.
Vecteur contrainte, 44, 47.
Vecteur de BURGERS, 11.
Vieillissement, 20, 115, 333.
Viscoélasticité, 104, 145.
VON MISES, 180, 200, 273.

W

WESTERGAARD, 448.
WHEELER, 478.
WOEHLER, 364.

Y

YOUNG, 126.

Z

Zone plastique, 462, 478.

JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 Paris
N° 014995J Dépôt légal, 1re édition : 2e trimestre 1985
Dépôt légal : Janvier 1992
Imprimé en France

Mécanique des matériaux solides

Élasticité, thermoélasticité, viscoélasticité, plasticité, viscoplasticité, endommagement, fissuration sont les phénomènes qui déterminent la résistance des solides à la déformation et à la rupture. Grâce aux ordinateurs il est maintenant possible de les introduire dans les calculs de structures simulant la tenue en service des pièces mécaniques.

Dans ce but, la «Mécanique des Matériaux Solides» expose une méthode moderne de modélisation mathématique du comportement de l'élément de volume macroscopique. Elle s'appuie à la fois sur la connaissance des mécanismes physiques à l'échelle de la microstructure (chapitre 1), sur le formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles (chapitre 2) et sur les techniques d'expérimentation et d'identification à l'échelle macroscopique (chapitre 3).

Chaque type de comportement est étudié séparément dans les chapitres 4 à 8 où, après une description des aspects phénoménologiques, la formulation des lois de comportement est présentée sous une forme unifiée. L'identification des coefficients caractéristiques est donnée pour de nombreux métaux et alliages, polymères, composites, bétons et bois. Enfin, chacun de ces chapitres contient quelques éléments sur les méthodes de calculs de structures associées, principalement la méthode des éléments finis en élasticité, plasticité, viscoplasticité, et les méthodes de calculs d'amorçage et de propagation des fissures.

Ce livre s'adresse donc aux élèves-ingénieurs, étudiants de 2e et 3e cycles, chercheurs, aux ingénieurs d'essais, de contrôle de bureaux d'études ou de bureaux de calculs, aux enseignants, mécaniciens des solides, numériciens, métallurgistes...

Publié avec le concours ***du GRECO «Grandes déformations et endommagement»****, de l'ONERA et du CNRS.*

ISBN 2-10-001397-1

9 782100 013975